אלגברה: תהא Ω קבוצה אזי $\mathcal{F}\subseteq 2^{\Omega}$ המקיימת
- $\Omega\in\mathcal{F}$.
- $\forall E\in\mathcal{F}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{F}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{F}$ סופית מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה אזי $\varnothing\in\mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה ותהא $E\subseteq\mathcal{F}$ סופית אזי $\bigcap E\in\mathcal{F}$.

σ־אלגברה: תהא Ω קבוצה אזי $\mathcal{F}\subseteq 2^{\Omega}$ המקיימת
- $\Omega\in\mathcal{F}$.
- $\forall E\in\mathcal{F}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{F}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{F}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה אזי $\varnothing\in\mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה ותהא $E\subseteq\mathcal{F}$ בת מנייה אזי $\bigcap E\in\mathcal{F}$.

משפט: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי $\mathcal{F}$ הינה אלגברה מעל Ω.

פונקציה אדטיבית: פונקציה $\mu:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל $B_1\ldots B_n\in\mathcal{A}$ זרות בזוגות מתקיים $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{n}B_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu\left(B_i\right)$.

מידה על אלגברה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה אזי $\mu:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ אדטיבית.

פונקציה σ־אדטיבית: פונקציה $\mu:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$ זרות בזוגות מתקיים $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}B_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(B_i\right)$.

מידה על σ־אלגברה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה אזי $\mu:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ σ־אדטיבית.

מרחב מדיד: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי $(\Omega,\mathcal{F})$.

קבוצה מדידה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי $E\in\mathcal{F}$.

למה: תהא μ מידה על $\mathcal{F}$ המקיימת $\exists E\in\mathcal{F}.\mu(E)>0$ אזי $\mu(\varnothing)=0$.

למה: תהא μ מידה מעל σ־אלגברה $\mathcal{F}$ אזי μ אדטיבית.

למה: תהא μ מידה ותהיינה $A,B\in\mathcal{F}$ עבורן $A\subseteq B$ אזי $\mu(A)\le\mu(B)$.

מרחב מידה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה/σ־אלגברה מעל Ω ותהא μ מידה על $\mathcal{F}$ אזי $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$.

מידת הסתברות: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי מידה $\mathbb{P}:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ המקיימת $\mathbb{P}(\Omega)=1$.

מרחב הסתברות: מרחב מידה $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ עבורו μ מידת הסתברות.

מרחב התוצאות: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי Ω.

מאורע: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $E\in\mathcal{F}$.

מרחב המאורעות: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $\mathcal{F}$.

אינווריאנטיות להזזות: מרחב הסתברות $((0,1],\mathcal{F},\mathbb{P})$ עבורו לכל $A\subseteq(0,1]$ ולכל $b\in(0,1]$ באשר $A+b\subseteq(0,1]$ מתקיים $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A+b)$.

טענה: לכל מרחב הסתברות $\left((0,1],2^{(0,1]},\mathbb{P}\right)$ לא מתקיימת אינווריאנטיות להזזות.

קבוצה פתוחה: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה $\forall x\in A.\exists\varepsilon>0.\,(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq A$.

קבוצה סגורה: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה $A^{\mathcal{C}}$ פתוחה.

טענה: תהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ σ־אלגבראות מעל Ω אזי $\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$ הינה σ־אלגברה מעל Ω.

σ־אלגברה בורלית מעל $\mathbb{R}$: תהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ כל הσ־אלגבראות מעל $\mathbb{R}$ המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}=\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$.

קבוצה בורלית: $B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

טענה: σ־אלגברה בורלית הינה σ־אלגברה מעל $\mathbb{R}$.

טענה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל $\mathbb{R}$ המכילה את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\subseteq\mathcal{F}$.

טענה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω ותהא $A\subseteq\Omega$ אזי $\{E\cap A\mid E\in\mathcal{F}\}$ הינה σ־אלגברה מעל A.

σ־אלגברה בורלית מעל $(0,1]$: $\mathfrak{B}_{(0,1]}=\{B\cap(0,1]\mid B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\}$.

מידת לבג: תהא $B\in\mathfrak{B}$ אזי $\lambda(B)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)\mid B\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\right\}$.

טענה: $\left((0,1],\mathfrak{B}_{(0,1]},\lambda\right)$ מרחב הסתברות אינווריאנטי להזזות.

מרחב אחיד על A: עבור $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $(A,\mathfrak{B}_A,\lambda)$.

σ־אלגברה נוצרת: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{T}\subseteq 2^{\Omega}$ ותהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ כל הσ־אלגבראות מעל Ω המכילות את $\mathcal{T}$ אזי $\sigma(\mathcal{T})=\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$.

הצילינדר של הσ־אלגברה הנוצרת: תהא $\mathcal{T}\subseteq 2^{\Omega}$ וσ־אלגברה $\sigma(\mathcal{T})$ אזי $\mathcal{T}$.

טענה: תהא Ω קבוצה ותהא $\mathcal{T}\subseteq 2^{\Omega}$ נסמן $\mathcal{F}_0=\mathcal{T}\cup\{\varnothing,\Omega\}$, לכל סודר עוקב $\alpha+1$ נסמן $\mathcal{F}_{\alpha+1}=\mathcal{F}_{\alpha}\cup\left\{A^{\mathcal{C}}\mid A\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}\cup\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\mid A_n\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}$ ולכל סודר גבול λ נסמן $\mathcal{F}_{\lambda}=\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{F}_{\alpha}$ אזי $\sigma(\mathcal{T})=\mathcal{F}_{\omega_1}$ באשר ω_1 הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה.

טענה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{T}\subseteq 2^{\Omega}$ ויהיו $\omega,\kappa\in\Omega$ עבורן $\forall A\in\mathcal{T}.\omega\in A\Longleftrightarrow\kappa\in A$ אזי $\forall A\in\sigma(\mathcal{T}).\omega\in A\Longleftrightarrow\kappa\in A$.

משתנה מקרי/פונקציה מדידה: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $X:\Omega\to\mathbb{R}$ עבורה $\forall B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.X^{-1}[B]\in\mathcal{F}$.

פונקציה מדידה בורל: $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $\forall B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.\varphi^{-1}[B]\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

סימון: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $X:\Omega\to\mathbb{R}$ מ"מ נגדיר $\mathbb{P}_X:\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$ כך $\mathbb{P}_X(B)=\mathbb{P}\left(X^{-1}[B]\right)$.

טענה: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $X:\Omega\to\mathbb{R}$ מ"מ אזי $(\mathbb{R},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}},\mathbb{P}_X)$ מרחב הסתברות.

טענה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}$ אזי
- $f^{-1}[A\cup B]=f^{-1}[A]\cup f^{-1}[B]$.
- $f^{-1}[A\cap B]=f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]$.
- $f^{-1}\left[A^{\mathcal{C}}\right]=f^{-1}[A]^{\mathcal{C}}$.

טענה: יהי $(\Omega,\mathcal{F})$ מרחב מדיד ותהא $X:\Omega\to\mathbb{R}$ אזי $\left\{E\subseteq\mathbb{R}\mid X^{-1}[E]\in\mathcal{F}\right\}$ הינה σ־אלגברה מעל $\mathbb{R}$.

משפט: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ותהא $X:\Omega\to\mathbb{R}$ אזי (X מ"מ)$\Longleftrightarrow\left(\forall t\in\mathbb{R}.X^{-1}[(-\infty,t)]\in\mathcal{F}\right)$.

σ־אלגברה נוצרת על ידי משתנה מקרי: יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אזי $\sigma(X)=\sigma\left(\left\{X^{-1}[B]\mid B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\right\}\right)$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אזי
- יהי $c\in\mathbb{R}$ אזי cX מ"מ.
- $X+Y$ מ"מ.
- XY מ"מ.
- יהי Z מ"מ על $(\mathbb{R},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}},\mu)$ אזי $f\circ X$ מ"מ.

טענה: תהא $f\in C(\mathbb{R})$ ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה אזי $f^{-1}[\mathcal{U}]$ פתוחה.

מסקנה: תהא $f\in C(\mathbb{R})$ אזי f מ"מ על $(\mathbb{R},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}},\mu)$.

פונקציית התפלגות מצטברת (פה"מ): יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אזי $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ המקיימת $F_X(t)=\mathbb{P}(X\le t)$.

טענה: יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אזי
- $\lim_{t\to\infty}F_X(t)=1$.
- $\lim_{t\to-\infty}F_X(t)=0$.
- F_X מונוטונית עולה.
- $\lim_{t\to a^+}F_X(t)=F_X(a)$.

משתנים מקריים שווי התפלגות: X,Y מ"מ עבורם $\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y$.

למה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{F}_0\subseteq 2^{\Omega}$ סגורה לחיתוכים סופיים עבורה $\Omega\in\mathcal{F}_0$ ותהא $\mathcal{F}\subseteq 2^{\Omega}$ סגורה להפרשים וסגורה לגבולות אינסופיים עבורה $\mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F}$ אזי $\sigma(\mathcal{F}_0)\subseteq\mathcal{F}$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ אזי $(\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y)\Longleftrightarrow(F_X=F_Y)$.

תומך של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $\operatorname{supp}(X)=\{t\in\mathbb{R}\mid\forall\varepsilon>0.\mathbb{P}(t-\varepsilon<X<t+\varepsilon)>0\}$.

טענה: יהי X מ"מ אזי $\operatorname{supp}(X)$ הקבוצה הסגורה המינימלית ב־$\mathbb{R}$ עבורה $\mathbb{P}(X\in\operatorname{supp}(X))=1$.

אטום של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $t\in\mathbb{R}$ המקיים $\mathbb{P}(X=t)>0$.

קבוצת האטומים: יהי X מ"מ אזי $A_X=\{t\in\mathbb{R}\mid t\text{ אטום של }X\}$.

טענה: יהי X מ"מ אזי $|A_X|\le\aleph_0$.

משתנה מקרי בדיד: משתנה מקרי X המקיים $\mathbb{P}(X\in A_X)=1$.

פונקציית צפיפות: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה למקוטעין המקיימת $f\ge 0$ וכן $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=1$.

משתנה מקרי רציף: משתנה מקרי X עבורו קיימת $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית צפיפות עבורה לכל $a<b$ מתקיים $\mathbb{P}(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

סימון: יהי X מ"מ רציף אזי f_X פונקציית הצפיפות של X.

טענה: יהי X מ"מ אזי (X רציף)$\Longleftrightarrow(\mathbb{P}(X\in A_X)=0)$.

הערה: לא כל משתנה מקרה הוא בדיד או רציף, ובמקרה זה $0<\mathbb{P}(X\in A_X)<1$.

טענה: יהי X מ"מ רציף אזי
- יהי $t\in\mathbb{R}$ אזי $\mathbb{P}(X=t)=0$.
- $F_X(t)=\int_{-\infty}^{t}f_X(x)\,\mathrm{d}x$.

טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא $a\in\mathbb{R}$ עבורה $f_X\in C(a)$ אזי $F_X'(a)=f_X(a)$.

האחוזון ה־p: יהי X מ"מ עבורו F_X עולה ממש עד אשר $F_X=1$ ויהי $p\in(0,1)$ אזי $x_p\in\mathbb{R}$ המקיים $F_X(x_p)=p$.

האחוזון ה־p: יהי X מ"מ עבורו F_X עולה ויהי $p\in(0,1)$ אזי $x_p=\sup\{t\mid F_X(t)\le p\}$.

טענה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$ וכן $\lim_{x\to\infty}F(x)=1$ אזי קיים מ"מ X על מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ עבורו $F_X=F$.

סימון: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$ וכן $\lim_{x\to\infty}F(x)=1$ אזי $X^{\star}(s)=\sup\{t\mid F(t)\le s\}$.

טענה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$ וכן $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$ אזי $X^{\star}$ מ"מ על $\left((0,1),\mathfrak{B}_{(0,1)},\lambda\right)$.

משפט: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$ וכן $\lim_{x\to\infty}F(x)=1$ אזי $F_{X^{\star}}=F$.

טענה: יהי $\lambda>0$ יהיו $X_n\sim\text{Bin}\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)$ מ"מ יהי $X\sim\text{Poi}(\lambda)$ מ"מ ויהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $\mathbb{P}(X_n=k)\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathbb{P}(X=k)$.

תהליך פואסון: משתנים מקריים $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ כך שלכל $t\in\mathbb{R}_+$ המ"מ N_t סופר את מספר האירועים בלתי תלויים שקרו עד זמן t, בפרט $N_0=0$ וכן $N_{t+s}-N_s\sim\text{Poi}(\lambda t)$ באשר λ ממוצע האירועים ליחידת זמן.

טענה: יהי $\lambda>0$ יהי $X\sim\text{Exp}(\lambda)$ ויהיו $a,b>0$ אזי $\mathbb{P}(X>a+b\mid X>a)=\mathbb{P}(X>b)$.

טענה: יהי X מ"מ המקיים $\forall a,b>0.\mathbb{P}(X>a+b\mid X>a)=\mathbb{P}(X>b)$ אזי קיים $\lambda>0$ עבורו $X\sim\text{Exp}(\lambda)$.

טענה: הזמן הבינמופעי של תהליך פואסון עם קצב λ מופעים ליחידת זמן מתפלג $\text{Exp}(\lambda)$.

טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על, עולה ממש וגזירה אזי $f_{\varphi\circ X}(t)=\frac{f_X\left(\varphi^{-1}(t)\right)}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(t)\right)}$.

טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על, יורדת ממש וגזירה אזי $f_{\varphi\circ X}(t)=-\frac{f_X(\varphi^{-1}(t))}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}$.

הגדרה: יהי X מ"מ אזי $X^+=\max\{X,0\}$, $X^-=\min\{X,0\}$.

תוחלת: יהי X מ"מ בדיד אזי $\mathbb{E}[X]=\sum_{c\in A_X}c\cdot\mathbb{P}(X=c)$.

טענה: יהי X מ"מ בדיד אזי $\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[X^+]+\mathbb{E}[X^-]$.

משתנה מקרי אינטגרבילי: מ"מ בדיד X עבורו $\mathbb{E}[X]$ סופי.

משתנה מקרי סימטרי: יהי $a\in\mathbb{R}$ אזי מ"מ X עבורו $\forall b\in\mathbb{R}.\mathbb{P}(X\ge a+k)=\mathbb{P}(X\le a-k)$.

טענה: יהי $a\in\mathbb{R}$ ויהי X מ"מ בדיד אינטגרבילי סימטרי סביב a אזי $\mathbb{E}[X]=a$.

טענה לינאריות התוחלת: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי X מ"מ בדיד אינטגרבילי אזי $\mathbb{E}[aX+b]=a\mathbb{E}[X]+b$.

משתנה מקרי שולט: יהיו X,Y מ"מ אזי X שולט על Y אם $Y\le X$.

טענה מונוטוניות התוחלת: יהיו $X\ge Y$ מ"מ בדידים אזי $\mathbb{E}[X]\ge\mathbb{E}[Y]$.

תוחלת: יהי X מ"מ אזי

- $\mathbb{E}[X^+]=\sup\{\mathbb{E}[Y]\mid(0\le Y\le X^+)\wedge(\text{Y מ"מ בדיד})\}$.
- $\mathbb{E}[X^-]=-\sup\{\mathbb{E}[Y]\mid(0\le Y\le -X^-)\wedge(\text{Y מ"מ בדיד})\}$.
- $\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[X^+]+\mathbb{E}[X^-]$.

משתנה מקרי אינטגרבילי: מ"מ X עבורו $\mathbb{E}[X]$ סופי.

טענה לינאריות התוחלת: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי X מ"מ אינטגרבילי אזי $\mathbb{E}[aX+b]=a\mathbb{E}[X]+b$.

טענה מונוטוניות התוחלת: יהיו $X\ge Y$ מ"מ אזי $\mathbb{E}[X]\ge\mathbb{E}[Y]$.

טענה נוסחת הזנב: יהי X מ"מ אזי $\mathbb{E}[X]=\int_0^\infty(1-F_X(t))\,\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^0(0-F_X(t))\,\mathrm{d}t$.

מסקנה: יהי X מ"מ רציף אזי $\mathbb{E}[X]=\int_{-\infty}^\infty tf_X(t)\,\mathrm{d}t$.

משתנה מקרי שולט סטוכסטית: יהיו X,Y מ"מ אזי X שולט סטוכסטית על Y אם $F_Y\ge F_X$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ עבורם $\mathbb{P}(Y\le X)=1$ אזי X שולט סטוכסטית על Y.

טענה: יהיו X,Y מ"מ

- אם X שולט סטוכסטית על Y אזי $\mathbb{E}[Y]\le\mathbb{E}[X]$.
- אם $\mathbb{P}(Y\le X)=1$ אזי $\mathbb{E}[Y]\le\mathbb{E}[X]$.
- חיבוריות: $\mathbb{E}[X+Y]=\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]$.

טענה אי־שיוויון מרקוב: יהי $X\ge0$ מ"מ אינטגרבילי ויהי $b>0$ אזי $\mathbb{P}(X\ge b)\le\frac{\mathbb{E}[X]}{b}$.

טענה: יהי X מ"מ אינטגרבילי בדיד ותהא φ מדידה בורל אזי $\mathbb{E}[\varphi\circ X]=\sum_{c\in A_X}\varphi(c)\cdot\mathbb{P}(X=c)$.

טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא φ רציפה למקוטעין אזי $\mathbb{E}[\varphi\circ X]=\int_{-\infty}^\infty\varphi(t)f_X(t)\,\mathrm{d}t$.

טענה: יהי X מ"מ חסום אזי $\mathbb{E}[X]=\int_0^1X^\star(t)\,\mathrm{d}t$.

טענה: יהי X מ"מ חסום מלרע אזי $\mathbb{E}[X]=\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{1-\varepsilon}X^\star(t)\,\mathrm{d}t$.

טענה: יהי X מ"מ חסום מלעיל אזי $\mathbb{E}[X]=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{0+\varepsilon}^1X^\star(t)\,\mathrm{d}t$.

שונות: יהי X מ"מ אינטגרבילי אזי $\text{Var}(X)=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]$.

סטיית תקן: יהי X מ"מ אינטגרבילי אזי $\sigma(X)=\sqrt{\text{Var}(X)}$.

טענה: יהי X מ"מ אינטגרבילי אזי $\text{Var}(X)=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}^2[X]$.

טענה: יהי X מ"מ אינטגרבילי ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $\text{Var}(aX+b)=a^2\text{Var}(X)$.

טענה אי־שיוויון צ'בישב: יהי X מ"מ אינטגרבילי ובעל שונות ויהי $a>0$ אזי $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}[X]|\ge a)\le\frac{\text{Var}(X)}{a^2}$.

פונקציה יוצרת מומנטים: יהי X מ"מ אזי $M_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $M_X(t)=\mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$.

טענה: יהי X מ"מ ויהי I קטע עבורו $0\in I$ וכן $M_X\in C^n(I)$ אזי $M_X^{(n)}(0)=\mathbb{E}[X^n]$.

טענה: יהי X מ"מ ויהי I קטע עבורו $0\in I$ וכן $M_X(t)$ קיים וסופי על I אזי $\mathbb{E}[|X|^n]$ מתכנס לכל $n\in\mathbb{N}$.

טענה: יהי X מ"מ ויהי $\varepsilon>0$ עבורו $M_X(t)$ קיים וסופי על $(-\varepsilon,\varepsilon)$ אזי $M_X(t)=\sum_{n=0}^n\frac{t^n\mathbb{E}[X^n]}{n!}$.

σ־אלגברה בורלית מעל $\mathbb{R}^n$: תהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל $\mathbb{R}^n$ המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}=\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$.

משתנה מקרי n־מימדי: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ עבורה $\forall B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}.X^{-1}[B]\in\mathcal{F}$.

משפט: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ותהא $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ אזי (X מ"מ)$\iff\left(\forall t\in\mathbb{R}^n.\forall i\in[n].X_i^{-1}[(-\infty,t)]\in\mathcal{F}\right)$.

סימון: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ מ"מ נגדיר $\mathbb{P}_X:\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}\to\mathbb{R}^n$ כך $\mathbb{P}_X(B)=\mathbb{P}\left(X^{-1}[B]\right)$.

טענה: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ מ"מ אזי $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n},\mathbb{P}_X)$ מרחב הסתברות.

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת: יהי X מ"מ n־מימדי על $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אזי $F:\mathbb{R}^n\to[0,1]$ המקיימת $F_X(t)=\mathbb{P}(X_1\le t_1,\dots,X_n\le t_n)$.

טענה: יהי (X,Y) מ"מ דו־ערכי אזי

- יהי $\ell\in\mathbb{R}$ אזי $\lim_{k\to-\infty}F_{X,Y}(k,\ell)=0$.
- יהי $k\in\mathbb{R}$ אזי $\lim_{\ell\to-\infty}F_{X,Y}(k,\ell)=0$.
- $\lim_{\ell\to\infty}\lim_{k\to\infty}F_{X,Y}(k,\ell)=1$.
- רציפות מימין: יהיו $p,q\in\mathbb{R}$ אזי $\lim_{k\to p^+}\lim_{\ell\to q^+}F_{X,Y}(k,\ell)=F_{X,Y}(p,q)$

טענה: יהי (X,Y) מ"מ דו־ערכי ויהיו $k_1<k_2$ וכן $\ell_1<\ell_2$ אזי $F_{X,Y}(k_2,\ell_2)+F_{X,Y}(k_1,\ell_1)\ge F_{X,Y}(k_2,\ell_1)+F_{X,Y}(k_1,\ell_2)$.

משתנים מקריים שווי התפלגות: X,Y מ"מ n־מימדיים עבורם $\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ n־מימדיים אזי $(\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y)\iff(F_X=F_Y)$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי אזי X_i מ"מ חד־מימדי.

משתנה מקרי שולי: יהי X מ"מ n־מימדי אזי X_i.

פונקציית התפלגות מצטברת שולית: יהי (X,Y) מ"מ דו־מימדי אזי

- $F_X(t)=\lim_{y\to\infty}F_{X,Y}(t,y)$.
- $F_Y(t)=\lim_{x\to\infty}F_{X,Y}(x,t)$.

אטום: יהי X מ"מ n־מימדי אזי $a\in\mathbb{R}^n$ עבורו $\mathbb{P}(X=a)>0$.

קבוצת האטומים: יהי X מ"מ n־מימדי אזי $A_X=\{t\in\mathbb{R}^n\mid\text{t אטום של X}\}$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי אזי $|A_X|\le\aleph_0$.

משתנה מקרי בדיד: X מ"מ n־מימדי עבורו $\mathbb{P}(X\in A_X)=1$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי בדיד אזי $\forall a\in A_X.\mathbb{P}_X(a)=\mathbb{P}(X=a)$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי אזי (X מ"מ בדיד)$\iff$(X_i מ"מ בדיד לכל $i\in[n]$).

פונקציית צפיפות משותפת: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ רציפה למקוטעין המקיימת $f\ge0$ וכן $\int_{-\infty}^\infty\cdots\int_{-\infty}^\infty f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n=1$.

משתנה מקרי רציף: X מ"מ n־מימדי עבורו קיימת $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציית צפיפות עבורה לכל $a,b\in\mathbb{R}^n$ המקיימות $a_i<b_i$ מתקיים $\mathbb{P}(a_1<X_1<b_1,\dots,a_n<X_n<b_n)=\int_{a_n}^{b_n}\cdots\int_{a_1}^{b_1}f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי אזי (X רציף)$\iff(\mathbb{P}(X\in A_X)=0)$.

טענה: הי X מ"מ n־מימדי ויהי $a\in\mathbb{R}^n$ אזי $\mathbb{P}(X=a)=0$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי רציף אזי $F_X(a)=\int_{-\infty}^{a_n}\cdots\int_{-\infty}^{a_1}f_X(x_1\dots x_n)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי רציף ותהא $p:[n]\to[n]$ תמורה אזי $F_X(a)=\int_{-\infty}^{a_{p(n)}}\cdots\int_{-\infty}^{a_{p(1)}}f_X(x_1\dots x_n)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי רציף ותהא $a\in\mathbb{R}^n$ עבורה $f_X\in C(a)$ אזי $\frac{\partial^2F_X}{\partial x\partial y}(a)=\frac{\partial^2F_X}{\partial y\partial x}(a)=f_X(a)$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי רציף אזי X_i מ"מ רציף לכל $i\in[n]$.

פונקציית צפיפות שולית: יהי (X,Y) מ"מ דו־מימדי אזי

- $f_X(t)=\int_{-\infty}^\infty f_{X,Y}(t,y)\,\mathrm{d}y$.
- $f_Y(t)=\int_{-\infty}^\infty f_{X,Y}(x,t)\,\mathrm{d}x$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי רציף ותהא $B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$ אזי $\mathbb{P}(X\in B)=\int_Bf_X$.

פונקציה מדידה בורל: $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ המקיימת $\forall B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.\varphi^{-1}[B]\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי ותהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ מדידה בורל אזי $\varphi(X)$ מ"מ חד־מימדי.

מסקנה: יהי (X,Y) מ"מ דו־מימדי אזי $f_{X+Y}(s)=\int_{-\infty}^\infty f_{X,Y}(x,s-x)\,\mathrm{d}x$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי ותהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ בורלית רציפה למקוטעין אזי $\mathbb{E}[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^\infty\cdots\int_{-\infty}^\infty\varphi(x_1\dots x_n)f_X(x_1\dots x_n)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n$.

שונות משותפת: יהיו X,Y מ"מ על אותו מרחב הסתברות אזי $\text{Cov}[X,Y]=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$.

משתנים בלתי מתואמים: X,Y מ"מ על אותו מרחב הסתברות עבורם $\text{Cov}[X,Y]=0$.

מקדם מתאם: יהיו X,Y מ"מ אזי $\rho_{X,Y}=\frac{\text{Cov}[X,Y]}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

משפט אי־שיוויון קושי־שוורץ: יהיו X,Y מ"מ בעלי מומנט ראשון ושני אזי $\mathbb{E}[XY]^2\le\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]$.

מסקנה: יהיו X,Y מ"מ בעלי מומנט ראשון ושני אזי $\left(\mathbb{E}[XY]^2=\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]\right)\iff(\exists c\in\mathbb{R}.\mathbb{P}(Y=cX)=1)$.

מסקנה: יהיו X,Y מ"מ אזי $\rho_{X,Y}\in[-1,1]$.

מסקנה: יהיו X,Y מ"מ אזי

- $(\rho_{X,Y}=1)\iff(\exists a>0.\exists b\in\mathbb{R}.\mathbb{P}(X=aY+b)=1)$.
- $(\rho_{X,Y}=-1)\iff(\exists a<0.\exists b\in\mathbb{R}.\mathbb{P}(X=aY+b)=1)$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ אזי $\text{Cov}[X,Y]=\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ אזי

- $\text{Cov}[X,X]=\text{Var}[X]$.
- $\text{Cov}[X,Y]=\text{Cov}[Y,X]$.
- $\text{Cov}[aX+b,Y]=a\text{Cov}[X,Y]$.
- $\text{Cov}\left[\sum_{i=1}^nX_i,\sum_{i=1}^mY_i\right]=\sum_{i=1}^n\sum_{i=1}^m\text{Cov}[X_i,Y_i]$.

משתנים מקריים בלתי תלויים: $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ חד־מימדיים עבורם לכל מאורעות $\{B_i\}_{i=1}^n$ המקיימים $\forall k\in[n].B_k\in\sigma(X_k)$ מתקיים $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^nB_i\right)=\prod_{i=1}^n\mathbb{P}(B_i)$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת ותהיינה $\{g_i\}_{i=1}^n$ פונקציות מדידות בורל אזי $\{g_i(X_i)\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ אזי ($\{X_i\}_{i=1}^n$ ב"ת)$\iff$($F_{X_1\dots X_n}(x_1\dots x_n)=\prod_{i=1}^nF_{X_i}(x_i)$).

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ רציפים אזי ($\{X_i\}_{i=1}^n$ ב"ת)$\iff$($f_{X_1\dots X_n}(x_1\dots x_n)=\prod_{i=1}^nf_{X_i}(x_i)$).

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ מ"מ רציפים ותהיינה $\{g_i\}_{i=1}^{n}$ אי־שליליות רציפות למקוטעין המקיימות $f_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} g_i(x_i)$ אזי $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ מ"מ ב"ת.

למה: יהיו X, Y מ"מ ב"ת אינטגרביליים אזי $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$.

טענה: יהיו X, Y מ"מ ב"ת אזי $\text{Cov}[X, Y] = 0$.

מסקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני אזי $\text{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}[X_i]$.

מסקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני אזי $M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$.

סטטיסטיי הסדר: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי $X_{(k)}$ הערך ה־k בגודלו באוסף $\{X_i\}_{i=1}^{n}$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי

- $F_{X_{(k)}}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\binom{n}{i} \cdot F_{F_{X_1}}(t)^{i} \cdot (1 - F_{X_1}(t))^{n-i} \right)$.
- $f_{X_{(k)}}(t) = n \cdot f_{X_1}(t) \cdot F_{X_1}(t)^{k-1} \cdot (1 - F_{X_1}(t))^{n-k}$.

ממוצע מדגמי: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי $\mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right] = \mathbb{E}[X_1]$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי $\text{Var}\left[\overline{X_n}\right] \to 0$.

התכנסות משתנים מקריים: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מ"מ ויהי X מ"מ אזי

- התכנסות בהתפלגות: נסמן $X_n \xrightarrow{D} X$ אם מתקיים $\forall t \in \mathbb{R}. (F_X \in C(\{t\})) \Longrightarrow \left(F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(t) \right)$.
- התכנסות בהסתברות: נסמן $X_n \xrightarrow{p} X$ אם מתקיים $\forall \varepsilon > 0. \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- התכנסות כמעט תמיד: נסמן $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ אם מתקיים $\mathbb{P}\left(\left\{ \omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega) \right\} \right) = 1$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מ"מ ויהי X מ"מ אזי $\left(X_n \xrightarrow{a.s.} X \right) \Longrightarrow \left(X_n \xrightarrow{p} X \right) \Longrightarrow \left(X_n \xrightarrow{D} X \right)$.

החוק החלש של המספרים הגדולים: מ"מ $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ עבורם $\overline{X_n} - \mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right] \xrightarrow{p} 0$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות בעלי מומנט שני אזי $\overline{X_n} - \mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right] \xrightarrow{p} 0$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני עבורם $\frac{\sum_{k=1}^{n} \text{Var}[X_k]}{n^2} \to 0$ אזי $\overline{X_n} - \mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right] \xrightarrow{p} 0$.

למה הלמה של קרונקר: תהיינה a_n, b_n סדרות עבורן $a_n \geq 0$ וכן $b_n \uparrow \infty$ וכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$ אזי $\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{b_n} \to 0$.

מסקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני עבורם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}[X_n]}{n^2} < \infty$ אזי $\overline{X_n} - \mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right] \xrightarrow{p} 0$.

סדרת קבוצות מונוטונית: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ אזי

- מונוטונית עולה חלש: $\forall n \in \mathbb{N}. A_n \subseteq A_{n+1}$.
- מונוטונית יורדת חלש: $\forall n \in \mathbb{N}. A_{n+1} \subseteq A_n$.

סופרמום: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ אזי $\sup(A) = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$.

אינפימום: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ אזי $\inf(A) = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$.

גבול עליון: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ אזי $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$.

גבול תחתון: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ אזי $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$.

גבול: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ עבורה $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ אזי $\lim_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$.

טענה: תהא μ מידה מעל σ־אלגברה $\mathcal{F}$ ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{F}$ עבורה $\lim_{n\to\infty} A_n = B$ אזי $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(B)$.

טענה: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ אזי $\limsup A_n = \{A_n \text{ אינסוף פעמים}\}$.

טענה: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ אזי $\liminf A_n = \{A_n \text{ החל ממקום מסויים}\}$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מ"מ ויהי X מ"מ אזי $\left(X_n \xrightarrow{a.s.} X \right) \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0. \mathbb{P}(\limsup \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}) = 0)$.

מאורעות בלתי תלויים: מאורעות $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימים כי לכל $I \subseteq \mathbb{N}$ סופית מתקיים $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$.

טענה הלמה של בורל־קנטלי: יהיו $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ מאורעות אזי

- $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \right) \Longleftarrow (\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0)$.
- $(\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ מאורעות ב"ת$) \wedge \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \right) \Longleftarrow (\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1)$.

מסקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מ"מ ויהי X מ"מ עבורם לכל $0 < \varepsilon$ מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty$ אזי $X_n \xrightarrow{a.s.} X$.

החוק החזק של המספרים הגדולים: מ"מ $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ עבורם $\overline{X_n} - \mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right] \xrightarrow{a.s.} 0$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מ"מ בעלי מומנט רביעי חסום במידה אחידה עבורם $\forall i \in \mathbb{N}. \mathbb{E}[X_i] = 0$ אזי $\overline{X_n} \xrightarrow{a.s.} 0$.

מסקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מ"מ עבורם $\forall i \in \mathbb{N}. \mathbb{E}[X_i] = 0$ וכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_n)}{n^2} < \infty$ אזי $\overline{X_n} \xrightarrow{a.s.} 0$.

σ־אלגברת הזנב: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מ"מ אזי $\bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} \sigma(X_i)\right)$.

מאורע זנב: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מ"מ ותהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברת הזנב אזי $A \in \mathcal{F}$.

חוק 0-1 של קולמוגורוב: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מ"מ ב"ת ויהי A מאורע זנב אזי $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

מסקנה: יהיו $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ מאורעות ב"ת אזי

- $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \right) \Longleftrightarrow (\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0)$.
- $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \right) \Longleftrightarrow (\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1)$.

התפלגות נורמלית סטנדרטית: מ"מ Z עבורו $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

טענה: יהי $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ אזי $M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

טענה: יהי $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ יהי $\mu \in \mathbb{R}$ ויהי $\sigma \in \mathbb{R}_+$ אזי $\sigma Z + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

מסקנה: יהי $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ אזי $M_Z(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t}$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מ"מ ב"ת עבורם $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ אזי $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$.

מסקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מ"מ ב"ת עבורם $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ אזי $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

משפט הגבול המרכזי: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות בעלי מומנט שני אזי $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n \text{Var}(X_1)}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1)$.

תוחלת מותנית: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות יהי X מ"מ ותהא $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ σ־אלגברה אזי $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_0]$ מ"מ על $\mathcal{F}_0$ עבורו לכל $A \in \mathcal{F}_0$ מתקיים $\mathbb{E}[\chi_A \cdot X] = \mathbb{E}[\chi_A \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_0]]$.

הגדרה: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו X, Y מ"מ אזי $\mathbb{E}[X \mid Y] = \mathbb{E}[X \mid \sigma(Y)]$.

משתנה מקרי מותנה: יהי (X, Y) מ"מ דו־מימדי בדיד אזי $X \mid Y = y$ מ"מ עבורו $\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)}$.

מסקנה: יהי (X, Y) מ"מ דו־מימדי בדיד אזי $\mathbb{E}[X \mid Y = y] = \sum x \cdot \mathbb{P}(X = x \mid Y = y)$.

משתנה מקרי מותנה: יהי (X, Y) מ"מ דו־מימדי רציף אזי $X|Y$ מ"מ עבורו $f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$.

מסקנה: יהי (X, Y) מ"מ דו־מימדי רציף אזי $\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y=y}(x)\, \mathrm{d}x$.

טענה: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות יהי X מ"מ ותהיינה $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}$ σ־אלגברות אזי $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_2]\,|\mathcal{F}_1]$.

מסקנה נוסחאת ההחלקה: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו X, Y מ"מ אזי $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$.

מסקנה: יהי X מ"מ רציף ויהי $A \in \mathcal{F}$ מאורע אזי $\mathbb{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(A \mid X = x) f_X(x)\, \mathrm{d}x$.

התפלגות ברנולי: יהי $p\in[0,1]$ אזי

- המשתנה המקרי: X אינדיקטור להצלחה בניסוי בעל סיכוי הצלחה p וסיכוי כישלון $1-p$.
- פונקציית הסתברות: $\mathbb{P}(X=1)=p$, $\mathbb{P}(X=0)=1-p$.
- סימון: $X\sim\text{Ber}(p)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}[X]=p$.
- שונות: $\text{Var}(X)=p(1-p)$.

התפלגות בינומית: יהי $p\in[0,1]$ ויהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי

- המשתנה המקרי: X מספר הניסויים שצלחו בביצוע n ניסויי ברנולי בלתי תלויים בסיכוי הצלחה p לניסוי.
- פונקציית הסתברות: יהי $k\in\{0,\ldots,n\}$ אזי $\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.
- סימון: $X\sim\text{Bin}(n,p)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}[X]=np$.
- שונות: $\text{Var}(X)=np(1-p)$.

התפלגות בינומית שלילית: יהי $p\in[0,1]$ ויהי $r\in\mathbb{N}$ אזי

- המשתנה המקרי: X מספר הניסויי ברנולי שנדרשו עד שלראשונה התחרשה ההצלחה ה־r.
- פונקציית הסתברות: יהי $k\in\mathbb{N}\backslash\{0\ldots r-1\}$ אזי $\mathbb{P}(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$.
- סימון: $X\sim\text{NB}(n,p)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}[X]=\frac{r}{p}$.
- שונות: $\text{Var}(X)=\frac{r(1-p)}{p^2}$.

התפלגות גאומטרית: יהי $p\in[0,1]$ אזי

- המשתנה המקרי: X מספר ניסויי ברנולי בלתי תלויים בסיכוי הצלחה p שנדרשו עד הצלחה הראשונה כולל.
- פונקציית הסתברות: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $\mathbb{P}(X=k)=(1-p)^{k-1}p$.
- סימון: $X\sim\text{Geo}(p)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}[X]=\frac{1}{p}$.
- שונות: $\text{Var}(X)=\frac{1-p}{p^2}$.

התפלגות הייפרגאומטרית: יהי $N\in\mathbb{N}$ ויהיו $D,n\in\{0\ldots N\}$ אזי

- המשתנה המקרי: X מספר ההוצאות המוצלחות מתוך N ניסויים כאשר יש D פריטים מיוחדים ו־n פריטים רגילים.
- פונקציית הסתברות: יהי $k\in\{\max\{0,n+D-N\}\ldots\min(n,D)\}$ אזי $\mathbb{P}(X=k)=\frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.
- סימון: $X\sim\text{HG}(N,D,n)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}[X]=\frac{nD}{N}$.
- שונות: $\text{Var}(X)=\frac{nD}{N}\left(1-\frac{D}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$.

התפלגות הייפרגאומטרית שלילית: יהי $N\in\mathbb{N}$ יהי $K\in\{0,\ldots,N\}$ ויהי $r\in\{0,\ldots,N-K\}$ אזי

- פונקציית הסתברות: יהי $k\in\{0,\ldots,K\}$ אזי $\mathbb{P}(X=k)=\frac{\binom{k+r-1}{k}\binom{N-r-k}{K-k}}{\binom{N}{K}}$.
- סימון: $X\sim\text{NHG}(N,K,r)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}[X]=\frac{rK}{N-K+1}$.
- שונות: $\text{Var}(X)=\left(\frac{r(N+1)K}{(N-K+1)(N-K+2)}\right)\left(1-\frac{r}{N-K+1}\right)$.

התפלגות פואסונית: יהי $\lambda>0$ אזי

- המשתנה המקרי: X מספר האירועים שקרו בפרק זמן נתון בעל קצב אירועים בפרק זמן זה λ.
- פונקציית הסתברות: יהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.
- סימון: $X\sim\text{Poi}(\lambda)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}[X]=\lambda$.
- שונות: $\text{Var}(X)=\lambda$.

התפלגות אחידה בדידה: יהיו $a<b\in\mathbb{Z}$ אזי

- המשתנה המקרי: X בחירה אקראית של נקודה בקבוצה $\{a\ldots b\}$.
- פונקציית הסתברות: יהי $k\in\mathbb{R}$ אזי $\mathbb{P}(X=k)=\begin{cases}\frac{1}{b-a+1} & k\in[a,b]\cap\mathbb{Z}\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.
- סימון: $X\sim\text{Uni}(\{a\ldots b\})$.
- תוחלת: $\mathbb{E}[X]=\frac{a+b}{2}$.
- שונות: $\text{Var}(X)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

התפלגות אחידה רציפה: יהיו $a<b$ אזי

- המשתנה המקרי: X בחירה אקראית של נקודה בקטע (a,b).
- פונקציית התפלגות מצטברת: $F_X(t)=\begin{cases}0 & t\le a\\ \frac{t-a}{b-a} & t\in(a,b)\\ 1 & t\ge b\end{cases}$.
- פונקציית צפיפות: $f_X(t)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & t\in(a,b)\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.
- סימון: $X\sim\text{Uni}(a,b)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}[X]=\frac{a+b}{2}$.
- שונות: $\text{Var}(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$.

התפלגות מעריכית: יהי $\lambda>0$ אזי

- המשתנה המקרי: X משך חיים של תהליך הנמשך λ יחידות זמן בממוצע.
- פונקציית התפלגות מצטברת: $F_X(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$.
- פונקציית צפיפות: $f_X(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$.
- סימון: $X\sim\text{Exp}(\lambda)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}[X]=\frac{1}{\lambda}$.
- שונות: $\text{Var}(X)=\frac{1}{\lambda^2}$.

התפלגות גאמא: יהיו $n,\lambda>0$ אזי

- פונקציית התפלגות מצטברת: $F_X(t)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t} & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$.
- פונקציית צפיפות: $f_X(t)=\begin{cases}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t} & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$.
- סימון: $X\sim\text{Gamma}(n,\lambda)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}[X]=\frac{n}{\lambda}$.
- שונות: $\text{Var}(X)=\frac{n}{\lambda^2}$.

התפלגות נורמלית: יהי $\sigma\in\mathbb{R}_+$ ויהי $\mu\in\mathbb{R}$ אזי

- פונקציית התפלגות מצטברת: $F_X(t)=\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$.
- פונקציית צפיפות: $f_X(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$.
- סימון: $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}[X]=\mu$.
- שונות: $\text{Var}(X)=\sigma^2$.