כדור פתוח: יהי $a \in \mathbb{R}^n$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid \|x-a\| < r\}$.

ספירה: יהי $a \in \mathbb{R}^n$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $S_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid \|x-a\| = r\}$.

פנים של קבוצה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\text{int}(M) = \mathring{M} = \{x \in M \mid \exists r > 0. B_r(x) \subseteq M\}$.

קבוצה פתוחה: קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה $M = \mathring{M}$.

נקודה חיצונית: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $x \in \mathbb{R}^n$ המקיימת $\exists r > 0. B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus M$ אזי x נקודה חיצונית.

נקודה מבודדת: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $x \in M$ המקיימת $\exists r > 0. B_r(x) \cap M = \{x\}$ אזי x נקודה מבודדת.

נקודת שפה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $x \in \mathbb{R}^n$ לא נקודה פנימית ולא נקודה חיצונית אזי x נקודת שפה.

שפה של קבוצה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\partial M = \{x \in M \mid x \text{ נקודת שפה של } M\}$.

קבוצה סגורה: קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה $\partial M \subseteq M$.

סגור של קבוצה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\overline{M} = \mathring{M} \cup \partial M$.

מסקנה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי (M פתוחה)$\iff$($M^{\mathcal{C}}$ סגורה).

קבוצה חסומה: קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ המקיימת $\exists r > 0. M \subseteq B_r(0)$.

קבוצה קומפקטית: קבוצה $K \subseteq \mathbb{R}^n$ סגורה וחסומה.

טענה היינה בורל: תהא $K \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי (K קומפקטית)$\iff$(לכל $\{I_n\}_{n\in\Lambda}$ קבוצות פתוחות עבורן $A \subseteq \bigcup_{n\in\Lambda} I_n$ מתקיים $\exists \mathcal{B} \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda). A \subseteq \bigcup_{n\in\mathcal{B}} I_n$).

גבול: תהא $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ ותהא $L \in \mathbb{R}^n$ עבורן $\lim_{k\to\infty} \left\|a^{(k)} - L\right\| = 0$ אזי $\lim_{k\to\infty} a^{(k)} = L$.

משפט: תהא $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ ויהי $b \in \mathbb{R}^n$ אזי $\left(\forall j \in [n]. a_j^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} b_j\right) \iff \left(a^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} b\right)$.

משפט קושי: תהא $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\iff\left(\forall\varepsilon > 0.\exists k \in \mathbb{N}.\forall m,p > k. \left\|a^{(m)} - a^{(p)}\right\| < \varepsilon\right)$.

משפט בולצאנו ויירשטראס: לכל סדרה חסומה קיימת תת־סדרה מתכנסת.

משפט: תהא $K \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי (K קומפקטית)$\iff$(לכל $a \in K^{\mathbb{N}}$ קיימת תת־סדרה $a^{(k_i)}$ המקיימת $\lim_{k\to\infty} a^{(k_i)} \in K$).

הערה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \to \mathbb{R}^m$ נחשוב על f כוקטור של פונקציות $f = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ כאשר $f_i : A \to \mathbb{R}$.

גבול: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \to \mathbb{R}^m$ תהא $a \in \mathbb{R}^n$ ותהא $L \in \mathbb{R}^m$ אזי
- היינה: אם $\forall x \in A^{\mathbb{N}}. \left(x^{(k)} \to a\right) \implies \left(f\left(x^{(k)}\right) \to L\right)$ אזי $\lim_{x\to a} f(x) = L$.
- קושי: אם $\forall\varepsilon > 0.\exists\delta > 0.\forall x \in A\setminus\{a\}. \|x-a\| < \delta \implies \|f(x) - L\| < \varepsilon$ אזי $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

רציפות בנקודה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \to \mathbb{R}^m$ אזי $a \in A$ עבורה $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

משפט: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \to \mathbb{R}^m$ ותהא $B \subseteq A$ אזי $(f \in C(b)) \iff (f_1, \ldots, f_m \in C(b))$.

מסילה: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע אזי $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ רציפה.

מסילה של קו ישר: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^m$ נגדיר $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ כך $\gamma(t) = (1-t)a + tb$.

סימון: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^m$ ותהא $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ מסילה של קו ישר בין a ל־b אזי $[a,b] = \text{Im}(\gamma)$.

קבוצה קמורה: קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ המקיימת $\forall a, b \in M. [a,b] \subseteq M$.

טענה: יהי $a \in \mathbb{R}^n$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $B_r(a), \overline{B}_r(a)$ קבוצות קמורות.

קבוצה קשירה: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x, y \in M$ קיימת מסילה $\gamma : [0,1] \to M$ המקיימת $\gamma(0) = x$ וכן $\gamma(1) = y$.

תחום: קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי קיימת $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}_{\le\aleph_0}(\mathbb{R}^n)$ קבוצה של תחומים זרים עבורה $M = \biguplus \mathcal{A}$.

תכונת דרבו: $f : A \to \mathbb{R}$ המקיימת לכל $a, b \in A$ עבורן $f(a) < f(b)$ מתקיים $[f(a), f(b)] \subseteq f([a,b])$.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ קשירה ותהא $f \in C(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ אזי f מקיימת את תכונת דרבו.

משפט ויירשטראס: תהא $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית ותהא $f \in C(\mathcal{K}, \mathbb{R})$ אזי קיימים $x, y \in \mathcal{K}$ עבורם $f(\mathcal{K}) = [f(x), f(y)]$.

רציפה במידה שווה (במ"ש): תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ המקיימת $\forall\varepsilon > 0.\exists\delta > 0.\forall x, y \in \mathcal{M}. \|x-y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

טענה: תהא $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית ותהא $f \in C(\mathcal{K}, \mathbb{R}^m)$ אזי f רציפה במ"ש.

נורמה: יהי L מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$ אזי $\upsilon : L \to \mathbb{R}$ עבורה לכל $a \in L$ ולכל $\lambda \in \mathbb{R}$ מתקיים
- $(\upsilon(a) \ge 0) \wedge ((\upsilon(a) = 0) \iff (a = 0))$.
- הומוגניות: $\upsilon(\lambda a) = |\lambda| \cdot \upsilon(a)$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\upsilon(a+b) \le \upsilon(a) + \upsilon(b)$.

נורמות שקולות: $\upsilon, \eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ נורמות עבורן קיימים $a, b > 0$ המקיימים $a \cdot \eta \le \upsilon \le b \cdot \eta$.

טענה: שקילות נורמות הינו יחס שקילות.

מסקנה: תהא $\upsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ נורמה אזי $\upsilon, \|\cdot\|$ שקולות.

מסקנה: תהיינה $\upsilon, \rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ נורמות ותהא $x \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(\upsilon\left(x^{(k)}\right) \to 0\right) \iff \left(\rho\left(x^{(k)}\right) \to 0\right)$.

נורמת ℓ_p: עבור $p \in \mathbb{N}_+$ נגדיר נורמה $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ כך $\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

נורמת ℓ_∞: נגדיר נורמה $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ כך $\|v\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |v_i|$.

מסקנה: תהא $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ ויהי $a \in (0,1)$ אזי $\gamma'(a) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(a) \\ \vdots \\ \gamma_m'(a) \end{pmatrix}$.

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ עבורה קיימת $L \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ המקיימת $f(x) = f(a) + L(x-a) + o(\|x-a\|)$.

סימון: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית על $a \in \mathcal{U}$ אזי $f \in \mathcal{D}(a)$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $f \in \mathcal{D}(a) \implies f \in C(a)$.

גרדיאנט: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\text{grad} f(a) = [L]_{\text{st}}$.

סימון: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\nabla f(a) = \text{grad} f(a)$.

נגזרת חלקית: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h\to0} \frac{f(a+hx_i) - f(a)}{h}$.

משפט: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ המקיימת $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (\nabla f(a))_i$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ המקיימת $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$.

הערה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי ($\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ קיימת לכל i)$\not\Longrightarrow$($f \in \mathcal{D}(a)$).

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ עבורה קיימת $L \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ המקיימת $f(x) = f(a) + L(x-a) + o(\|x-a\|)$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $(f \in \mathcal{D}(a)) \iff (\forall i \in \{1\ldots m\}. f_i \in \mathcal{D}(a))$.

דיפרנציאל/יעקוביאן: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ המקיימת $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $\mathcal{D}_f(a) = \begin{pmatrix} -\nabla f_1(a)- \\ \vdots \\ -\nabla f_m(a)- \end{pmatrix}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ המקיימת $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $\left(\mathcal{D}_f(a)\right)_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.

משפט: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהיינה $f, g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ יהי $a \in \mathcal{U}$ ויהי $c \in \mathbb{R}^m$ אזי
- אם $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $f \in C(a)$.
- אם $f, g \in \mathcal{D}(a)$ אזי $cf, f+g \in \mathcal{D}(a)$.

פונקציה גזירה ברציפות: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום אזי $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ המקיימת $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ וכן $\mathcal{D}_f \in C(\mathcal{U})$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ אזי $\forall i \in [m]. \forall j \in [n]. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(\mathcal{U})$.

משפט: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ עבורה $\forall i \in [m]. \forall j \in [n]. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(\mathcal{U})$ אזי $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ אזי $\left(\forall i \in [m]. \forall j \in [n]. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(\mathcal{U})\right) \iff \left(f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)\right)$.

נגזרת כיוונית: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ יהי $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{h\to0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h}$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ המקיימת $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \nabla f(a) \cdot v$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ המקיימת $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \mathcal{D}_f(a) \cdot v$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ ויהי $c \in \mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x \in \mathcal{U}. f(x) = c) \iff \left(\forall x \in \mathcal{U}. \mathcal{D}_f(x) = 0\right)$.

מסקנה: תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ תהא $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ויהי $c \in \mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x \in \mathcal{U}. f(x) = Ax + c) \iff \left(\forall x \in \mathcal{U}. \mathcal{D}_f(x) = A\right)$.

נגזרת מעורבת: תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ויהיו $i, j \in \{1\ldots n\}$ באשר $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ גזירה אזי $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}$.

הערה: הסימון מלעיל מוכלל לנגזרת מסדר k בצורה $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}$.

משפט: תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ יהיו $i, j \in \{1\ldots n\}$ עבורן $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \in C^1(\mathcal{U})$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

סימון: יהי $K \in \mathbb{N}^n$ אזי $|K| = \sum_{i=1}^n K_i$ וכן $\partial x^K = \partial x_1^{K_1} \ldots \partial x_n^{K_n}$.

מסקנה: יהי $K \in \mathbb{N}^n$ תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ עבורה $\mathcal{D}_f \in C^k(\mathcal{U})$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי כל פרמוטציה של הנגזרות החלקיות הוא $\frac{\partial^{|K|} f}{\partial x^K}(a)$.

טענה: תהא $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ויהי $v \in \mathbb{R}^n$ אזי $\|Av\|_{\text{st}} \le \|A\|_{\text{st}} \cdot \|v\|_{\text{st}}$.

משפט: יהיו $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^m$ תחומים תהא $a \in \mathcal{U}$ ותהיינה $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}, g : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^k$ עבורן $f \in \mathcal{D}(a)$ וכן $g \in D(f(a))$ אזי $g \circ f \in \mathcal{D}(a)$ וכן $\mathcal{D}_{g\circ f}(a) = \mathcal{D}_g(f(a)) \cdot \mathcal{D}_f(a)$.

משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ עבורה $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $y - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)$.

וקטור הנורמל לגרף בנקודה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ עבורה $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $N_a = (-\nabla f(a), 1)$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ עבורה $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $\nabla f(a) \perp \Pi_{f(a)}$.

נקודת קיצון: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ אזי
- נקודת מינימום מקומי: $a \in \mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{O}$ המקיימת $\forall x \in \mathcal{O}. f(x) \ge f(a)$.
- נקודת מקסימום מקומי: $a \in \mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{O}$ המקיימת $\forall x \in \mathcal{O}. f(x) \le f(a)$.

משפט פרמה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ קיצון אזי $\nabla f(a) = 0$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ קיצון אזי $\mathcal{D}_f(a) = 0$.

נקודה קריטית/חשודה לקיצון: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ אזי $a \in \mathcal{U}$ המקיימת $\mathcal{D}_f(a) = 0$.

הגדרה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ ויהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ נגדיר $\mathcal{D}^k_{(a,b)} f = \sum_{\substack{V\in\mathbb{N}^n \\ |V|=k}} \binom{k!}{V_1, \ldots, V_n} \prod_{i=1}^n (a_i - b_i)^{V_i} \frac{\partial^k}{\partial x^V} f$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ ויהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ אזי $\mathcal{D}^k_{(a,b)} f = \left(\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^k$.

משפט טיילור: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $a \in \mathcal{U}$ תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ עבורה $f \in C^{k+1}(a)$ תהא $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ סביבה קמורה של a ותהא $x \in \mathcal{O}$ אזי קיים $c \in [x,a]$ עבורו $f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \mathcal{D}^i_{(x,a)} f(a) + \frac{1}{(k+1)!} \mathcal{D}^{k+1}_{(x,a)} f(c)$.

הסיאן: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית פעמיים אזי $\left(H_f\right)_{i,j} = f''_{x_i,x_j}$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ קריטית אזי קיים $c \in [x,a]$ עבורו $f(x) = f(a) + (x-a)^t H_f(c)(x-a)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום תהא $f \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ קריטית אזי
- $\left(\left(\det\left(H_f(a)\right) > 0\right) \wedge \left(f''_{x,x}(a) > 0\right)\right) \implies$($a$ נקודת מינימום).
- $\left(\left(\det\left(H_f(a)\right) > 0\right) \wedge \left(f''_{x,x}(a) < 0\right)\right) \implies$($a$ נקודת מקסימום).
- ($\det\left(H_f(a)\right) \ne 0$)$\wedge$(לא אחד מהמקרים מלעיל)$\implies$($a$ אינה נקודת קיצון).

נקודה קריטית לא מנוונת: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ אזי $a \in \mathcal{U}$ קריטית עבורה $\det\left(H_f(a)\right) \ne 0$.

משפט פונקציה סתומה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום ותהא $F \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ עבורה $F(a) = 0$ וכן $F'_y(a) \ne 0$ אזי קיימים $I_x, I_y \subseteq \mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_1 \in I_x$ וכן $a_2 \in I_y$ וקיימת $f \in C^1(I_x, I_y)$ עבורה לכל $(x,y) \in I_x \times I_y$ מתקיים $(y = f(x)) \iff (F(x,y) = 0)$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום תהא $F \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ תהא $a \in \mathcal{U}$ עבורה $F(a) = 0$ וכן $F'_y(a) \ne 0$ יהיו $I_x, I_y \subseteq \mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_1 \in I_x$ וכן $a_2 \in I_y$ ותהא $f \in C^1(I_x, I_y)$ עבורה לכל $(x,y) \in I_x \times I_y$ מתקיים $(y = f(x)) \iff (F(x,y) = 0)$ אזי $f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$ על I_x.

סימון: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ אזי $\underset{m\times(n+m)}{\mathcal{D}_f(a)} = \left(\underset{m\times n}{F'_x(a)}, \underset{m\times m}{F'_y(a)}\right)$.

משפט פונקציה סתומה כללי: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ עבורה $F(a) = 0$ וכן $F'_y(a)$ הפיכה אזי קיימים $I_{x_1}, \ldots, I_{x_n}, I_{y_1} \ldots I_{y_m} \subseteq \mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i \in [n]$ מתקיים $a_i \in I_{x_i}$ ולכל $j \in [m]$ מתקיים $a_{j+n} \in I_{y_j}$ וקיימת $f \in C^k\left(\prod_{i=1}^n I_{x_i}, \prod_{j=1}^m I_{y_i}\right)$ עבורה לכל $(x,y) \in \left(\prod_{i=1}^n I_{x_i}\right) \times \left(\prod_{j=1}^m I_{y_i}\right)$ מתקיים $(y = f(x)) \iff (F(x,y) = 0)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ עבורה $F(a) = 0$ וכן $F'_y(a)$ הפיכה יהיו $I_{x_1}, \ldots, I_{x_n}, I_{y_1} \ldots I_{y_m} \subseteq \mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i \in [n]$ מתקיים $a_i \in I_{x_i}$ ולכל $j \in [m]$ מתקיים $a_{j+n} \in I_{y_j}$ ותהא $f \in C^k\left(\prod_{i=1}^n I_{x_i}, \prod_{j=1}^m I_{y_i}\right)$ עבורה לכל $(x,y) \in \left(\prod_{i=1}^n I_{x_i}\right) \times \left(\prod_{j=1}^m I_{y_i}\right)$ מתקיים $(y = f(x)) \iff (F(x,y) = 0)$ אזי $\mathcal{D}_f(x) = -F'_y(x, f(x))^{-1} \cdot F'_x(x, f(x))$ על $\prod_{i=1}^n I_{x_i}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $F \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ עבורה $F(a) = 0$ וכן $\nabla F(a) \ne 0$ אזי משוואת המישור המשיק למשטח $\{F = 0\}$ הינו $\sum_{i=1}^n F'_{x_i}(a)(x_i - a_i) = 0$.

דיפאומורפיזם: יהיו $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ הפיכה עבורה $f^{-1} \in C^1(\mathcal{V}, \mathcal{U})$.

משפט פונקציה הפוכה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ עבורה $\mathcal{D}_f(a)$ הפיכה אזי קיימת סביבה $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ של a עבורה f דיפאומורפיזם על $\mathcal{O}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $a \in \mathcal{U}$ תהא $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ עבורה $\mathcal{D}_f(a)$ הפיכה ותהא $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ סביבה של a עבורה f דיפאומורפיזם אזי $\mathcal{D}_{f^{-1}}(f(x)) = \mathcal{D}_f(x)^{-1}$ על $\mathcal{O}$.

טענה: יהיו $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $A \subseteq \mathcal{U}$ ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ דיפאומורפיזם אזי
- (A פתוחה)$\iff$($f(A)$ פתוחה).
- (A סגורה)$\iff$($f(A)$ סגורה).
- (A קומפקטית)$\iff$($f(A)$ קומפקטית).
- אם $\partial A \subseteq \mathcal{U}$ אזי $\partial(f(A)) = f(\partial A)$.

פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום אזי $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ המקיימת לכל $\widetilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{U}$ פתוחה מתקיים $f\left(\widetilde{\mathcal{U}}\right)$ פתוחה.

משפט פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ עבורה $\text{rank}\left(\mathcal{D}_f(a)\right) = m$ אזי קיימת סביבה $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ של a עבורה f פתוחה על $\mathcal{O}$.

נקודה קריטית בתנאי: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ תהא $g \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ אזי $a \in \mathcal{U}$ המקיימת $g(a) = 0$ וכן $\nabla f(a) \in \text{span}\{\nabla g_i(a)\}$.

משפט: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ותהא $g \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ המקיימת $g(a) = 0$ וכן $\{\nabla g_i(a)\}$ בת"ל וכן קיימת סביבה $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ של a עבורה a קיצון בקבוצה $\text{sols}(g) \cap \mathcal{O}$ אזי a נקודה קריטית של f בתנאי $g = 0$.

פונקציית לגראנז': יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ותהא $g \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ נגדיר $L \in C^1(\mathcal{U} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ כך $L(x_1 \ldots x_n, \lambda_1, \ldots \lambda_m) = f(x_1 \ldots x_n) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1 \ldots x_n)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ תהא $g \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ אזי (a נקודה קריטית של f בתנאי $g = 0$)$\iff$(קיימת $\lambda \in \mathbb{R}^m$ עבורה (a, λ) נקודה קריטית של L).

תיבה סגורה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ אזי $P_{a,b} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in [n]. a_j \le x_j \le b_j\right\}$.

חלוקה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ לכל $i \in [n]$ תהיינה $\left\{t_i^0, \ldots, t_i^{\ell_i}\right\}$ חלוקה של $[a_i.b_i]$ אזי $\left\{\prod_{i=1}^n \left[t_i^{m_i}, t_i^{m_i+1}\right] \mid \forall i \in [n]. m_i \in [\ell_i - 1]\right\}$.

מידה/נפח של תיבה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ אזי $V(P) = \text{Vol}(P) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.

טענה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ ותהא $\{A_1, \ldots, A_k\}$ חלוקה של P אזי $\text{Vol}(P) = \sum_{i=1}^k \text{Vol}(A_i)$.

סכום רימן: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ תהא $\Pi = \{A_1, \ldots, A_k\}$ חלוקה ויהיו $x^{(j)} \in A_j$ אזי $S\left(f, \Pi, \left\{x^{(i)}\right\}\right) = \sum_{j=1}^k f\left(x^{(j)}\right) \text{Vol}(A_j)$.

קוטר קבוצה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $d(M) = \sup_{x,y\in M} \|x - y\|$.

מדד העדינות: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ ותהא $\Pi = \{A_1, \ldots, A_k\}$ חלוקה אזי $\lambda(\Pi) = \max_{i\le i\le k} d(A_i)$.

אינטגרביליות רימן: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ ותהא $f : P \to \mathbb{R}$ אזי $\int_P f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda(\Pi)\to0} S\left(f, \Pi, x^{(j)}\right)$.

סימון: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ ותהא $f : P \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $f \in R(P)$.

טענה: תהא P תיבה ותהא $f \in R(P)$ אזי f חסומה על P.

סכום דרבו עליון: תהא P תיבה תהא $f : P \to \mathbb{R}$ חסומה ותהא $\{A_1, \ldots, A_n\}$ חלוקה אזי $\overline{S}(f, \Pi) = \sum_{i=1}^n \sup_{P_j}(f) \text{Vol}(P_j)$.

סכום דרבו תחתון: תהא P תיבה תהא $f : P \to \mathbb{R}$ חסומה ותהא $\{A_1, \ldots, A_n\}$ חלוקה אזי $\underline{S}(f, \Pi) = \sum_{i=1}^n \inf_{P_j}(f) \text{Vol}(P_j)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f : P \to \mathbb{R}$ חסומה תהא Π חלוקה ויהיו $x^{(j)}$ נקודות מתאימות אזי $\underline{S}(f, \Pi) \le S\left(f, \Pi, \left\{x^{(i)}\right\}\right) \le \overline{S}(f, \Pi)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f : P \to \mathbb{R}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$ חלוקות אזי $\underline{S}(f, \Pi_1) \le \underline{S}(f, \Pi_2) \le \overline{S}(f, \Pi_2) \le \overline{S}(f, \Pi_1)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f : P \to \mathbb{R}$ חסומה ותהיינה Π_1, Π_2 חלוקות אזי $\underline{S}(f, \Pi_1) \le \overline{S}(f, \Pi_2)$.

אינטגרל דרבו עליון: תהא P תיבה ותהא $f : P \to \mathbb{R}$ חסומה אזי $\overline{I}(f) = \inf_{\text{חלוקה } \Pi} \overline{S}(f, \Pi)$.

אינטגרל דרבו תחתון: תהא P תיבה ותהא $f : P \to \mathbb{R}$ חסומה אזי $\underline{I}(f) = \sup_{\text{חלוקה } \Pi} \underline{S}(f, \Pi)$.

מסקנה: תהא P תיבה תהא $f : P \to \mathbb{R}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f, \Pi) \le \underline{I}(f) \le \overline{I}(f) \le \overline{\Sigma}(f, \Pi)$.

קריטריון דרבו: תהא P תיבה ותהא $f : P \to \mathbb{R}$ חסומה אזי $\left(f \in R\left(P\right)\right) \iff \left(\underline{I}\left(f\right) = \overline{I}\left(f\right)\right)$.

מסקנה: תהא P תיבה ותהא $f \in R\left(P\right)$ חסומה אזי $\int_P f = \underline{I}\left(f\right) = \overline{I}\left(f\right)$.

טענה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ויהי $\lambda > 0$ אזי $\mathrm{Vol}\left(P_{\lambda a, \lambda b}\right) = \lambda^n \mathrm{Vol}\left(P_{a,b}\right)$.

טענה: יהיו $P_1 \ldots P_n$ תיבות עבורן לכל $i \neq j$ מתקיים $\mathrm{int}\left(P_i\right) \cap \mathrm{int}\left(P_j\right) = \varnothing$ וכן $\bigcup_{i=1}^n P_i$ תיבה אזי $\mathrm{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^n P_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Vol}\left(P_i\right)$.

מסקנה: יהיו $P_1 \ldots P_n$ תיבות ותהא $P \subseteq \bigcup_{i=1}^n P_i$ תיבה אזי $\mathrm{Vol}\left(P\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathrm{Vol}\left(P_i\right)$.

טענה: יהיו P_1, P_2 תיבות אזי $P_1 \cap P_2$ תיבה.

הערה: תהא P תיבה אזי $\mathrm{Vol}\left(P \backslash \mathrm{int}\left(P\right)\right) = 0$.

קבוצה זניחה: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה לכל $\varepsilon > 0$ קיימות תיבות $\left\{P_i\right\}_{i=0}^{\infty}$ המקיימת $E \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} P_i$ וכן $\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Vol}\left(P_i\right) < \varepsilon$.

סימון: $\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right) = \left\{E \subseteq \mathbb{R}^n \mid \text{זניחה } E\right\}$.

טענה: $\varnothing \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$, יהי $a \in \mathbb{R}^n$ אזי $\left\{a\right\} \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

טענה: תהיינה $\left\{E_i\right\}_{i=0}^{\infty}$ זניחות אזי $\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

טענה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי (E זניחה)$\iff$(לכל $\varepsilon > 0$ קיימות תיבות $\left\{P_i\right\}_{i=0}^{\infty}$ המקיימת $E \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathrm{int}\left(P_i\right)$ וכן $\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Vol}\left(P_i\right) < \varepsilon$).

מסקנה: תהא $E \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$ קומפקטית אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימות תיבות $\left\{P_i\right\}_{i=0}^{n}$ המקיימת $E \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} \mathrm{int}\left(P_i\right)$ וכן $\sum_{i=0}^{n} \mathrm{Vol}\left(P_i\right) < \varepsilon$.

טענה: תהא $E \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$ ותהא $A \subseteq E$ אזי $A \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

טענה: $\mathbb{Q}^n \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$, תהא $P \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה לא מנוונת אזי $P \notin \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה קיימת נקודה פנימית אזי $M \notin \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

מסקנה: תהא $M \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$ אזי $\mathrm{int}\left(M\right) = \varnothing$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f \in C\left(\mathcal{U}, \mathbb{R}\right)$ אזי $\Gamma_f \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי קיימות קוביות $\left\{C_i\right\}_{i=0}^{\infty}$ בעלות אורך צלע 2^{-e_i} עבור $e_i \in \mathbb{N}$ עבורן לכל $i \neq j$ מתקיים $\mathrm{int}\left(P_i\right) \cap \mathrm{int}\left(P_j\right) = \varnothing$ וכן $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$.

מסקנה: $\mathbb{S}^{n-1} \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$, קבוצת קנטור זניחה.

כמעט לכל: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ויהי ψ פרידיקט אזי נאמר כי "ψ מתקיים כמעט על כל A" אם קיימת $E \subseteq A$ זניחה עבורה ψ מתקיים לכל $A \backslash E$.

קריטריון לבג לאינטגרביליות רימן בתיבה: תהא $P \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה סגורה ותהא $f : P \to \mathbb{R}$ חסומה אזי (f רציפה כמעט על כל P)$\iff$($f \in R\left(P\right)$).

קבוצה מדידת ז'ורדן: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה עבורה ∂E זניחה.

טענה: תהיינה $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי

- ∂E_1 סגורה.
- $\partial\left(E_1 \backslash E_2\right), \partial\left(E_1 \cup E_2\right), \partial\left(E_1 \cap E_2\right) \subseteq \partial E_1 \cup \partial E_2$.

סימון: $J\left(\mathbb{R}^n\right) = \left\{E \subseteq \mathbb{R}^n \mid \text{ז'ורדן } E\right\}$.

מסקנה: תהיינה $A, B \in J$ אזי $A \backslash B, A \cup B, A \cap B \in J$.

פונקציית אפיון/אינדיקטור: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \left\{0, 1\right\}$ כך $\chi_A\left(x\right) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$.

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\chi_A \in C\left(\mathrm{int}\left(A\right)\right)$ וכן $\chi_A \in C\left(\mathbb{R}^n \backslash A\right)$.

אינטגרביליות רימן: תהא $P \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה סגורה תהא $A \subseteq P$ חסומה ותהא $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ עבורה $f \cdot \chi_A \in R\left(P\right)$ אזי $\int_A f = \int_P f \cdot \chi_A$.

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה תהיינה $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבות סגורות עבורן $A \subseteq P_1, P_2$ ותהא $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ אזי

- $\left(f \cdot \chi_A \in R\left(P_1\right)\right) \iff \left(f \cdot \chi_A \in R\left(P_2\right)\right)$.
- $\int_{P_1} f \cdot \chi_A = \int_{P_2} f \cdot \chi_A$.

מידה/נפח של תיבה: תהא $A \in J\left(\mathbb{R}^n\right)$ אזי $V\left(A\right) = \mathrm{Vol}\left(A\right) = \int_A \mathrm{d}x$.

משפט: תהא $A \in J\left(\mathbb{R}^n\right)$ ותהיינה $f, g \in R\left(A\right)$ אזי

- יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $af + bg \in R\left(A\right)$ וכן $\int_A \left(af + bg\right) = a\int_A f + b\int_A g$.
- נניח כי $f \geq 0$ אזי $\int_A f \geq 0$.
- נניח כי $f \geq g$ אזי $\int_A f \geq \int_A g$.
- נניח כי $m \leq f \leq M$ אזי $m\mathrm{Vol}\left(A\right) \leq \int_A f \leq M\mathrm{Vol}\left(A\right)$.

טענה: תהיינה $A, B \in J\left(\mathbb{R}^n\right)$ ותהא $f \in R\left(A\right) \cap R\left(B\right)$ אזי $f \in R\left(A \cap B\right)$ וכן $f \in R\left(A \cup B\right)$.

מסקנה: תהיינה $A, B \in J\left(\mathbb{R}^n\right)$ עבורן $\mathrm{Vol}\left(A \cap B\right) = 0$ אזי $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

משפט ערך הביניים: יהי $A \in J\left(\mathbb{R}^n\right)$ תחום ותהא $f \in C\left(A, \mathbb{R}\right)$ אזי $\exists c \in A. \int_A f = f\left(c\right)\mathrm{Vol}\left(A\right)$.

טענה: תהא $A \in J\left(\mathbb{R}^n\right)$ ויהי $f \in R\left(A\right)$ אזי $\left|f\right| \in R\left(A\right)$ וכן $\left|\int_A f\right| \leq \int_A \left|f\right|$.

טענה: תהא $A \in J\left(\mathbb{R}^n\right)$ ותהיינה $f, g \in R\left(A\right)$ כמעט על כל A אזי $\int_A f = \int_A g$.

משפט: תהא $A \in J\left(\mathbb{R}^n\right)$ אזי $\int_A f = \int_{\overline{A}} f = \int_{\mathrm{int}\left(A\right)} f$.

טענה: תהינה $A_1 \ldots A_k \in J\left(\mathbb{R}^n\right)$ אזי $\bigcap_{i=1}^k A_i, \bigcup_{i=1}^k A_i \in J\left(\mathbb{R}^n\right)$.

מסקנה: תהיינה $A_1 \ldots A_k \in J\left(\mathbb{R}^n\right)$ עבורן לכל $i \neq j$ מתקיים $\mathrm{Vol}\left(A_i \cap A_j\right) = 0$ אזי $\mathrm{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Vol}\left(A_i\right)$.

מסקנה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $a \in \mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}\left(A\right) = \mathrm{Vol}\left(A + a\right)$.

משפט יחידות פונקציית נפח: תהא $\nu : J\left(\mathbb{R}^n\right) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ אדיטיבית אינווריאנטית להזזות עבורה $\nu\left(\left[0, 1\right]^n\right) = 1$ אזי $\nu = \mathrm{Vol}$.

טענה: תהא $T \in \mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^n\right)$ אורתוגונלית ותהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה אזי $T\left(A\right)$ חסומה.

מסקנה: תהא $T \in \mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^n\right)$ אורתוגונלית ותהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $T\left(\partial A\right) = \partial\left(T\left(A\right)\right)$.

מסקנה: תהא $T \in \mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^n\right)$ אורתוגונלית ותהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ זניחה וחסומה אזי $T\left(E\right)$ זניחה וחסומה.

משפט: תהא $T \in \mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^n\right)$ אורתוגונלית ותהא $A \in J\left(\mathbb{R}^n\right)$ אזי $T\left(A\right) \in J\left(\mathbb{R}^n\right)$ וכן $\mathrm{Vol}\left(T\left(A\right)\right) = \mathrm{Vol}\left(A\right)$.

משפט פוביני: תהיינה $P \subseteq \mathbb{R}^n$, $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ תיבות ותהא $f \in R\left(P \times Q\right)$ עבורה $\iint_{P \times Q} f$ קיים אזי $\int_Q \int_P f\left(x, y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \int_P \int_Q f\left(x, y\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x$ קיימים ובפרט $\iint_{P \times Q} f = \int_P \int_Q f\left(x, y\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_Q \int_P f\left(x, y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסקנה: תהיינה $P \subseteq \mathbb{R}^n$, $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ תיבות ותהא $f \in R\left(P \times Q\right)$ אזי $\int_Q f\left(a, y\right) \mathrm{d}y$ קיים כמעט לכל $a \in P$.

מסקנה: תהא $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ חסומה תהיינה $\varphi_1, \varphi_2 : B \to \mathbb{R}$ תהא $A = \left\{\left(x, y\right) \in B \times \mathbb{R} \mid \varphi_1\left(x\right) \leq y \leq \varphi_2\left(x\right)\right\}$ ותהא $f \in R\left(A\right)$ אזי $\int_A f = \int_B \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f\left(x, y\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

מסקנה: תהא $A \in J\left(\mathbb{R}^n\right)$ תהא $A \subseteq \prod_{i=1}^n P_i$ תיבה אזי $A \cap \left(\mathbb{R}^{n-1} \times \left\{y\right\}\right) \in J\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ כמעט לכל $y \in P_n$ ובפרט $\mathrm{Vol}\left(A\right) = \int_{P_n} \mathrm{Vol}\left(A \cap \left(\mathbb{R}^{n-1} \times \left\{y\right\}\right)\right) \mathrm{d}y$.

שטח: תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ אזי $S\left(D\right) = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסה: תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהא $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ צפיפות אזי $m\left(D\right) = \iint_D \rho\left(x, y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מומנט מסה: תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהא $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ צפיפות אזי

- מומנט מסה לפי ציר x: $M_x\left(D\right) = \iint_D y \cdot \rho\left(x, y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
- מומנט מסה לפי ציר y: $M_x\left(D\right) = \iint_D x \cdot \rho\left(x, y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מרכז המסה: תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ אזי $\left(\frac{M_y(D)}{m(D)}, \frac{M_x(D)}{m(D)}\right)$.

נפח: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ אזי $V\left(E\right) = \iiint_E \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מסה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהא $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ צפיפות אזי $m\left(E\right) = \iiint_E \rho\left(x, y, z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מומנט מסה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהא $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ צפיפות אזי

- מומנט מסה לפי המישור $\left\{z = 0\right\}$: $M_{xy}\left(E\right) = \iiint_E z \cdot \rho\left(x, y, z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
- מומנט מסה לפי המישור $\left\{y = 0\right\}$: $M_{xz}\left(E\right) = \iiint_E y \cdot \rho\left(x, y, z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
- מומנט מסה לפי המישור $\left\{x = 0\right\}$: $M_{yz}\left(E\right) = \iiint_E x \cdot \rho\left(x, y, z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מרכז המסה: תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ אזי $\left(\frac{M_{yz}(E)}{m(E)}, \frac{M_{xz}(E)}{m(E)}, \frac{M_{xy}(E)}{m(E)}\right)$.

מקבילון: יהיו $v_1 \ldots v_n \in \mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Par}\left(v_1 \ldots v_n\right) = \left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid \forall i \in \left[n\right]. \alpha_i \in \left[0, 1\right]\right\}$.

טענה: יהיו $v_1 \ldots v_n \in \mathbb{R}^n$ אזי מתקיים $\mathrm{Vol}\left(\mathrm{Par}\left(v_1 \ldots v_n\right)\right) = \left|\det\begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix}\right|$.

טענה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם ותהא $E \subseteq A$ אזי

- (E זניחה)$\Longleftarrow$($\varphi\left(E\right)$ זניחה).
- ($\left(\mathrm{Vol}\left(E\right) = 0\right) \wedge \left(\overline{E} \subseteq A\right)$)$\Longleftarrow$($\left(\mathrm{Vol}\left(\varphi\left(E\right)\right) = 0\right) \wedge \left(\overline{\varphi\left(E\right)} \subseteq B\right)$).
- ((E ז'ורדן)$\wedge$($\overline{E} \subseteq A$))$\Longleftarrow$(($\varphi\left(E\right)$ ז'ורדן)$\wedge$($\overline{\varphi\left(E\right)} \subseteq B$)).

מסקנה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f \in R\left(B\right)$ אזי $\left(f \circ \varphi\right)\left|\det \mathcal{D}_\varphi\right| \in R\left(A\right)$.

משפט: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f \in R\left(B\right)$ אזי $\int_B f = \int_A f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det \mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right| \mathrm{d}t$.

מסקנה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם תהא $E \subseteq A$ עבורה $\overline{E} \subseteq A$ ותהא $f \in R\left(\varphi\left(E\right)\right)$ אזי $\left(f \circ \varphi\right)\left|\det \mathcal{D}_\varphi\right| \in R\left(E\right)$ ובפרט $\int_{\varphi(E)} f = \int_E f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det \mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right| \mathrm{d}t$.

מסקנה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות תהא $\varphi : A \to B$ בעל דיפרנציאל חסום תהיינה $E \subseteq A$, $S \subseteq B$ זניחות עבורן $A \backslash E, S \backslash B$ פתוחות וכן $\varphi\left(A \backslash E\right) = S \backslash B$ כמו כן φ דיפאומורפיזם על $A \backslash E$ ותהא $f \in R\left(S\right)$ אזי $\left(f \circ \varphi\right)\left|\det \mathcal{D}_\varphi\right| \in R\left(A\right)$ ובפרט $\int_B f = \int_A f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det \mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right| \mathrm{d}t$.

קואורדינטות קוטביות/פולריות: יהי $\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2$ אזי $\left(\rho, \phi\right) \in \left(0, \infty\right] \times \left[0, 2\pi\right]$ עבורן $x = \rho\cos\left(\phi\right)$ וכן $y = \rho\sin\left(\phi\right)$.

טענה: תהא $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לפולריות אזי $\left|\det \mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right| = \rho$.

קואורדינטות גליליות: יהי $\left(x, y, z\right) \in \mathbb{R}^2$ אזי $\left(\rho, \phi, \iota\right) \in \left(0, \infty\right] \times \left[0, 2\pi\right] \times \left\{z\right\}$ עבורן $x = \rho\cos\left(\phi\right)$ וכן $y = \rho\sin\left(\phi\right)$.

טענה: תהא $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לגליליות אזי $\left|\det \mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right| = \rho$.

קואורדינטות כדוריות: יהי $\left(x, y, z\right) \in \mathbb{R}^2$ אזי $\left(\rho, \phi, \theta\right) \in \left(0, \infty\right] \times \left[0, 2\pi\right] \times \left[0, \pi\right]$ עבורן $x = \rho\sin\left(\theta\right)\cos\left(\phi\right)$ וכן $y = \rho\sin\left(\theta\right)\sin\left(\phi\right)$ וכן $z = \rho\cos\left(\theta\right)$.

טענה: תהא $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לכדוריות אזי $\left|\det \mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right| = \rho^2\sin\left(\theta\right)$.

טענה: תהא $S \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ סיבוב S סביב ציר z בקואורדינטות גליליות אזי $\mathrm{Vol}\left(E\right) = 2\pi\iint_S \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z$.

מסקנה נפח גוף סיבוב: תהיינה $f, g : \left[a, b\right] \to \mathbb{R}$ עבורן $g \leq f$ תהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ סיבוב S סביב ציר x אזי $\mathrm{Vol}\left(E\right) = \pi\int_a^b \left(g^2\left(x\right) - f^2\left(x\right)\right) \mathrm{d}x$.

משפט פאפוס: תהא $S \subseteq \mathbb{R}^2$ יהי $c \in \mathbb{R}^2$ מרכז המסה של S ותהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ סיבוב S סביב ציר x אזי $\mathrm{Vol}\left(E\right) = 2\pi R_c \cdot \mathrm{Vol}\left(S\right)$ באשר R_c רדיוס סיבוב c.

מיצוי ז'ורדן: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\left(E_k\right)_{k=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות מדידות ז'ורדן עולה עבורה $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

טענה: תהא $E \in J\left(\mathbb{R}^n\right)$ ויהי $\left(E_k\right)_{k=1}^{\infty}$ מיצוי ז'ורדן של E אזי $\mathrm{Vol}\left(E\right) = \lim_{k \to \infty} \mathrm{Vol}\left(E_k\right)$.

מסקנה: תהא $E \in J\left(\mathbb{R}^n\right)$ יהי $\left(E_k\right)_{k=1}^{\infty}$ מיצוי ז'ורדן של E ותהא $f \in R\left(E\right)$ אזי $\int_E f = \lim_{k \to \infty} \int_{E_k} f$.

אינטגרל לא אמיתי: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f : E \to \mathbb{R}$ עבורם לכל $\left(E_k\right)_{k=1}^{\infty}$ מיצוי ז'ורדן של E מתקיים $\forall k \in \mathbb{N}. f \in R\left(E_k\right)$ וכן $\lim_{k \to \infty} \int_{E_k} f$ קיים ושווה אזי $\int_E f = \lim_{k \to \infty} \int_{E_k} f$.

טענה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f : E \to \mathbb{R}$ אי שלילית עבורה קיים מיצוי ז'ורדן $\left(E_k\right)_{k=1}^{\infty}$ של E המקיימת $\forall k \in \mathbb{N}. f \in R\left(E_k\right)$ וכן $\lim_{k \to \infty} \int_{E_k} f$ קיים אזי $\int_E f$ מתכנס.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left\|x\right\|^2} \mathrm{d}x = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t\right)^n = \pi^{\frac{n}{2}}$.

משפט מבחן ההשוואה לאינטגרלים לא אמיתיים: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהיינה $f, g : E \to \mathbb{R}$ עבורן $g \leq \left|f\right|$ וכן $\left(f \in R\left(A\right)\right) \iff \left(g \in R\left(A\right)\right)$. $\forall A \in \mathcal{P}\left(E\right) \cap J\left(\mathbb{R}^n\right)$ וכן $\int_E g$ מתכנס אזי $\int_E f, \int_E \left|f\right|$ מתכנסים.

מסקנה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f : E \to \mathbb{R}$ אזי ($\int_E \left|f\right|$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\int_E f$ מתכנס).

משפט: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ בעלת מיצוי ז'ורדן ותהא $f : E \to \mathbb{R}$ בעלת קבוצת נקודות אי־רציפות זניחה אזי ($\int_E f$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\int_E \left|f\right|$ מתכנס).

טענה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהיינה $f, g : E \to \mathbb{R}$ עבורן $\int_E f, \int_E g$ מתכנסים אזי $\int_E \left(f + g\right) = \int_E f + \int_E g$.

הערה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה E בעלת מיצוי ז'ורדן.

משפט: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות יהי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f : B \to \mathbb{R}$ עבורה לכל $E \subseteq B$ ז'ורדן וקומפקטית מתקיים $f \in R\left(E\right)$ וכן $\int_B f$ מתכנס אזי $\int_B f = \int_A f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det \mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right| \mathrm{d}t$.

פונקציית גאמא: יהי $t > 0$ אזי $\Gamma\left(t\right) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} \mathrm{d}x$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\Gamma\left(n\right) = \left(n - 1\right)!$.

טענה: יהי $t > 0$ אזי $\Gamma\left(t\right)$ מתכנס.

פונקציית בטא: יהיו $t, s > 0$ אזי $B\left(t, s\right) = \int_0^{\infty} x^{t-1}\left(1 - x\right)^{s-1} \mathrm{d}x$.

טענה: יהיו $t, s > 0$ אזי $B\left(t, s\right)$ מתכנס.

מסקנה: יהיו $t, s > 0$ אזי $B\left(t, s\right) = \frac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)}$.

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathrm{Vol}\left(B_1\left(0\right)\right) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

סימפלקס: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\Delta_n = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \left(\forall i \in \left[n\right]. x_i \geq 0\right) \wedge \left(\sum_{i=1}^n x_i \leq 1\right)\right\}$.

טענה נוסחת דירכלה: יהיו $p_1 \ldots p_n > 0$ אזי $\int\!\cdots\!\int_{\Delta_n} \left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i - 1}\right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(p_i)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n p_i\right)}$.

מסקנה: יהיו $p_1 \ldots p_n > 0$ ויהיו $\gamma_1 \ldots \gamma_n > 0$ אזי

$$\int\!\cdots\!\int_{\substack{x_1, \ldots x_n \geq 0 \\ \sum x_i^{\gamma_i} \leq 1}} \left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i - 1}\right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \gamma_i} \cdot \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{p_i}{\gamma_i}\right)}{\Gamma\left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\gamma_i}\right)}.$$

טענה: יהיו $p_1 \ldots p_n > 0$ ותהא $\psi : \left[0, 1\right] \to \mathbb{R}$ רציפה כמעט תמיד אזי

$$\int\!\cdots\!\int_{\Delta_n} \psi\left(x_1 \ldots x_n\right)\left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i - 1}\right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(p_i)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n p_i\right)} \int_0^1 \psi\left(u\right) u^{\left(\sum p_i\right) - 1} \mathrm{d}u.$$