**פונקציית הסתברות נקודתית:** $\mathbb{P}\in[0,1]^{\Omega}$ המקיימת $\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\omega)=1$.

**מרחב הסתברות** (מ"ה)**:** תהא $\Omega$ קבוצה ותהא $\mathbb{P}$ פונקציית הסתברות אזי $(\Omega,\mathbb{P})$.

**מרחב מדגם:** יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $\Omega$.

**מרחב הסתברות בדיד:** מרחב הסתברות $(\Omega,\mathbb{P})$ עבורו $|\Omega|\le\aleph_0$.

**מרחב הסתברות סופי:** מרחב הסתברות $(\Omega,\mathbb{P})$ עבורו $|\Omega|\in\mathbb{N}$.

**הערה:** בקורס זה כל מרחבי ההסתברות הינם בדידים.

**סימון:** $2^{A}=\mathcal{P}(A)$.

**מאורע:** תהא $A\subseteq\Omega$ אזי $\mathbb{P}(A)=\sum_{\omega\in A}\mathbb{P}(\omega)$.

**סימון:** $[n]=\{1,\ldots,n\}$.

**משפט:** יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ומאורעות $A,B$
- **משלים:** $\mathbb{P}\left(A^{C}\right)=1-\mathbb{P}(A)$.
- **אדטיביות:** $\mathbb{P}(A\uplus B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$.
- $\mathbb{P}(A\backslash B)=\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B\cap A)$.
- **מונוטוניות:** $(A\subseteq B)\Longrightarrow(\mathbb{P}(A)\le\mathbb{P}(B))$.
- **הכלה והדחה:** $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$.

**מסקנה:** תהא פונקציית הסתברות $\mathbb{P}$ אזי $\mathbb{P}(\varnothing)=0$.

**משפט סיגמא־אדטיביות:** יהיו $E=\biguplus_{i=1}^{\infty}E_i$ מאורעות אזי $\mathbb{P}(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(E_i)$.

**הכלה והדחה כללית:** יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{\varnothing\ne I\subseteq[n]}\left((-1)^{|I|+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\right)$.

**הכלה והדחה סימטרית:** נניח כי $\forall I\subseteq[n].(|I|=k)\Rightarrow(\mathbb{P}(A_I)=a_k)$ אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1}\binom{n}{k}a_k\right)$.

**מרחב הסתברות אחיד:** מרחב הסתברות סופי $(\Omega,\mathbb{P})$ עבורו $\forall A\in2^{\Omega}.\mathbb{P}(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$.

**תמורה מקרית/סידור אקראי:** המרחב האחיד על $S_n$.

**משפט חסם האיחוד:** יהיו $A,B$ מאורעות אזי $\mathbb{P}(A\cup B)\le\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$.

**מסקנה:** יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)$.

**מסקנה:** יהיו $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)$.

**אי שוויונות בונפרוני:** יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות ויהי $1\le k\le n$
- $k\in\mathbb{N}_{odd}$ אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\sum_{\substack{I\subseteq[n]\\|I|=k}}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)$.
- $k\in\mathbb{N}_{even}$ אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\ge\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\sum_{\substack{I\subseteq[n]\\|I|=k}}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)$.

**משפט רציפות פונקציית ההסתברות:** יהיו $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ מאורעות
- $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)$.
- $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)$.

**פונקציית גיבוב/hash:** $h\in[m]^{[n]}$.

**התנגשות:** תהא $h$ פונקציית גיבוב אזי $i\ne j$ עבורם $h(i)=h(j)$.

**פרדוקס יום ההולדת:** תהא $h\in[m]^{[n]}$ פונקציית גיבוב אזי $\frac{n(n-1)}{2m}\ge\mathbb{P}(\text{התנגשות})\ge1-e^{-\frac{n(n-1)}{2m}}$.

**מספר רמזי:** נגדיר $R:\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כך $R(t)=\min\{n\mid$ בכל צביעה של $K_n$ בשני צבעים יש $K_t$ מונוכרומטית$\}$.

**משפט:** $2^{\frac{t-3}{2}}<R(t)\le c\cdot\frac{4^{t}}{\sqrt{t}}$.

**פונקציית הסתברות מותנית:** יהי $F$ מאורע המקיים $\mathbb{P}(F)>0$ אזי $\mathbb{P}(\omega\mid F)=\begin{cases}\frac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}(F)}&\omega\in F\\0&\text{else}\end{cases}$.

**טענה:** פונקציית הסתברות מותנית הינה פונקציית הסתברות.

**מרחב הסתברות מותנה:** יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $F\in2^{\Omega}$ אזי $(\Omega,\mathbb{P}(\cdot\mid F))$.

**טענה:** מרחב הסתברות מותנית הוא מרחב הסתברות.

**משפט:** יהיו $E,F$ מאורעות אזי $\mathbb{P}(E\mid F)=\frac{\mathbb{P}(E\cap F)}{\mathbb{P}(F)}$.

**כלל השרשרת:** יהיו $A,B$ מאורעות אזי $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A\mid B)\mathbb{P}(B)$.

**כלל השרשרת:** יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^{n}\mathbb{P}\left(A_i\mid\bigcap_{j=1}^{i-1}A_j\right)$.

**נוסחת ההסתברות השלמה:** יהיו $A,B$ מאורעות אזי $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\mid B)\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}\left(A\mid B^{C}\right)\mathbb{P}\left(B^{C}\right)$.

**הכללה:** יהיו $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ המקיימות $\biguplus_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$ אזי $\mathbb{P}(B)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(B\mid A_i)\mathbb{P}(A_i)$.

**כלל בייס:** יהיו $E,F$ מאורעות אזי $\mathbb{P}(E\mid F)=\frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F\mid E)}{\mathbb{P}(F)}$.

**טענה:** יהיו $A,B$ מאורעות עבורם $\mathbb{P}(A),\mathbb{P}(B)>0$ אזי $\mathbb{P}((\cdot\mid B)\mid C)=\mathbb{P}(\cdot\mid B\cap C)\mathbb{P}(C\mid B)$.

**מאורע מחזק:** יהי $B$ מאורע אזי מאורע $A$ עבורו $\mathbb{P}(A)>0$ המקיים $\mathbb{P}(B\mid A)>\mathbb{P}(B)$.

**מאורעות בלתי תלויים (ב"ת):** מאורעות $A,B$ המקיימים $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

**סימון:** $AB=A\cap B$.

**טענה:** יהי $A$ מאורע אזי ($A$ ב"ת עם עצמו)$\Longleftrightarrow(\mathbb{P}(A)\in\{0,1\})$.

**טענה:** יהיו $A,B$ מאורעות זרים וב"ת אזי $(\mathbb{P}(A)=0)\vee(\mathbb{P}(B)=0)$.

**טענה:** יהיו $A,B$ מאורעות התב"ש
- $A,B$ בלתי תלויים.
- $A^{C},B$ בלתי תלויים.
- $A^{C},B^{C}$ בלתי תלויים.
- $A,B^{C}$ בלתי תלויים.

**אי תלות בזוגות:** מאורעות $A_1\ldots A_n$ המקיימים $\forall i\ne j.\mathbb{P}(A_iA_j)=\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.

**אי תלות בזוגות:** מאורעות $\{A_i\}_{i\in I}$ המקיימים $\forall i\ne j.\mathbb{P}(A_iA_j)=\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.

**מאורעות בלתי תלויים (ב"ת):** מאורעות $A_1\ldots A_n$ המקיימים $\forall I\subseteq[n].\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)$.

**הכללה:** מאורעות $\{A_i\}_{i\in I}$ המקיימים $\forall J\subseteq I.(|J|\in\mathbb{N}_+)\Longrightarrow\left(\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)\right)$.

**הערה:** נסמן זמנית $(A^{1}=A)\wedge\left(A^{-1}=A^{C}\right)$.

**טענה:** ($A_1\ldots A_n$ בלתי תלויים)$\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon\in\{\pm1\}^{n}.\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i^{\varepsilon_i}\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(A_i^{\varepsilon_i}\right)\right)$.

**מסקנה:** יהיו $A_1\ldots A_n,B_1$ מאורעות ב"ת אזי כל איחוד/חיתוך/משלים של $A_1\ldots A_n$ ב"ת עם $B_1$.

**פונקציית הסתברות מכפלה:** יהיו $(\Omega_1,\mathbb{P}_1),(\Omega_2,\mathbb{P}_2)$ מ"ה אזי $\mathbb{P}_{\Omega_1\times\Omega_2}((\omega_1,\omega_2))=\mathbb{P}_1(\omega_1)\mathbb{P}_2(\omega_2)$.

**טענה:** פונקציית הסתברות מכפלה היא פונקציית הסתברות.

**מרחב מכפלה:** יהיו $(\Omega_1,\mathbb{P}_1),(\Omega_2,\mathbb{P}_2)$ מ"ה אזי $(\Omega_1,\mathbb{P}_1)\otimes(\Omega_2,\mathbb{P}_2)=\left(\Omega_1\times\Omega_2,\mathbb{P}_{\Omega_1\times\Omega_2}\right)$.

**טענה:** מרחב מכפלה הוא מרחב הסתברות.

**טענה:** יהיו $(\Omega_1,\mathbb{P}_1)\ldots(\Omega_n,\mathbb{P}_n)$ מ"ה אזי $\bigotimes_{i=1}^{n}(\Omega_i,\mathbb{P}_i)$ מרחב הסתברות.

**מלבן:** מאורע $C\subseteq\Omega_1\times\Omega_2$ המקיים $\exists A\subseteq\Omega_1.\exists B\subseteq\Omega_2.C=A\times B$.

**טענה:** יהי $A\times B\subseteq\Omega_1\times\Omega_2$ מלבן אזי $\mathbb{P}(A\times B)=\mathbb{P}_1(A)\mathbb{P}_2(B)$.

**סימון:** יהי $\bigotimes_{i=1}^{n}(\Omega_i,\mathbb{P}_i)$ מ"ה ויהי $A\subseteq\Omega_i$ אזי $\overline{A}=\Omega_1\times\ldots\times\Omega_{i-1}\times A\times\Omega_{i+1}\times\ldots\times\Omega_n$.

**מסקנה:** יהי $A\subseteq\Omega_i$ ויהי $B\subseteq\Omega_j$ אזי $\overline{A},\overline{B}$ ב"ת מעל $\bigotimes_{i=1}^{n}(\Omega_i,\mathbb{P}_i)$.

**טענה:** יהי $A\subseteq\Omega_i$ אזי $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)=\mathbb{P}_i(A)$.

**מסקנה:** $\mathbb{P}((\omega_1\ldots\omega_n))=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}_i(\omega_i)$.

**משפט:** יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות עבורם $\forall i\in[n].A_i\subseteq\Omega_i$ אזי $\overline{A_1}\ldots\overline{A_n}$ ב"ת.

**מאורעות בלתי תלויים בהתנייה:** יהי $\mathbb{P}(C)>0$ אזי מאורעות $A,B$ עבורם $\mathbb{P}(A\cap B\mid C)=\mathbb{P}(A\mid C)\mathbb{P}(B\mid C)$.

$n$ **ניסויי ברנולי:** יהי $0\le p\le1$ נגדיר $f\in[0,1]^{\{0,1\}}$ כך $f(k)=\begin{cases}p&k=1\\1-p&k=0\end{cases}$ אזי $\bigotimes_{i=1}^{n}(\{0,1\},f)$.

**טענה:** נסמן $M_n=$ "הרצף הארוך ביותר של 1 ב־$n$ ניסויי ברנולי" אזי $\left(M_n-\log_{\frac{1}{p}}(n)\right)\to0$.

**מטריצת שכנויות:** יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון אזי $A\in M_{|V|}(\{0,1\})$ המקיים $A_{i,j}=\begin{cases}1&\{i,j\}\in E\\0&\text{else}\end{cases}$.

**גרפים על $n$ קודקודים:** יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left\{(A_{i,j})_{1\le i<j\le n}\mid A_{i,j}\in\{0,1\}\right\}$.

**הימצאות קשת בהתסברות $p$:** יהי $p\in[0,1]$ אזי $\mathbb{P}(\{\omega\in\text{גרפים על } n \text{ קודקודים}\mid\omega_{i,j}=1\})=p$.

**גרף מקרי:** יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $p\in[0,1]$ אזי $G(n,p)=(\text{הימצאות קשת בהתסברות } p,\text{גרפים על } n \text{ קודקודים})$.

**טענה:** יהי $\omega\in G(n,p)$ אזי $\mathbb{P}(\omega)=p^{|E_\omega|}\cdot(1-p)^{\binom{n}{2}-|E_\omega|}$.

**מסקנה:** גרף מקרי הינו מרחב הסתברות.

**משתנה מקרי (מ"מ):** יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מ"ה בדיד אזי $f\in\Omega\to S$.

**סימון:** יהי $X$ מ"מ אזי $\mathbb{P}(X=s)=\mathbb{P}\left(X^{-1}(\{s\})\right)$.

**אינדיקטור:** יהי $A\subseteq\Omega$ מאורע אזי $\mathbb{1}_A\in\{0,1\}^{\Omega}$ המוגדר $\mathbb{1}_A(\omega)=\begin{cases}1&\omega\in A\\0&else\end{cases}$.

**טענה:** $(\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B=\mathbb{1}_{A\cap B})\wedge(\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B=\mathbb{1}_{A\uplus B})$.

**תומך:** תהא $f:S\to\mathbb{R}$ אזי $\text{supp}(f)=\{s\in S\mid f(s)\ne0\}$.

**התפלגות בדידה:** $\mu:S\to[0,1]$ המקיימת $\left(\sum_{s\in\text{supp}(\mu)}\mu(s)=1\right)\wedge(|\text{supp}(\mu)|\le\aleph_0)$.

**התפלגות של משתנה מקרי:** יהי $X$ מ"מ אזי $\mu:\text{Im}(X)\to[0,1]$ המוגדרת $\mu_X(s)=\mathbb{P}(X=s)$.

**טענה:** ההתפלגות של משתנה מקרית היא התפלגות בדידה.

**סימון:** יהי $X$ מ"מ אזי $\text{supp}(X)=\text{supp}(\mu_X)$.

**משתנים מקריים שווים:** $X,Y\in S^{\Omega}$ המקיימים $\forall\omega\in\Omega.X(\omega)=Y(\omega)$.

**משתנים מקריים שווי התפלגות:** $X,Y$ מ"מ עם אותה תמונה המקיימים $\forall s\in S.\mu_X(s)=\mu_Y(s)$.

**סימון:** יהיו $X,Y$ מ"מ שווי התפלגות אזי $X\sim Y$.

**התפלגות אחידה בדידה:** יהיו $a,b\in\mathbb{Z}$ אזי $\mu\in[0,1]^{\mathbb{R}}$ המקיימת $\mu(k)=\begin{cases}\frac{1}{b-a+1}&k\in[a,b]\cap\mathbb{Z}\\0&else\end{cases}$.

**סימון:** יהי $X$ מ"מ עבורו $\mu_X$ מתפלג אחיד בדיד אזי $X\sim\text{Uni}(a,b)$.

**סימון:** תהא $\mu$ התפלגות אזי $\left(\mu(k)=\begin{cases}p_i&k=x_i\\0&else\end{cases}\right)\equiv\left(\mu=\begin{cases}x_1&p_1\\\vdots&\vdots\\x_n&p_n\end{cases}\right)$.

**התפלגות ברנולי:** יהי $p\in[0,1]$ אזי $\mu\in[0,1]^{\{0,1\}}$ המקיימת $\mu=\begin{cases}1&p\\0&1-p\end{cases}$.

**סימון:** יהי $X$ מ"מ עבורו $\mu_X$ מתפלג ברנולי אזי $X\sim\text{Ber}(p)$.

**התפלגות גאומטרית:** יהי $p\in[0,1]$ אזי $\mu\in[0,1]^{\mathbb{N}_+}$ המקיימת $\mu(k)=(1-p)^{k-1}p$.

**סימון:** יהי $X$ מ"מ עבורו $\mu_X$ מתפלג גאומטרית אזי $X\sim\text{Geo}(p)$.

**התפלגות בינומית:** יהי $p\in[0,1]$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\mu\in[0,1]^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\mu(k)=\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}$.

**סימון:** יהי $X$ מ"מ עבורו $\mu_X$ מתפלג בינומית אזי $X\sim\text{Bin}(n,p)$.

**התפלגות פואסון:** יהי $\lambda>0$ אזי $\mu\in[0,1]^{\mathbb{N}}$ המקיים $\mu(k)=\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda}$.

**סימון:** יהי $X$ מ"מ עבורו $\mu_X$ מתפלג פואסונית אזי $X\sim\text{Pois}(\lambda)$.

**משפט קירוב בינום־פואסון:** יהי $k\in\mathbb{N}$ ויהי $\lambda>0$ אזי $\lim_{n\to\infty}\mu_{\text{Bin}\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)}(k)=\mu_{\text{Pois}(\lambda)}(k)$.

**התפלגות היפרגאומטרית:** יהיו $r,n,m\in\mathbb{N}$ אזי $\mu\in[0,1]^{\mathbb{N}}$ המקיים $\mu(k)=\frac{\binom{r}{k}\binom{m-r}{n-k}}{\binom{m}{n}}$.

**סימון:** יהי $X$ מ"מ עבורו $\mu_X$ מתפלג היפרגאומטרית אזי $X\sim\text{HG}(n,m,r)$.

**התפלגות בינומית שלילית:** יהי $r\in\mathbb{N}$ וכן $p\in[0,1]$ אזי $\mu\in[0,1]^{\mathbb{N}}$ המקיים $\mu(k)=\binom{k-1}{r-1}p^{r}(1-p)^{k-r}$.

**סימון:** יהי $X$ מ"מ עבורו $\mu_X$ מתפלג בינומית שלילית אזי $X\sim\text{NB}(r,p)$.

**התפלגות היפרגאומטרית שלילית:** יהיו $r,k,m\in\mathbb{N}$ אזי $\mu\in[0,1]^{\mathbb{N}}$ המקיים $\mu(x)=\frac{\binom{x-1}{k-1}\binom{m-x}{r-k}}{\binom{m}{r}}$.

**סימון:** יהי $X$ מ"מ עבורו $\mu_X$ מתפלג היפרגאומטרית שלילית אזי $X\sim\text{NHG}(r,k,m)$.

**טרנספורמציה של משתנה מקרי:** תהא $X\in A^{\Omega}$ ותהא $f\in B^{A}$ אזי $f(X)=f\circ X$.

**משפט:** יהי $X$ מ"מ ויהי $f\in B^{A}$ אזי $\mu_{f(X)}(k)=\sum_{r\in f^{-1}(\{k\})}\mu_X(r)$.

**מסקנה:** יהי $X$ מ"מ ויהי $f\in B^{A}$ אזי $\text{supp}(f(X))=f(\text{supp}(X))$.

**זוג משתנים מקריים:** יהיו $X:\Omega\to A$ וכן $Y:\Omega\to B$ משתנים מקריים אזי $(X,Y)$.

**התפלגות משותפת:** יהי $(X,Y)$ זוג מ"מ אזי $\mu_{X,Y}(x,y)=\mathbb{P}(X=x,Y=y)$.

**הכללה:** יהיו $X_1\ldots X_n$ מ"מ אזי $\mu_{X_1\ldots X_n}(x_1\ldots x_n)=\mathbb{P}(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)$.

**התפלגויות שוליות:** יהי $(X,Y)$ זוג מ"מ אזי $\mu_X,\mu_Y$.

**טענה:** $\mu_X(x)=\sum_{y\in S}\mu_{X,Y}(x,y)$.

**משתנים מקריים בלתי תלויים:** $(X,Y)$ זוג מ"מ עבורו $\mu_{X,Y}=\mu_X\mu_Y$.

**הכללה:** $X_1\ldots X_n$ מ"מ המקיימים $\mu_{X_1\ldots X_n}=\mu_{X_1}\cdot\ldots\cdot\mu_{X_n}$.

**משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות:** $X_1\ldots X_n$ מ"מ המקיימים $X_i,X_j$ ב"ת לכל $i\ne j$.

**משפט:** יהיו $X_1\ldots X_n$ מ"מ ב"ת ויהיו $E_1\ldots E_n$ קבוצות אזי $\{X_i\in E_i\}$ מאורעות ב"ת.

**משפט:** יהיו $X,Y$ מ"מ ב"ת ויהיו $f,g$ טרנספורמציות של מ"מ אזי $f(X),g(Y)$ ב"ת.

**משפט:** ($A_1\ldots A_n$ מאורעות ב"ת)$\Longleftrightarrow$($\mathbb{1}_{A_1}\ldots\mathbb{1}_{A_n}$ מ"מ ב"ת).

**טענה:** יהיו $\mu_1,\mu_2$ התפלגויות אזי קיים מ״ה $(\Omega,\mathbb{P})$ עבורו קיימים $X,Y$ מ״מ ב״ת המקיימים $(\mu_X=\mu_1)\wedge(\mu_Y=\mu_2)$.

**קונבולוציה:** יהיו $\mu_1,\mu_2$ התפלגויות אזי $(\mu_1*\mu_2)(z)=\sum_x \mu_1(x)\mu_2(z-x)$.

**טענה:** יהיו $\mu_1,\mu_2$ התפלגויות אזי $\mu_1*\mu_2=\mu_2*\mu_1$.

**משפט:** יהיו $X,Y$ מ״מ ב״ת אזי $\mu_{X+Y}=\mu_X*\mu_Y$.

**טענה:** $\text{Bin}(n,p)+\text{Bin}(m,p)\sim\text{Bin}(n+m,p)$.

**מסקנה:** $\text{Bin}(n,p)\sim\sum_{i=1}^n\text{Ber}(p)$.

**טענה:** $\text{Pois}(\lambda_1)+\text{Pois}(\lambda_2)\sim\text{Pois}(\lambda_1+\lambda_2)$.

**טענה:** $\text{NB}(n,p)\sim\sum_{i=1}^n\text{Geo}(p)$.

**משתנה מקרי מותנה:** יהי $A$ מאורע ויהי $X$ מ״מ אזי $X_{\restriction A}$.

**התפלגות מותנית:** יהי $A$ מאורע ויהי $X$ מ״מ אזי $\mu_{X_{\restriction A}}$.

**טענה:** יהיו $X,Y$ מ״מ אזי $\mu_{X_{\restriction Y=y}}(x)=\frac{\mu_{X,Y}(x,y)}{\mu_Y(y)}$.

**סימון:** יהיו $X,Y$ מ״מ אזי $\mu_{X_{\restriction Y}}(x\mid y)=\mu_{X_{\restriction Y=y}}(x)$.

**התפלגות מולטינומית:** יהיו $p_1\ldots p_n$ אזי $\mu\in[0,1]^{\mathbb{N}^n}$ המקיים $\mu(k_1\ldots k_n)=\binom{n}{k_1\ldots k_n}\prod_{i=1}^n p_i^{k_i}$.

**התפלגות מצטברת:** יהי $X$ מ״מ אזי $F_X:[0,1]^{\mathbb{R}}$ כך $F_X(x)=\mathbb{P}(X\le x)$.

**טענה:** יהי $X$ מ״מ
- $F_X$ מונוטונית עולה.
- $\lim_{t\to\infty}F_X(t)=1$.
- $\lim_{t\to-\infty}F_X(t)=0$.
- יהי $s\in\text{supp}(X)$ אזי $\mu_X(s)=F_X(s)-\lim_{\varepsilon\to0^+}F_X(s-\varepsilon)$.

**פונקציית השרידות:** יהי $X$ מ״מ אזי $\lambda_X(t)=1-F_X(t)$.

**מסקנה:** $\text{Geo}\left(1-\prod_{i=1}^n(1-p_i)\right)\sim\min_{i=1}^n\{\text{Geo}(p_i)\}$.

**פיצול פואסון:** יהיו $X,Y$ מ״מ עבורם $X+Y\sim\text{Poiss}(\lambda)$ וכן $X_{\restriction X+Y=n}\sim\text{Bin}(n,p)$
- $Y_{\restriction X+Y=n}\sim\text{Bin}(n,1-p)$.
- $X\sim\text{Poiss}(p\lambda)$.
- $Y\sim\text{Poiss}((1-p)\lambda)$.
- $X,Y$ ב״ת.

**צימוד בין התפלגויות:** יהיו $\mu_1,\mu_2:[0,1]^S$ התפלגויות אזי התפלגות $\mu:[0,1]^{S^2}$ המקיימת $\mu_1(\omega)=\sum_{s\in S}\mu(\omega,s)$ וכן $\mu_2(\omega)=\sum_{s\in S}\mu(s,\omega)$.

**צימוד בין משתנים:** יהיו $X,Y$ מ״מ אזי זוג מ״מ $(X',Y')$ המקיים $(X'\sim X)\wedge(Y'\sim Y)$.

**טענה:** יהי $X$ מ״מ על $\Omega_1$ ויהי $Y$ מ״מ על $\Omega_2$ נגדיר $X',Y'$ מ״מ ב״ת על $\Omega_1\otimes\Omega_2$ כך $X'(\omega_1,\omega_2)=X(\omega_1)$ וכן $Y'(\omega_1,\omega_2)=Y(\omega_2)$ אזי $(X',Y')$ צימוד של $X,Y$.

**התפלגות שולטת סטוכסטית:** יהי $X$ מ״מ אזי מ״מ $Y$ המקיים $\mathbb{P}(X>t)\ge\mathbb{P}(Y>t)$.

**צימוד מונוטוני:** יהיו $X,Y$ מ״מ אזי צימוד $(X',Y')$ המקיים $\mathbb{P}(Y'>X')=0$.

**טענה:** יהי $X$ מ״מ בעל התפלגות שולטת סטוכסטית בהתפלגות $Y$ אזי קיים צימוד מונוטוני.

**מטריקת ההשתנות הכוללת:** תהא $|S|\le\aleph_0$ ויהיו $\mu,\upsilon:[0,1]^S$ התפלגויות אזי $\delta(\mu,\upsilon)=\sum_{x\in S}|\mu(x)-\upsilon(x)|$.

**למה:** מטריקת ההשתנות הכוללת הינה מטריקה.

**סימון:** יהיו $X,Y$ מ״מ אזי $\delta(X,Y)=\delta(\mu_X,\mu_Y)$.

**טענה:** יהיו $X,Y$ מ״מ אזי $\delta(X,Y)=2\sup_{E\subseteq S}|\mathbb{P}(X\in E)-\mathbb{P}(Y\in E)|$.

**טענה:** יהיו $X,Y$ מ״מ ויהי $(X',Y')$ צימוד אזי $\delta(X,Y)=\delta(X',Y')\le2\mathbb{P}(X'\ne Y')$.

**מסקנה:** יהיו $X_1\ldots X_{2n}$ מ״מ אזי $\delta\left(\sum_{i=1}^nX_i,\sum_{i=n+1}^{2n}X_i\right)\le2\sum_{i=1}^n\mathbb{P}(X_i\ne Y_i)$.

**חוק המספרים הקטנים:** יהיו $\{X_i\sim\text{Ber}(p_i)\}_{i=1}^n$ מ״מ ויהי $T\sim\text{Pois}\left(\sum_{i=1}^np_i\right)$ אזי $\delta\left(\sum_{i=1}^nX_i,T\right)\le2\sum_{i=1}^np_i^2$.

**חציון של משתנה מקרי:** יהי $X$ מ״מ אזי $m\in\text{supp}(X)$ המקיים $\left(\mathbb{P}(X\ge m)\ge\frac12\right)\wedge\left(\mathbb{P}(X\le m)\ge\frac12\right)$.

**משתנה בעל תוחלת:** $X$ מ״מ עבורו $\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\mathbb{P}(\omega)$ מתכנס בהחלט.

**טענה:** יהי $X$ משתנה על מ״ה סופי אזי $X$ בעל תוחלת.

**תוחלת:** יהי $X$ מ״מ בעל תוחלת אזי $\mathbb{E}[X]=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\mathbb{P}(\omega)$.

**למה:** יהיו $X,Y$ מ״מ ויהי $c\in\mathbb{R}$
- הומוגניות: $\mathbb{E}[cX]=c\mathbb{E}[X]$.
- חיבוריות: $\mathbb{E}[X+Y]=\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]$.
- מונוטוניות: $(X\le Y)\Longrightarrow(\mathbb{E}[X]\le\mathbb{E}[Y])$.

**מסקנה:** יהיו $X_1\ldots X_n$ מ״מ אזי $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^nX_i\right]=\sum_{i=1}^n\mathbb{E}[X_i]$.

**משפט:** יהי $X$ מ״מ אזי $\mathbb{E}[X]=\sum_{s\in\text{supp}(X)}s\cdot\mu_X(s)$.

**טענה:** יהי $X$ מ״מ
- $\left(\mathbb{E}[X]=\frac n2\right)\Longrightarrow(X\sim\text{Uni}(0,\ldots,n))$.
- $(\mathbb{E}[X]=p)\Longrightarrow(X\sim\text{Ber}(p))$.
- $(\mathbb{E}[X]=np)\Longrightarrow(X\sim\text{Bin}(n,p))$.
- $\left(\mathbb{E}[X]=\frac1p\right)\Longrightarrow(X\sim\text{Geo}(p))$.
- $\left(\mathbb{E}[X]=\frac{nr}{m}\right)\Longrightarrow(X\sim\text{HG}(n,m,r))$.
- $(\mathbb{E}[X]=\lambda)\Longrightarrow(X\sim\text{Pois}(\lambda))$.

**משפט:** יהי $X$ מ״מ ותהא $f$ טרנספורמציה אזי $\mathbb{E}[f(X)]=\sum_{s\in\text{supp}(X)}f(s)\mu_X(s)$.

**נוסחאת הזנב:** יהי $X$ מ״מ עבורו $\text{supp}(X)=\mathbb{N}$ אזי $\mathbb{E}[X]=\sum_{n=0}^\infty\mathbb{P}(X\ge n)$.

**משפט:** יהיו $X,Y$ מ״מ ב״ת אזי $\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

**תוחלת מותנית:** יהי $X$ מ״מ ויהי $A$ מאורע אזי $\mathbb{E}[X\mid A]=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\mathbb{P}(\omega\mid A)$.

**טענה:** יהי $X$ מ״מ ויהי $A$ מאורע אזי $\mathbb{E}[X\mid A]=\frac{\mathbb{E}[X\cdot\mathbb{1}_A]}{\mathbb{P}(A)}$.

**מסקנה:** יהיו $X,\mathbb{1}_A$ מ״מ ב״ת אזי $\mathbb{E}[X\mid A]=\mathbb{E}[X]$.

**נוסחאת התוחלת השלמה:** יהי $X$ מ״מ ויהי $A$ מאורע אזי $\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[X\mid A]\mathbb{P}(A)+\mathbb{E}\left[X\mid A^{\mathcal{C}}\right]\mathbb{P}\left(A^{\mathcal{C}}\right)$.

**הכללה:** יהיו $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ המקיימות $\biguplus_{i=1}^\infty A_i=\Omega$ ויהי $X$ מ״מ אזי $\mathbb{E}[X]=\sum_{i=1}^\infty\mathbb{E}[X\mid A_i]\mathbb{P}(A_i)$.

**תוחלת של משתנה מותנה במשתנה:** יהיו $X,Y$ מ״מ אזי $\mathbb{E}[X\mid Y](\omega)=\mathbb{E}[X\mid Y=Y(\omega)]$.

**משפט/נוסחאת ההחלקה:** יהיו $X,Y$ מ״מ אזי $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X\mid Y]]=\mathbb{E}[X]$.

**טענה:** יהיו $X,Y$ מ״מ ותהא $g$ טרנספורמציה אזי $\mathbb{E}[X\cdot g(Y)\mid Y]=g(Y)\cdot\mathbb{E}[X\mid Y]$.

**משתנה בעל מומנט** $k$: מ״מ $X$ המקיים $\mathbb{E}\left[|X|^k\right]<\infty$.

**סימון:** יהי $X$ משתנה בעל מומנט $k$ אזי $X\in\ell^k$.

**מומנט** $k$: יהי $X\in\ell^k$ אזי $\mathbb{E}\left[X^k\right]$.

**טענה:** יהיו $m<k\in\mathbb{N}$ אזי $\ell^k\subseteq\ell^m$.

**אי שיוויון קושי שוורץ:** יהיו $X,Y\in\ell^2$ אזי $|\mathbb{E}[XY]|\le\sqrt{\mathbb{E}[X^2]}\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}$.

**מסקנה:** יהי $X\in\ell^2$ אזי $\mathbb{E}[X]^2\le\mathbb{E}\left[X^2\right]$.

**שונות:** יהי $X\in\ell^2$ אזי $\text{Var}[X]=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right]$.

**טענה:** יהי $X\in\ell^2$ אזי $\text{Var}[X]=\mathbb{E}\left[X^2\right]-\mathbb{E}[X]^2$.

**סטיית תקן:** יהי $X\in\ell^2$ אזי $\sigma_X=\sqrt{\text{Var}[X]}$.

**משתנה דטרמיניסטי:** מ״מ $X$ המקיים $\exists c.\mathbb{P}(X=c)=1$.

**למה:** יהי $X\in\ell^2$ ויהי $a$ סקלר
- $\text{Var}[X]\ge0$.
- ($X$ דטרמיניסטי)$\Longleftrightarrow(\text{Var}[X]=0)$.
- $\text{Var}[aX]=a^2\text{Var}[X]$.
- $\text{Var}[X+a]=\text{Var}[X]$

**פונקציית הפסד:** יהי $X\in\ell^2$ אזי $\mathbb{E}\left[(X-a)^2\right]$.

**משפט:** יהי $X\in\ell^2$ אזי המינימום של פונקציית ההפסד מתקבלת בערך $\mathbb{E}[X]$.

**חציון:** יהי $X$ מ״מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה $\mathbb{E}[|X-a|]$.

**סימון:** יהי $X$ מ״מ אזי החציון הוא $\text{Median}(X)$.

**ערך אמצעי/Range Mid:** יהי $X$ מ״מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה $\max|X-a|$.

**סימון:** יהי $X$ מ״מ אזי הערך האמצעי הוא $\text{MR}(X)$.

**שכיח:** יהי $X$ מ״מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה $\mathbb{P}(X\ne a)$.

**סימון:** יהי $X$ מ״מ אזי השכיח הוא $\text{Mode}(X)$.

**שונות משותפת:** יהיו $X,Y$ מ״מ אזי $\text{Cov}[X,Y]=\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

**משפט:** $\text{Var}[X+Y]=\text{Var}[X]+2\text{Cov}[X,Y]+\text{Var}[Y]$.

**טענה:** $\text{Cov}[X,Y]=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$.

**משתנים בלתי מתואמים:** $X,Y$ המקיימים $\text{Cov}[X,Y]=0$.

**משפט:** יהיו $X,Y$ ב״ת אזי $X,Y$ בלתי מתואמים.

**מסקנה:** יהיו $X,Y$ בלתי מתואמים אזי $\text{Var}[X+Y]=\text{Var}[X]+\text{Var}[Y]$.

**למה:** יהיו $X,Y,Z$ מ״מ ויהיו $\alpha,\beta$ סקלרים
- $\text{Cov}[X,X]=\text{Var}[X]$.
- סימטריות: $\text{Cov}[X,Y]=\text{Cov}[Y,X]$.
- בי־לינאריות: $\text{Cov}[\alpha X+\beta Y,Z]=\alpha\text{Cov}[X,Z]+\beta\text{Cov}[Y,Z]$.
- אינווריאנטיות להוספת סקלר: $\text{Cov}[X+\alpha,Y]=\text{Cov}[X,Y]$.
- $|\text{Cov}[X,Y]|\le\sqrt{\text{Var}[X]}\sqrt{\text{Var}[Y]}$.

**מקדם המתאם:** יהיו $X,Y$ מ״מ אזי $\rho_{X,Y}=\frac{\text{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\text{Var}[X]}\sqrt{\text{Var}[Y]}}$.

**למה:** יהיו $X,Y$ מ״מ ויהיו $a,b$ סקלרים
- $|\rho_{X,Y}|\le1$.
- ($X,Y$ בלתי מתואמים)$\Longleftrightarrow(\rho_{X,Y}=0)$.
- $(Y=aX+b)\Longleftrightarrow(\rho_{X,Y}=\pm1)$.

**למה:** יהי $X$ מ״מ
- $X\sim\text{Uni}([n])$ אזי $\text{Var}[X]=\frac{n^2-1}{12}$.
- $X\sim\text{Bin}(n,p)$ אזי $\text{Var}(X)=np(1-p)$.
- $X\sim\text{Pois}(\lambda)$ אזי $\text{Var}(X)=\lambda$.
- $X\sim\text{Geo}(p)$ אזי $\text{Var}(X)=\frac{1-p}{p^2}$.

**פונקציה יוצרת:** יהי $X$ מ״מ עבורו $\text{supp}(X)=\mathbb{N}$ אזי $g_X(t)=\sum_{n=0}^\infty\mu_X(n)t^n$.

**טענה:** יהי $X$ מ״מ בעל פונקציה יוצרת
- $g_X(t)$ מתכנס עבור $|t|\le1$.
- $g_X\in C^\infty((-1,1))$.
- יהי $t\in[-1,1]$ אזי $t^X$ מ״מ בעל תוחלת.

**משפט:** יהי $X$ מ״מ בעל פונקציה יוצרת אזי $g_X(t)=\mathbb{E}\left[t^X\right]$.

**למה:** יהיו $X,Y$ מ״מ ב״ת בעלי פונקציה יוצרת
- $\mu_X(n)=\frac{g_X^{(n)}(0)}{n!}$.
- $g_{X+Y}=g_X\cdot g_Y$.
- $\lim_{t\to1^-}g_X(t)=g_X(1)=1$.
- נניח כי $X$ בעל מומנט $k$ אזי $\lim_{t\to1^-}g_X^{(k)}(t)=\mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)\right]$.

**מסקנה:** יהי $X\in\ell^2$ בעל פונקציה יוצרת
- $\mathbb{E}[X]=\lim_{t\to1^-}g'_X(t)$.
- $\text{Var}[X]=\lim_{t\to1^-}\left(g''_X(t)+g'_X(t)-\left(g'_X(t)\right)^2\right)$.

**פונקציה יוצרת מומנטים:** יהי $X$ מ״מ אזי $M_X(t)=\mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$.

**טענה:** יהי $X\sim\text{Bin}(n,p)$ אזי $M_X(t)=\left(1-p+pe^t\right)^n$.

**למה:** יהיו $X,Y$ מ״מ ב״ת
- $M_{X+Y}=M_X\cdot M_Y$.
- יהי $I$ קטע עבורו $0\in I$ וכן $M_X\in C^n(I)$ אזי $M_X^{(n)}(0)=\mathbb{E}[X^n]$.

**מסקנה:** יהי $I$ קטע עבורו $0\in I$ וכן $M_X\in C^\infty(I)$ אזי $M_X(t)=\sum_{n=0}^\infty\frac{\mathbb{E}[X^n]}{n!}t^n$.

**אי־שוויון מרקוב:** יהי $X$ מ״מ אי שלילי ויהי $a>0$ אזי $\mathbb{P}(X\ge a)\le\frac{\mathbb{E}[X]}{a}$.

**מסקנה:** תהא $f\in[0,\infty)^{\mathbb{R}}$ עולה ויהי $X$ מ״מ עבורו $f(X)$ בעל תוחלת אזי $\mathbb{P}(X\ge t)\le\frac{\mathbb{E}[f(X)]}{f(t)}$.

**אי־שוויון צ׳בישב:** יהי $X\in\ell^2$ ויהי $b>0$ אזי $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}[X]|\ge b)\le\frac{\text{Var}[X]}{b^2}$.

**סימון:** יהיו $X_1\ldots X_n$ מ״מ אזי $\mu=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^nX_i\right]$.

**טענה:** יהיו $X_1\sim\ldots\sim X_n$ מ״מ בלתי מתואמים בזוגות עם תוחלת משותפת $\mu$ אזי $\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^nX_i-n\mu\right|\ge b\right)\le\frac{n\sigma_1^2}{b^2}$.

**אי־שוויון צ׳רנוף:** יהיו $\{X_i\sim\text{Ber}(p_i)\}_{i=1}^n$ אזי $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^nX_i\ge(1+t)\mu\right)\le\exp\left(-\frac{t^2}{2+t}\mu\right)$.

**הכללה:** יהי $X$ מ״מ ויהי $s\in\mathbb{R}$ אזי $\mathbb{P}(X\ge a)\le\frac{M_X(s)}{e^{sa}}$.

**פונקציה קמורה:** יהי $I$ קטע אזי $\varphi\in\mathbb{R}^I$ עבורה $\forall x,y\in I.\forall\lambda\in[0,1].\varphi(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)$.

**טענה:** תהא $\varphi\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קמורה ויהיו $x<y<z$ אזי $\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}\le\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}$.

**מסקנה:** תהא $\varphi\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קמורה אזי $\varphi\in C((a,b))$.

**למה:** תהא $\varphi\in\mathbb{R}^I$ קמורה ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ אזי קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ עבורם $(\varphi(x_0)=ax_0+b)\wedge(\forall x\in I.\varphi(x)\ge ax+b)$.

**אי־שוויון ינסן:** יהי $X$ מ״מ בעל תוחלת ותהא $\varphi\in\mathbb{R}^I$ קמורה עבורה $\varphi(X)$ בעל תוחלת אזי $\varphi(\mathbb{E}[X])\le\mathbb{E}[\varphi(X)]$.

**אי־שוויון הממוצעים:** יהיו $a_1\ldots a_n>0$ אזי $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^na_i}\ge\frac{\sum_{i=1}^na_i}{n}$.

**אי־שיוויון המשולש:** יהי $X$ מ״מ אזי $|\mathbb{E}[X]|\le\mathbb{E}[|X|]$.

**החוק החלש של המספרים הגדולים:** יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ״מ ב״ת שקולי התפלגות עם תוחלת $\mu$ אזי $\forall\delta>0.\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^nX_i}{n}-\mu\right|\ge\delta\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

**החוק החלש של המספרים הגדולים:** יהי $X \in \ell^1$ מ"מ עם תוחלת $\mu$ אזי לכל $\varepsilon, \delta > 0$ קיים $N_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_0$ ולכל $\{X_i \sim X\}_{i=1}^{n}$ מ"מ בלתי מתואמים מתקיים $\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mu\right| \geq \delta\right) < \varepsilon$.

**מסקנה:** יהי $X \sim \text{Bin}\left(n, p\right)$ ויהי $\delta > 0$ אזי $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \delta\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$.

**למה:** יהי $x \in [0,1]$ יהי $X \sim \text{Bin}\left(n, p\right)$ ויהי $\delta > 0$ אזי $\sup_{x \in [0,1]} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \delta\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

**פולינום ברנשטיין:** יהיו $k < n \in \mathbb{N}$ אזי $B_{k,n}\left(x\right) = \binom{n}{k} x^k \left(1-x\right)^{n-k}$.

**הגדרה:** תהא $f \in C\left([0,1]\right)$ אזי $Q_n\left(t\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} t^k \left(1-t\right)^{n-k}$.

**טענה:** $Q_n\left(t\right) \in \mathbb{R}_n\left[x\right]$.

**משפט:** תהא $f \in C\left([0,1]\right)$ אזי $\forall \varepsilon > 0. \exists n \in \mathbb{N}. \sup_{t \in [0,1]} \left|f\left(t\right) - Q_n\left(t\right)\right| \leq \varepsilon$.

**החוק החזק של המספרים הגדולים:** יהי $X \in \ell^4$ מ"מ עם תוחלת $\mu$ אזי לכל $\varepsilon, \delta > 0$ קיים $N_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N > N_0$ ולכל $\{X_i \sim X\}_{i=1}^{N}$ מ"מ ב"ת מתקיים $\mathbb{P}\left(\max_{n \in \{N_0 \ldots N\}} \left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mu\right| \geq \delta\right) < \varepsilon$.

**פונקציית צפיפות רציפה:** $f : I \to [0,1]$ רציפה המקיימת $\int_I f\left(x\right) dx = 1$.

**הסתברות רציפה:** תהא $f : I \to [0,1]$ פונקציית צפיפות ותהא $[a,b] \subseteq I$ אזי $\mathbb{P}\left([a,b]\right) = \int_a^b f\left(x\right) dx$.

**משנה מקרי רציף:** מ"מ $X$ עבורו קיימת פונקצית צפיפות $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ עבורה $\forall E \subseteq \mathbb{R}. \mathbb{P}\left(X \in E\right) = \int_E f\left(x\right) dx$.

**פונקציית ההתפלגות המצטברת:** יהי $X$ מ"מ רציף אזי $F\left(t\right) = \mathbb{P}\left(X \leq t\right) = \int_{-\infty}^{t} f\left(x\right) dx$.

**מסקנה:** יהי $X$ מ"מ רציף אזי $\mathbb{P}\left(a \leq X \leq b\right) = F\left(b\right) - F\left(a\right)$.

**משתנה מקרי אחיד רציף:** מ"מ רציף $X : I \to \mathbb{R}$ עבורו $f\left(x\right) = \begin{cases} \frac{1}{|I|} & x \in I \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

**תוחלת רציפה:** יהי $X$ מ"מ רציף אזי $\mathbb{E}\left[X\right] = \int_{\mathbb{R}} x f\left(x\right) dx$.

**מומנט רציף:** יהי $X$ מ"מ רציף אזי $\mathbb{E}\left[X^p\right] = \int_{\mathbb{R}} x^p f\left(x\right) dx$.

**התפלגות נורמלית:** יהיו $\sigma^2, \mu \in \mathbb{R}$ אזי $f \in [0,1]^{\mathbb{R}}$ המקיימת $f\left(x\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

**סימון:** יהי $Z$ מ"מ רציף עבורו $f\left(x\right)$ מתפלג נורמלית אזי $Z \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$.

**גאוסיאן:** $\phi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

**טענה:** יהי $Z$ מ"מ רציף עם פונקציית צפיפות $\phi\left(x\right)$ אזי $Z \sim N\left(0,1\right)$.

**הגדרה:** יהי $Z \sim N\left(0,1\right)$ מ"מ רציף אזי $\Phi\left(x\right) = \mathbb{P}\left(Z \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} \phi\left(t\right) dt$.

**טענה:** יהי $t \in \mathbb{R}$

- $\left(\lim_{x \to \infty} \Phi\left(x\right) = 1\right) \wedge \left(\lim_{x \to -\infty} \Phi\left(x\right) = 0\right)$.
- ($\Phi$ עולה ממש)$\wedge \left(\Phi > 0\right) \wedge \left(\Phi \in C\left(\mathbb{R}\right)\right)$.
- $\Phi\left(t\right) = 1 - \Phi\left(-t\right)$.

**הגדרה:** $\left(\Phi\left(\infty\right) = 1\right) \wedge \left(\Phi\left(-\infty\right) = 0\right)$.

**מסקנה:** יהי $Z \sim N\left(0,1\right)$ מ"מ רציף אזי $\mathbb{P}\left(a \leq Z \leq b\right) = \Phi\left(b\right) - \Phi\left(a\right) = \int_a^b \phi\left(t\right) dt$.

**משתנה מתוקנן:** $X \in \ell^2$ המקיים $\left(\mathbb{E}\left[X\right] = 0\right) \wedge \left(\text{Var}\left[X\right] = 1\right)$.

**תקנון:** יהי $X \in \ell^2$ אזי $\widehat{X} = \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sigma}$.

**טענה:** יהי $X \in \ell^2$ אזי $\widehat{X}$ מתוקנן.

**למה:** יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\left(x\right) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}}$ וכן $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\left(x\right) dx = \frac{\pi}{4^n} \binom{2n}{n}$.

**טענה:** $\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{\pi}{4^n}\binom{2n}{n}}{\frac{2}{2n+1} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}}} = 1$.

**משפט דה־מואבר לפלס:** יהיו $a \leq b$ ויהי $\{S_N \sim \text{Bin}\left(N, p\right)\}_{N=1}^{\infty}$ אזי $\mathbb{P}\left(a \leq \widehat{S_N} \leq b\right) \xrightarrow[N \to \infty]{} \Phi\left(b\right) - \Phi\left(a\right)$.

**טענה:** תהא $f \in C\left(\mathbb{R}\right)$ חסומה יהיו $a \leq b$ ויהי $\{S_N \sim \text{Bin}\left(N, p\right)\}_{N=1}^{\infty}$ אזי $\mathbb{P}\left(f\left(\frac{S_N - Np}{p\sqrt{N}}\right)\right) \xrightarrow[N \to \infty]{} \int_a^b f\left(t\right) \phi\left(t\right) dt$.

**הגדרה:** תהא $f \in C\left(\mathbb{R}\right)$ חסומה אזי $\|f\| = \max_{x \in \mathbb{R}} \left|f\left(x\right)\right|$.

**למה:** תהא $f \in C^3\left(\mathbb{R}\right)$ יהי $X$ מ"מ ויהי $Z \sim 2\text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right) - 1$ אזי $\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{X}{\sqrt{N}}\right)\right] - \mathbb{E}\left[f\left(\frac{Z}{\sqrt{N}}\right)\right]\right| \leq \frac{1}{6N^{\frac{3}{2}}} \left\|f^{(3)}\right\| \left(1 + \mathbb{E}\left[\left|X - \mathbb{E}\left[X\right]\right|^3\right]\right)$.

**הגדרה:** $\psi\left(x\right) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 1 + x - \frac{2\sin(2\pi x)}{3\pi} + \frac{\sin(4\pi x)}{12\pi} & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & x \leq -1 \end{cases}$.

**טענה:** $\left(\psi \in C^3\left(\mathbb{R}\right)\right) \wedge$($\psi$ חסומה).

**הגדרה:** יהי $\varepsilon > 0$ ויהיו $a \leq b$ אזי $I_{a,b,\varepsilon}\left(x\right) = \psi\left(\frac{b-x}{\varepsilon}\right) \psi\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right)$.

**טענה:** יהי $\varepsilon > 0$ ויהיו $a \leq b$ אזי $\left(I_{a,b,\varepsilon} \in C^3\left(\mathbb{R}\right)\right) \wedge$($I_{a,b,\varepsilon}$ חסומה).

**למה:** קיים $B > 0$ עבורו לכל $a \leq b$ ולכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\left\|I_{a,b,\varepsilon}^{(3)}\right\| \leq \frac{B}{\varepsilon^3}$.

**מסקנה:** יהיו $a \leq b$ ויהי $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$ אזי $\mathbb{1}_{[a+\varepsilon, b-\varepsilon]} \leq I_{a+\varepsilon, b-\varepsilon, \varepsilon} \leq \mathbb{1}_{[a,b]} \leq I_{a,b,\varepsilon} \leq \mathbb{1}_{[a-\varepsilon, b+\varepsilon]}$.

**משפט הגבול המרכזי:** יהיו $a \leq b$ נניח כי לכל $N \in \mathbb{N}$ יהיו $X_1 \sim \ldots \sim X_N$ מ"מ ב"ת עם תוחלת משותפת אזי $\mathbb{P}\left(a \leq \widehat{\sum_{i=1}^{N} X_i} \leq b\right) \xrightarrow[N \to \infty]{} \Phi\left(b\right) - \Phi\left(a\right)$.

**מרחב מצבים:** קבוצה $S$.

**מטריצת מצבים:** $\mathcal{P} : S^2 \to [0,1]$ המקיימת $\forall x \in S. \sum_{y \in S} \mathcal{P}\left(x, y\right) = 1$.

**שרשרת מרקוב הומוגנית בזמן ובעלת מרחב מצבים סופי:** מ"מ $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ ומטריצת מצבים $\mathcal{P}$ עבורם $\mathbb{P}\left(X_0 = s_0 \ldots X_n = s_n\right) = \mu_{X_0}\left(s_0\right) \prod_{i=0}^{n-1} \mathcal{P}\left(s_i, s_{i+1}\right)$.

**טענה:** תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי $\mathbb{P}\left(X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_n = s_n \ldots X_0 = s_0\right) = \mathcal{P}\left(s_n, s_{n+1}\right)$.

**הערה:** נתייחס אל התפלגות $\mu_X$ כאל וקטור שורה כך $\left(\mu_X\right)_i = \mathbb{P}\left(X = i - 1\right)$.

**משפט:** תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי $\mu_{X_k} = \mu_{X_0} \cdot \mathcal{P}^k$.

**טענה:** תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי $\mathbb{P}\left(X_n = y \mid X_k = x\right) = \mathcal{P}^{n-k}\left(x, y\right)$.

**התפלגות סטציונרית/עמידה:** התפלגות $\pi$ על $S$ המקיימת $\pi \cdot \mathcal{P} = \pi$.

**וקטור עצמי שמאלי:** תהא $A \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $v \in M_{1,n}\left(\mathbb{F}\right)$ המקיים $v \cdot A = \alpha v$.

**טענה:** תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי $\left(\mu_{X_0} \mathcal{P}^n \to \pi\right) \Longleftarrow$($\pi$ התפלגות סטציונרית).

**משפט:** תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי קיימת התפלגות סטציונרית $\pi$.

**סימון:** יהיו $x, y \in S$ עבורם $\exists n \in \mathbb{N}_+. \mathcal{P}^n\left(x, y\right) > 0$ אזי $x \to y$.

**מטריצת מעברים אי פריקה:** שרשרת עבורה $\forall x, y \in S. x \to y$.

**למה:** תהא $\mathcal{P}$ מטריצת מעברים אי פריקה ותהא $\pi$ התפלגות סטציונרית אזי $\forall x \in S. \pi\left(x\right) > 0$.

**משפט:** תהא $\mathcal{P}$ מטריצת מעברים אי פריקה אזי קיימת התפלגות סטציונרית יחידה $\pi$.

**משפט התכנסות ממוצעים:** תהא $\mathcal{P}$ מטריצת מעברים בעלת התפלגות סטציונרית יחידה $\pi$ אזי $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_{X_0} \cdot \mathcal{P}^k \xrightarrow[n \to \infty]{} \pi$.

**הערה:** נתייחס אל טרנספורמציה $f$ כאל וקטור עמודה כך $\left(f\right)_i = f\left(i\right)$.

**משפט:** תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בעלת התפלגות סטציונרית יחידה $\pi$ ותהא $f$ טרנספורמציה אזי $\mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(X_k\right)\right] \xrightarrow[n \to \infty]{} \pi \cdot f$.

**מחזור:** יהי $x \in S$ אזי $\gcd\left(\{n \in \mathbb{N}_+ \mid \mathcal{P}^n\left(x, x\right) > 0\}\right)$.

**מצב חסר מחזור:** $x \in S$ אשר מחזורו 1.

**שרשרת חסרת מחזור:** שרשרת $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ עבורה כל מצב חסר מחזור.

**המשפט הארגודי לשרשראות מרקוב:** תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת אי פריקה וחסרת מחזור אזי $\mu_{X_0} \cdot \mathcal{P}^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \pi$.

**זמן החזרה:** יהי $x \in S$ אזי $T_x$ מ"מ הזמן הראשון בו חזרנו ל־$x$ בהילוך שמתחיל ב־$x$.

**משפט:** תהא שרשרת אי פריקה בעלת התפלגות סטציונרית יחידה $\pi$ אזי $\mathbb{E}\left[T_x\right] = \frac{1}{\pi(x)}$.

**זמן הפגיעה:** יהיו $x, y \in S$ אזי $T_{x,y}$ מספר הפעמים שנגיע למצב $y$ בהילוך שמתחיל ב־$x$ עד לחזרה הראשונה אל $x$.

**משפט:** תהא שרשרת אי פריקה בעלת התפלגות סטציונרית יחידה $\pi$ אזי $\mathbb{E}\left[T_{x,y}\right] = \frac{\pi(y)}{\pi(x)}$.