פונקציונל ליניארי: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $f \in \text{Hom}\left(V,\mathbb{F}\right)$.

המרחב הדואלי: $V^* = \text{Hom}\left(V,\mathbb{F}\right)$.

טענה: V נ"ס $\Longleftarrow V^* \cong V$.

שחלוף/העתקה הדואלית: תהא $T \in \text{Hom}\left(V,U\right)$ אזי $T^t : U^* \to V^*$ המוגדרת $T^t = \lambda\varphi \in U^*.\varphi \circ T$.

הטלה: $\Pi_i\left(x\right) = x_i$.

סימון: יהי C בסיס של V אזי $\Phi_i = \Pi_i \circ Q_C$.

הבסיס הדואלי: יהי C בסיס של V אזי $C^* = \left(\Phi_i\right)_{i=1}^{\dim(V)}$ בסיס של V^*.

טענה: יהי C בסיס של V אזי $\forall f \in V^*.f = \sum_{i=1}^{\dim(V)} f\left(C_i\right)\Phi_i$.

שורה של העתקה: תהא $T \in \text{Hom}\left(V,U\right)$ אזי $R_i\left(T\right) = \Phi_i \circ T$.

מרחב השורות: $\mathcal{R}\left(T\right) = \text{span}\left(\left(R_i\left(T\right)\right)_{i=1}^{\dim(U)}\right)$.

טענה: $\ker\left(T\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \ker\left(R_i\left(T\right)\right)$.

מסקנה: $\ker\left(T\right) = \bigcap_{f \in \mathcal{R}(T)} \ker\left(f\right)$.

מרחב האפסים: תהא $S \subseteq V^*$ אזי $S_0 = \bigcap_{f \in S} \ker\left(f\right)$.

טענה: יהי V מ"ו ותהנא $S,T \subseteq V$

- S_0 תמ"ו של V.
- $S \subseteq T \Longrightarrow T_0 \subseteq S_0$.
- $\left(\bigcup_\alpha S_\alpha\right)_0 = \bigcap_\alpha \left(S_\alpha\right)_0$.
- $S_0 = \left(\text{span}\left(S\right)\right)_0$.
- $\left(\{0\}\right)_0 = V$.
- $\left(V^*\right)_0 = \{0\}$.

המרחב המאפס: תהא $A \subseteq V$ אזי $A^0 = \{\varphi \in V^* \mid \varphi_{\restriction_A} = 0\}$.

טענה: יהי V מ"ו ותהנא $A,B \subseteq V$.

- A^0 תמ"ו של V^*.
- $A \subseteq B \Longrightarrow B^0 \subseteq A^0$.
- $\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)^0 = \bigcap_\alpha \left(A_\alpha\right)^0$.
- $A^0 = \left(\text{span}\left(A\right)\right)^0$.
- $\left(\{0\}\right)^0 = V^*$.
- $\left(V^*\right)^0 = \{0\}$.

טענה: יהי V מ"ו נ"ס

- יהי $U \subseteq V$ תמ"ו אזי $\left(U^0\right)_0 = U$.
- יהי $W \subseteq V^*$ תמ"ו אזי $\left(W_0\right)^0 = W$.

משפט: $\dim\left(M\right) + \dim\left(M^0\right) = \dim\left(V\right)$.

משפט: $\dim\left(W\right) + \dim\left(W_0\right) = \dim\left(V^*\right)$.

משפט: יהי B בסיס של V^* אזי קיים בסיס C של V המקיים $B = C^*$.

מסקנה: U נ"ס $\Longleftarrow \mathcal{R}\left(T\right) = \left(\ker\left(T\right)\right)^0$.

מסקנה: $\dim\left(\mathcal{R}\left(T\right)\right) = \dim\left(\text{Im}\left(T\right)\right) = \text{rank}\left(T\right)$.

המרחב הדואלי השני: $\left(V^*\right)^*$.

פונקציונל ההצבה/האיזומורפיזם הקנוני: $\lambda v \in V.\lambda\psi \in V^*.\psi\left(v\right)$.

משפט: פונקציונל ההצבה לינארי וחח"ע.

דמיון מטריצות: $\forall A,B \in M_n\left(\mathbb{F}\right).A \sim B \Longleftrightarrow \exists P \in M_n\left(\mathbb{F}\right).A = PBP^{-1}$.

מטריצה לכסינה: $A \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ המקיימת $\exists\lambda \in \mathbb{F}^n.\exists P \in M_n\left(\mathbb{F}\right).A \sim \text{Diag}\left(\lambda\right)$.

מטריצה מלכסנת: $P \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ עבורה $P \cdot \text{Diag}\left(\lambda\right) \cdot P^{-1} = A$.

העתקה לכסינה: $T \in \text{Hom}\left(V\right)$ המקיימת כי קיים בסיס B עבורו $\left[T\right]_B$ אלכסונית.

בסיס מלכסן: בסיס B עבורו $\left[T\right]_B$ אלכסונית.

הערה: T לכסינה $\Longleftrightarrow$ לכל בסיס C מתקיים כי $\left[T\right]_C$ לכסינה.

וקטור עצמי (ו"ע): תהא $T\in\text{Hom}(V)$ אזי $0\neq v\in V$ המקיים $\exists\lambda\in\mathbb{F}.T(v)=\lambda v$.

ערך עצמי (ע"ע): תהא $T\in\text{Hom}(V)$ אזי $\lambda\in\mathbb{F}$ המקיים $\exists v\in V.T(v)=\lambda v$.

משפט: T לכסינה $\iff$ קיים בסיס B של וקטורים עצמיים.

המרחב העצמי (מ"ע): יהי λ ע"ע של T אזי $V_\lambda=\{v\in V\mid T(v)=\lambda v\}$.

טענה: V_λ תמ"ו של V, $V_0=\ker(T)$.

מסקנה: T הפיכה $\iff V_0=\{0\}\iff 0$ אינו ע"ע של T.

טענה: $V_\lambda=\ker(\lambda\cdot Id_V-T)$.

מסקנה: λ ע"ע של $A\iff|\lambda I-A|=0$.

הפולינום האופייני (פ"א): תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $f_A(x)=|xI-A|$.

מסקנה: λ ע"ע של $A\iff f_A(\lambda)=0$.

הגדרה: יהי B בסיס של V אזי $f_T(x)=f_{[T]_B}(x)$.

טענה: $A\sim B\Longrightarrow f_A(x)=f_B(x)$.

פולינום מתוקן: $\sum_{i=0}^n a_ix^i$ המקיים $a_n=1$.

טענה: יהי R תחום שלמות תהא $A\in M_n(R)$ ונניח כי $f_A(x)=\sum_{i=0}^n a_ix^i$

- $f_A(x)\in R[x]$ פולינום מתוקן.
- $\deg(f_A(x))=n$.
- $a_0=(-1)^n|A|$, $a_{n-1}=-\text{trace}(A)$.

טענה: תהא $\sigma\in S_n$ אזי $\deg\left(\prod_{i=1}^n(xI-A)_{i,\sigma(i)}\right)=\sum_{i=1}^n\deg\left((xI-A)_{i,\sigma(i)}\right)$.

טענה: $\deg(f_A(x))\le\max_{\sigma\in S_n}\left(\sum_{i=1}^n\deg\left((xI-A)_{i,\sigma(i)}\right)\right)$.

מסקנה: לכל $A\in M_n(\mathbb{F})$ יש לכל היותר n ע"ע.

הריבוי הגאומטרי: יהי λ ע"ע אזי $\rho_\lambda=\dim(V_\lambda)$.

טענה: יהיו $\lambda_1\neq\lambda_2$ ע"ע אזי $V_{\lambda_1}\cap V_{\lambda_2}=\{0\}$.

משפט: יהיו $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ ע"ע אזי $\bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$.

מסקנה: יהיו $B_i\subseteq V_{\lambda_i}$ בת"ל לכל $i\in[k]$ אזי $B_1\frown B_2\frown\ldots\frown B_k$ בת"ל.

מסקנה: A לכסינה $\iff\sum_{i=1}^k\rho_{\lambda_i}=n$.

מסקנה: $\exists\lambda_1\neq\ldots\neq\lambda_n.f_A(x)=\prod_{i=1}^n(x-\lambda_i)\Longrightarrow A$ לכסינה.

טענה: A לכסינה $\Longrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{F}^n.f_A(x)=\prod_{i=1}^n(x-\lambda_i)$.

הריבוי האלגברי: יהי λ ע"ע אזי $\mu_\lambda=\max_{n\in\mathbb{N}}((x-\lambda)^n\,|f_A(x))$.

משפט: לכל λ ע"ע מתקיים $\rho_\lambda\le\mu_\lambda$.

משפט: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי (A לכסינה) $\iff$ ($f_A(x)$ פריק לגורמים לינארים)$\wedge$(לכל λ ע"ע מתקיים $\rho_\lambda=\mu_\lambda$).

מסקנה: יהי $\mathbb{F}$ שדה סגור אלגברית ותהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי (A לכסינה) $\iff$ (לכל λ ע"ע מתקיים $\rho_\lambda=\mu_\lambda$).

העתקה ניתנת למשלוש: $T\in\text{Hom}(V)$ המקיימת כי קיים בסיס B של V עבורו $[T]_B$ משולשית.

משפט: T ניתנת למשלוש $\iff\exists\lambda\in\mathbb{F}^n.f_A(x)=\prod_{i=1}^n(x-\lambda_i)$.

T אינווריאנטי/תת מרחב שמור: תהא $T\in\text{Hom}(V)$ אזי תמ"ו $U\subseteq V$ המקיים $T[U]\subseteq U$.

טענה: $\ker(T)$, $\text{Im}(T)$ הם T אינו'.

טענה: יהיו $v_1,\ldots,v_k$ ו"ע אזי $\text{span}(v_1,\ldots,v_k)$ T אינו'.

טענה: תהא $A\subseteq V$ אזי התמ"ו ה־T אינו' הקטן ביותר שמכיל את A הוא $\text{span}\left(\bigcup_{i=0}^\infty T^i[A]\right)$.

מרחב פריק: תהא $T\in\text{Hom}(V)$ אזי V מ"ו עבורו קיימים $\{0\}\neq U,W\subseteq V$ T-אינו' המקיימים $V=U\oplus W$.

הצבה בפולינום: יהי $p(x)=\sum_{i=0}^n a_ix^i$ ותהא $A\in M_m(\mathbb{F})$ אזי $p(A)=\sum_{i=0}^n a_iA^i$.

טענה: $\forall p\in\mathbb{F}[x].\,[p(T)]_B=p([T]_B)$.

טענה: (λ ע"ע של A) $\Longleftarrow$ (λ ע"ע של A^t).

טענה: יהי $p\in\mathbb{F}_n[x]$ ותהא A המקיימת $Av=\lambda v$ אזי $p(A)v=p(\lambda)v$.

טענה: יהי $p\in\mathbb{F}[x]$ אזי $\ker(p(T)),\text{Im}(p(T))$ הם T-אינו'.

טענה: יהי $V=\bigoplus_{i=1}^n V_i$ מ"ו יהי $T\in\text{Hom}(V)$ נניח כי לכל $i\in[n]$ מתקיים כי V_i T אינו' וגם B_i בסיס של V_i אזי $[T]_B=\text{Diag}\left(\left([T_{\restriction V_i}]_{B_i}\right)_{i=1}^n\right)$.

מסקנה: נניח כי $V=\bigoplus_{i=1}^{n}V_i$ מ"ו ונניח כי לכל $i\in[n]$ מתקיים כי V_i T אינו' אזי $f_T(x)=\prod_{i=1}^{n}f_{T_{\restriction_{V_i}}}(x)$.

טענה: יהיו $\lambda_1\neq\ldots\neq\lambda_n$ ע"ע של T אזי (T לכסינה) $\Longleftrightarrow$ ($\prod_{i=1}^{n}(T-\lambda_i\mathrm{Id})=0$).

טענה: $\forall p\in\mathbb{F}[x].A\sim B\Longrightarrow p(A)\sim p(B)$.

טענה: יהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]$ ותהא $T\in\mathrm{Hom}(V)$ אזי $g(T)f(T)=f(T)g(T)$.

מסקנה: יהי $f\in\mathbb{F}[x]$ ותהא $T\in\mathrm{Hom}(V)$ אזי $f(T)\circ T=T\circ f(T)$.

מסקנה: $T\circ S=S\circ T\Longleftarrow$ $\mathrm{Im}(S)$, $\ker(S)$ הן T אינו'.

משפט קיילי המילטון: $f_A(A)=0$.

תת חוג: יהי $\langle R,+,*\rangle$ חוג עם יחידה אזי $R'\subseteq R$ המקיים $\left\langle R',+_{\restriction_{R'^2}},*_{\restriction_{R'^2}}\right\rangle$ חוג עם יחידה.

משפט: כל תחום שלמות הוא תת חוג של שדה.

מחלק: יהי $b\in R$ אזי $a\in R$ המקיים $\exists c\in R.a*c=b$.

סימון: אם a מחלק את b אזי $a|b$.

מסקנה: יהי R תחום שלמות ונניח כי $b=u\cdot a$ וגם $a=v\cdot b$ אזי $v\cdot u=u\cdot v=1$.

מסקנה: $(b|a)\wedge(a|b)\Longleftrightarrow\exists u\in R^{\times}.a=u\cdot b$.

חברים: $a,b\in R$ המקיימים $\exists u\in R^{\times}.a\cdot u=b$.

סימון: אם a,b חברים אזי $a\sim b$.

אידאל: $I\subseteq R$ המקיים $(0\in I)\wedge(\forall a,b\in I.a+b\in I)\wedge(\forall x\in R.\forall y\in I.x\cdot y\in I)$.

האידאל הנפרש על ידי איבר: יהי $a\in R$ אזי $Ra=(a)=\{b\cdot a\mid b\in R\}$.

משפט: יהי $I\subseteq\mathbb{Z}$ אידאל אזי $\exists a\in\mathbb{Z}.I=(a)$.

האידאל הנפרש על ידי קבוצה: תהא $X\subseteq R$ אזי $(X)=\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_iv_i\mid(m\in\mathbb{N}_+)\wedge(\alpha\in R^m)\wedge(v\in X^m)\}$.

טענה: תהא $\varphi:R\to S$ הומומורפיזם בין חוגים אזי $\ker(\varphi)$ אידאל.

טענה: $b|a\Longleftrightarrow(a)\subseteq(b)$, $\forall a\in R.(a)=R\Longleftrightarrow a\in R^{\times}$.

אידאל ראשי: אידאל $I\subseteq R$ המקיים $\exists a\in R.(a)=I$.

תחום ראשי/PID: תחום שלמות R המקיים כי כל $I\subseteq R$ אידאל הוא ראשי.

אידאל ראשוני: אידאל $I\subseteq R$ המקיים $\forall a,b\in R.ab\in I\Longrightarrow(a\in I)\vee(b\in I)$.

טענה: (a) ראשוני $\Longleftrightarrow$ a ראשוני.

טענה: יהיו $I_1,I_2\subseteq R$ אידאלים אזי $I_1\cap I_2$ אידאל.

אידאל פריק: אידאל $I\subseteq R$ עבורו קיימים $I\neq I_1,I_2\subseteq R$ המקיימים $I=I_1\cap I_2$.

טענה: (a) אי פריק $\Longleftrightarrow$ a אי פריק.

אידאל מירבי: אידאל $I\subseteq R$ המקיים כי לכל $I\subset J$ אידאל מתקיים $J=R$.

טענה: יהי I אידאל אזי (I מירבי) $\Longleftrightarrow$ (I אי פריק).

gcd: יהיו $r_1,\ldots,r_n\in R$ אזי $d\in R$ המקיים $(d)=(r_1,\ldots,r_n)$.

טענה: נניח כי d הוא $\gcd(r_1,\ldots,r_n)$ מתקיים $(d|r_1\ldots r_n)\wedge(a|r_1\ldots r_n\Longrightarrow a|d)$.

lcm: יהיו $r_1,\ldots,r_n\in R$ אזי $d\in R$ המקיים $(d)=(r_1)\cap\ldots\cap(r_n)$.

טענה: נניח כי d הוא $\mathrm{lcm}(r_1,\ldots,r_n)$ מתקיים $(r_1\ldots r_n|d)\wedge(r_1\ldots r_n|a\Longrightarrow d|a)$.

זרים: $r_1,\ldots,r_n\in R$ המקיימים כי 1 הוא $\gcd(r_1,\ldots,r_n)$.

משפט: ($r_1,\ldots,r_n$ זרים) $\Longleftrightarrow$ ($\exists a\in R^n.\sum_{i=1}^{n}a_ir_i=1$).

ראשוני: יהי R תחום שלמות אזי $a\in R$ המקיים $\forall p,q\in R.(a|pq)\Longrightarrow(a|p)\vee(a|q)$.

אי פריק (א"פ): $a\in R\backslash R^{\times}$ המקיים $\forall p,q\in R.(a=pq)\Longrightarrow(p\in R^{\times})\vee(q\in R^{\times})$.

טענה: יהי R חוג ויהי $0\neq a\in R$ אזי (a ראשוני) $\Longleftarrow$ (a א"פ).

טענה: הפיך · ראשוני = ראשוני, הפיך · א"פ = א"פ.

טענה: יהי R תחום ראשי ויהי $0\neq a\in R$ אזי (a ראשוני) $\Longleftrightarrow$ (a א"פ).

פריקות חד ערכית: נניח כי $\prod_{i=1}^{n}p_i=\prod_{i=1}^{m}q_i$ עבור p_i,p_j ראשוניים אזי $(n=m)\wedge(\forall i\in[n].p_i\sim q_i)$.

משפט: יהי R תחום המקיים כי כל ראשוני הוא אי פריק אזי R מקיים פריקות חד ערכית.

מסקנה: תחום ראשי מקיים פריקות חד ערכית.

תחום אוקלידי: תחום שלמות R ופונקציה $N:R\backslash\{0\}\to\mathbb{Z}$ המקיימת $\forall y\in R.\forall x\in R\backslash\{0\}.\exists!q,r\in R.(y=xq+r)\wedge(N(r)<N(x))$.

טענה: כל תחום אוקלידי הוא ראשי.

חוג השלמים של גאוס: $\mathbb{Z}[i]=\{a+ib\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\mathbb{F}[x]$ תחום אוקלידי ראשי, $\mathbb{Z}[i]$ תחום אוקלידי.

דיסקרימיננטה: יהי $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in\mathbb{F}_n[x]$ ויהיו $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ השורשים של f אזי $\Delta(f)=(-1)^{\binom{n}{2}}a_n^{2(n-1)}\prod_{i\neq j}(\alpha_i-\alpha_j)$.

הגדרה: יהי $q\in\mathbb{F}[x]$ אזי $\forall f,g\in\mathbb{F}[x].f\sim_{(q)}g\iff f-g\in(q)$.

טענה: ${}^{\mathbb{F}[x]}/_{\sim_{(q)}}$ שדה.

משפט: $q\left([x]_{\sim_{(q)}}\right)=0$.

משפט: כל שדה מוכל בשדה סגור אלגברית.

טענה: יהיו $\mathbb{F}_0\subseteq\mathbb{F}_1$ ותהא $A\in M_n(\mathbb{F}_0)$ אזי (A הפיכה מעל $\mathbb{F}_1$) $\Longleftarrow$ (A הפיכה מעל $\mathbb{F}_0$).

טענה: תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{F}_0)$ אזי ($A\sim B$ מעל $\mathbb{F}_1$) $\Longleftarrow$ ($A\sim B$ מעל $\mathbb{F}_0$).

האידאל המאפס: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $I_A=\{p\in\mathbb{F}[x]\mid p(A)=0\}$.

מסקנה: $f_A\in I_A$.

הפולינום המינימלי: $m_A\in I_A$ המקיים (m_A פולינום מתוקן)$\wedge$($(m_A)=I_A$).

טענה: $m_A=\iota\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in I_A.(a_n=1)\wedge(n=\min(\deg(p)\mid p\in I_A\backslash\{0\}))$.

טענה: תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ ותהא $T\in\text{Hom}(V)$

- $f(A)=0\iff m_A|f$.
- $I_T=I_{[T]_B}$.
- $A\sim B\Longrightarrow m_A=m_B$.

משפט: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ ויהיו $\lambda_1\neq\ldots\neq\lambda_k$ כל הע"ע אזי (A לכסינה) $\iff$ ($m_A(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)$).

משפט: λ ע"ע של $A\iff m_A(\lambda)=0$.

טענה: $\min\left(d\in\mathbb{N}\mid A^d=0\right)=\deg(m_A)$.

למת המחלק הפולינום המינימלי: תהא $f\in\mathbb{F}[x]$ המקיימת $\deg(f)>0$ אזי ($f|m_A$) $\Longleftarrow$ $f(A)$ לא הפיכה.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}_1$ אזי (בת"ל מעל $\mathbb{F}_1$) $\iff$ (בת"ל מעל $\mathbb{F}_0$).

משפט: m_A לא משתנה בהרחבת שדות.

משפט: $f_A|m_A^n$.

מסקנה: לכל $p\in\mathbb{F}[x]$ א"פ מתקיים $p|m_A\iff p|f_A$.

טענה: נניח כי $V=\bigoplus_{i=1}^{n}V_i$ מ"ו ונניח כי לכל $i\in[n]$ מתקיים כי V_i T אינו' אזי $m_T=\text{lcm}\left(m_{T\restriction_{V_1}},\ldots,m_{T\restriction_{V_n}}\right)$.

טענה: יהי U תמ"ו T אינו' אזי $\forall p\in\mathbb{F}[x].p(T)_{\restriction_U}=p(T_{\restriction_U})$.

טענה: יהיו $S_1,S_2\in\text{Hom}(V)$ המקיימות $S_1+S_2=Id$, $S_1\circ S_2=0=S_2\circ S_1$ אזי

- $\ker(S_1)=\text{Im}(S_2)$, $\text{Im}(S_1)=\ker(S_2)$.
- $V=\ker(S_1)\oplus\ker(S_2)$.

הכללה: יהיו $S_1\ldots S_n\in\text{Hom}(V)$ המקיימות $\sum_{i=1}^{n}S_i=1$, $S_i\circ\left(\sum_{i\neq j}S_j\right)=0$ אזי

- $\text{Im}(S_i)=\bigcap_{i\neq j}\ker(S_j)$.
- $V=\oplus_{i=1}^{n}\ker(S_i)$.

משפט: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ תהא $T\in\text{Hom}(V)$ ויהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]$ המקיימות $\gcd(f,g)=1$, $f(T)g(T)=0$ אזי $V=\ker(g(T))\oplus\ker(f(T))$.

הכללה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ תהא $T\in\text{Hom}(V)$ ויהיו $p_1\ldots p_n\in\mathbb{F}[x]$ המקיימות $\gcd(p_i,p_j)=1$, $\prod_{i=1}^{n}p_i(T)=0$ אזי $V=\bigoplus_{i=1}^{n}\ker(p_i(T))$.

משפט הפירוק הפרימרי דרך הפולינום המינימלי: תהא $T\in\text{Hom}(V)$ ונניח כי $m_T(x)=\prod_{i=1}^{n}q_i(x)^{r_i}$ באשר $q_i(x)$ אי פריקים מתוקנים אזי

- $V=\bigoplus_{i=1}^{n}\ker\left(q_i(T)^{r_i}\right)$.
- $m_{T\restriction_{\ker\left(q_i(T)^{r_i}\right)}}(x)=q_i(x)^{r_i}$.

הגדרה: נניח כי $f_A(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)^{r_i}$ אזי $f_A^{red}(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$.

טענה: A לכסינה $\iff f_A^{red}(A)=0$.

נגזרת: נניח כי $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ אזי $f'(x)=\sum_{i=1}^{n}ia_ix^{i-1}$.

טענה: $f_A^{red}=\frac{f_A}{\gcd\left(f_A,f_A'\right)}$.

הגדרה: $(a,b)+_{\mathbb{C}}(c,d)=(a+c,b+d)$, $(a,b)\cdot_{\mathbb{C}}(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$.

מירכוב: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $V_{\mathbb{C}}=\left\langle V^2,\cdot_{\mathbb{C}},+_{\mathbb{C}}\right\rangle$.

מסקנה: $(a,b)\cong a+ib$.

הגדרה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ותהא $T\in\text{Hom}(V)$ אזי נגדיר את $T_{\mathbb{C}}:V_{\mathbb{C}}\to V_{\mathbb{C}}$ כך $T_{\mathbb{C}}(u+iv)=T(v)+iT(u)$.

אינדקס הנילפוטנטיות: תהא $T\in\text{Hom}(V)$ אזי $n(T)=\min\left\{k\in\mathbb{N}\mid T^k=0\right\}$.

טענה: נניח כי $m_T(x)=\prod_{i=1}^{\kappa}(x-\lambda_i)^{k_i}$ אזי $n\left(T\restriction_{\ker\left((x-\lambda_i)^{k_i}\right)}-\lambda_iId_{\ker\left((x-\lambda_i)^{k_i}\right)}\right)=k_i$.

שרשרת: יהי $v\in V$ אזי $\langle v,Tv,\ldots,T^nv\rangle$ עבורו $T^{n+1}v=0$.

מרחב T-ציקלי: מרחב וקטורי V המקיים כי קיימת שרשרת שהיא בסיס.

מסקנה: נניח כי $T\in\text{Hom}(V)$ נילפוטנטית אזי $(n(T)=\dim(V))\iff(V$ הוא T-ציקלי$)$.

מסקנה: תהא $T\in\text{Hom}(V)$ נילפוטנטית אזי $(V$ מ"ו T ציקלי$)\iff(V$ אי פריק$)$.

ציקלי מקסימלי: תמ"ו $U\subseteq V$ T-אינו' המקיים $\dim(U)=n(T)$.

יחס מנה: יהי $V\subseteq U$ תמ"ו נגדיר יחס שקילות $\forall v_1,v_2\in V.v_1\sim_U v_2\iff v_1-v_2\in U$.

מרחב מנה: $V/U=V/\sim_U$.

העתקת המנה: $T_U(v)=[v]_{\sim_U}$.

מסקנה: $\dim(V/U)=\dim(V)-\dim(U)$.

טענה: יהי $U\subseteq V$ תמ"ו ויהיו $B=(v_1\ldots v_n)\in V^n$ וגם $\left([v_1]_{\sim_U}\ldots[v_n]_{\sim_U}\right)=\overline{B}\in V/U$

- $\overline{B}$ בת"ל $\iff(\forall\alpha\in\mathbb{F}.\forall v\in\prod_{i=1}^{n}[v_i]_{\sim_U}.\sum\alpha_iv_i\in U\Longrightarrow\forall i\in[n].a_i=0)$.
- $\overline{B}$ בת"ל $\iff(B$ בת"ל$)\wedge(U\oplus\text{span}(B))$.
- $\overline{B}$ פורשת $\iff U+\text{span}(B)=V$.
- $[v]_{B\frown C}=[P_U(v)]_C\frown\left[[v]_{\sim_U}\right]_{\overline{B}}$.

קו-מימד: יהי $U\subseteq V$ תמ"ו אזי $\dim(V/U)$.

הגדרה: יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"ו אזי $W/U=T_U[W]=\left\{[w]_U\mid w\in W\right\}$.

הגדרה: יהי $U\subseteq V$ תמ"ו ותהא $T\in\text{Hom}(V)$ אזי נגדיר $\overline{T}:V/U\to V/U$ כך $\overline{T}\left([v]_{\sim_U}\right)=[T(v)]_{\sim_U}$.

טענה: יהי $W\subseteq V$ תמ"ו T-אינו' אזי $[T]_{B\frown C}=\left(\begin{array}{c|c}[T\restriction_W]_B & *\\ \hline 0 & [T]_{\overline{C}}\end{array}\right)$.

בלוק ז'ורדן: $(J_k(\lambda))_{i,j}=\lambda\delta_{i,j}+\delta_{i+1,j}$ או תצוגתית $J_k(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 1\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda\end{pmatrix}_{k\times k}$.

מערך ז'ורדן: $I(\lambda)=\text{Diag}\left(J_{k_1}(\lambda),\ldots,J_{k_r}(\lambda)\right)$.

מטריצת/צורת ז'ורדן: $J=\text{Diag}\left(I(\lambda_1),\ldots,I(\lambda_k)\right)$.

טענה: $\left(J_r(0)^k\right)_{i,j}=\delta_{i+k,j}$.

הבינום של ניוטון: יהיו A,B מתחלפות אזי $(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}$.

טענה: $J_n(\lambda)^k=(J_n(0)+\lambda I_n)^k=\sum_{m=0}^{k}\binom{m}{k}\lambda^{k-m}J_n(0)^m$.

מסקנה: יהי $\lambda\neq0$ אזי $J_n(\lambda)^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda^i}J_n(0)^{i-1}$.

טענה: תהא $T\in\text{Hom}(V)$ ויהי B בסיס של V

- $[T]_B=J_n(0)\iff B=\left(T^{n-1}v,\ldots,v\right)$ המקיים $v\in\ker(T^n)\setminus\ker\left(T^{n-1}\right)$.
- $[T]_B=J_n(\lambda)\iff B=\left((T-\lambda I)^{n-1}v,\ldots,v\right)$ המקיים $v\in\ker\left((T-\lambda I)^n\right)\setminus\ker\left((T-\lambda I)^{n-1}\right)$.

מסקנה: $[T]_B$ מטריצת ז'ורדן $\iff$ B שרשור בסיסים מהצורה $\left(\left(T-\lambda I\right)^{n-1}v,\ldots,v\right)$.

וקטור עצמי מוכלל: תהא $S\in\text{Hom}\left(V\right)$ אזי $v\in V$ שמקיים $\exists\lambda\in\mathbb{F}.\exists k>0.\left(S-\lambda I\right)^{k}\left(v\right)=0$.

משפט: תהא $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ ונניח כי $m_T\left(x\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(x-\lambda_i\right)^{r_i}$ אזי קיים בסיס B של V עבורו $[T]_B=\text{Diag}\left(I\left(\lambda_1\right),\ldots,I\left(\lambda_k\right)\right)$.

טענה: נניח כי $[T]_B=\text{Diag}\left(I\left(\lambda_1\right),\ldots,I\left(\lambda_k\right)\right)$ בעבור $I\left(\lambda_i\right)=\text{Diag}\left(J_{k_1^i}\left(\lambda_i\right),\ldots,J_{k_{n_i}^i}\left(\lambda_i\right)\right)$

- כל הע"ע של T הם $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$.
- $\mu_i=\sum_{j=1}^{n_i}k_j^i$.
- $\rho_i=n_i$.
- הריבוי האלגברי בפולינום המינימלי של ע"ע λ_i הוא $\max\left(k_1^i,\ldots,k_{n_i}^i\right)$.
- $\left|\left\{j\mid k_j^i\geq r\right\}\right|=\dim\left(\ker\left(\left(T-\lambda_iI\right)^{r}\right)\right)-\dim\left(\ker\left(\left(T-\lambda_iI\right)^{r-1}\right)\right)$.

מסקנה: צורת ז'ורדן היא יחידה עד כדי שינוי סדר.

אלגוריתם ז'ורדן: יהי $\mathbb{F}$ שדה סגור אלגברית ויהי $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ עם פ"א $f_A\left(x\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(x-\lambda_i\right)^{d_i}$ בעבור $\lambda_i\neq\lambda_j$

- צורת ז'ורדן:

$$
\begin{aligned}
&J=0\\
&\text{for }\ (1\leq i\leq k)\\
&\qquad\text{for }\ (1\leq m\leq d_i)\\
&\qquad\qquad s_{i,m}=\dim\left(\text{sols}\left(\left(A-\lambda_iI\right)^{m}\right)\right)\\
&\qquad\text{for }\ (1\leq m\leq d_i)\\
&\qquad\qquad r_{i,m}=2s_{i,m}-s_{i,m+1}-s_{i,m-1}\\
&\qquad\qquad\text{for }\ (1\leq t\leq r_{i,m})\\
&\qquad\qquad\qquad J=\text{Diag}\left(J,J_m\left(\lambda_i\right)\right)\\
&\text{return }\ B
\end{aligned}
$$

- בסיס ז'ורדן:

$$
\begin{aligned}
&P=\langle,\rangle\\
&\text{for }\ (1\leq i\leq k)\\
&\qquad\text{for }\ (1\leq m\leq d_i)\\
&\qquad\qquad\text{for }\ (1\leq t\leq r_{i,m})\\
&\qquad\qquad\qquad v_{i,m,t}^{1}\in\text{sols}\left(\left(A-\lambda_iI\right)^{m}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad v_{i,m,t}^{1}\notin\text{sols}\left(\left(A-\lambda_iI\right)^{m-1}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad v_{i,m,t}^{1}\notin\text{span}\left(v_{i,m',t'}^{\ell'};\begin{array}{c}1\leq m'\leq m\\ 1\leq t'\leq r_{i,m'}\\ 2\leq\ell'\leq m'\end{array}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\text{for }\ (2\leq\ell\leq m)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad v_{i,m,t}^{\ell}=\left(A-\lambda_iI\right)v_{i,m,t}^{\ell-1}\\
&\qquad\qquad\qquad\text{for }\ (m\leq l\leq 1)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad P=P^{\frown}v_{i,m,t}^{l}
\end{aligned}
$$

התכנסות של סדרת מטריצות: תהא $A:\mathbb{N}\to M_n(\mathbb{F})$ אזי $\lim\limits_{m\to\infty}A_m=\begin{pmatrix}\lim\limits_{m\to\infty})A_m(_{1,1} & \cdots & \lim\limits_{m\to\infty})A_m(_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ \lim\limits_{m\to\infty})A_m(_{n,1} & \cdots & \lim\limits_{m\to\infty})A_m(_{n,n}\end{pmatrix}$.

טענה: $e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$.

מסקנה: $e^{I(\lambda)}=e^{\text{Diag}\left(J_{n_1}(\lambda),\ldots,J_{n_k}(\lambda)\right)}=\text{Diag}\left(e^{J_{n_1}(\lambda)},\ldots,e^{J_{n_k}(\lambda)}\right)$.

מסקנה: $e^J=e^{\text{Diag}(I(\lambda_1),\ldots,I(\lambda_k))}=\text{Diag}\left(e^{I(\lambda_1)},\ldots,e^{I(\lambda_k)}\right)$.

טענה: נניח כי $A=PJP^{-1}$ אזי $e^A=Pe^JP^{-1}$.

מסקנה: e^A קיים ומוגדר היטב בשדה סגור אלגברית.

טענה: יהיו $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ מתחלפות אזי $e^Ae^B=e^Be^A=e^{A+B}$.

משוואה דיפרנציאלית רגילה (מד"ר): יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $F\left(x,y(x),\ldots,y^{(n)}(x)\right)=0$.

משפט: בהינתן n תנאי התחלה קיים ויחיד פתרון $y(x)$ למד"ר מסדר n.

טענה: תהא $y\in(\mathbb{F}\to\mathbb{F})^n$ ותהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\text{sols}(y'=Ay)=\left\{ce^{Ax}\mid c\in\mathbb{F}^n\right\}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $m\in\mathbb{N}$ עבורו לכל V מ"ו המקיים כי $m\nmid\dim(V)$ לכל $T\in\text{Hom}(V)$ קיים ע"ע אזי לכל $T,S\in\text{Hom}(V)$ מתחלפות קיים ו"ע משותף.

לכסון סימולטני: יהיו $T,S\in\text{Hom}(V)$ לכסינות ומתחלפות אזי קיים בסיס B של V עבורו $[T]_B,[S]_B$ אלכסוניות.

מטריצה מצורפת/נלוית: יהי $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ מתוקן אזי $A_f=\begin{pmatrix}0 & & & -a_0\\ 1 & \ddots & & -a_1\\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 & -a_{n-1}\end{pmatrix}$.

משפט: $f_{A_p}=p$.

טענה: $m_{A_p}=p$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}$ התב"ש

- לכל פולינום מעל $\mathbb{F}$ ממעלה n קיים פתרון.
- לכל V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ממימד n מתקיים כי לכל $T\in\text{Hom}(V)$ קיים ע"ע מעל $\mathbb{F}$.
- לכל $A\in M_n(\mathbb{F})$ קיים ע"ע מעל $\mathbb{F}$.

משפט: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $f\in\mathbb{F}[x]$ א"פ מתוקן אזי $\mathbb{E}_f=\{g(A_f)\mid g\in\mathbb{F}[x]\}$ שדה.

טענה: $\left\langle I,A_f,\ldots,A_f^{\deg(f)-1}\right\rangle$ בסיס של $\mathbb{E}_f$ בתור מ"ו מעל $\mathbb{F}$.

מסקנה: $f(A_f)=0$.

צורת פרוביניוס: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ עם $f_A(x)=\prod_{i=1}^{r}q_i(x)$ בעבור q_i א"פ זרים בזוגות אזי $A\sim\text{Diag}(A_{q_1},\ldots,A_{q_r})$.

הגדרה: נגדיר $M_{\mathbb{1}}\in M_n(\mathbb{F})$ כך $(M_{\mathbb{1}})_{i,j}=\delta_{i,n}\delta_{j,n}$.

הגדרה: יהי $q(x)^\ell$ בעבור q_i א"פ מתוקן אזי $C(q)\in M_{\ell\deg(q)}(\mathbb{F})$ כך $C(q)=\begin{pmatrix}A_q & \ddots & 0 & 0\\ 0 & \ddots & M_{\mathbb{1}} & 0\\ & \ddots & A_q & M_{\mathbb{1}}\\ 0 & & 0 & A_q\end{pmatrix}$.

צורת יעקובסון: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ עם $f_A(x)=\prod_{i=1}^{r}q_i(x)^{\ell_i}$ בעבור q_i א"פ זרים אזי $A\sim\text{Diag}(C(q_1),\ldots,C(q_r))$.

הגדרה: תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ אזי $\overline{A}\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ כך $\left(\overline{A}\right)_{i,j}=\overline{(A)_{i,j}}$.

טענה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ ויהי λ ע"ע של $A_{\mathbb{C}}$ עם ו"ע b אזי $\overline{\lambda}$ ע"ע של $A_{\mathbb{C}}$ עם ו"ע $\bar{b}$.

טענה: $\mu_\lambda=\mu_{\overline{\lambda}}$,$\rho_\lambda=\rho_{\overline{\lambda}}$.

הגדרה: יהי $a+ib\in\mathbb{C}$ אזי $M_{\mathbb{C}}^{\lambda}=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$.

משפט: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ לכסינה יהיו $\alpha_{1},\ldots,a_{k}\in\mathbb{R}$ ע"ע עם $b_{1},\ldots,b_{k}\in\mathbb{R}^{n}$ ו"ע ויהיו $\lambda_{1},\overline{\lambda_{1}},\ldots,\lambda_{m},\overline{\lambda_{m}}\in\mathbb{C}$ ע"ע עם $c_{1},\ldots,c_{m}\in\mathbb{C}^{n}$ ו"ע של $\lambda_{1},\ldots,\lambda_{m}$ אזי

- $\left\langle b_{1},\ldots,b_{k},c_{1},\overline{c_{1}},\ldots,c_{m},\overline{c_{m}}\right\rangle$ בסיס מלכסן מעל $\mathbb{C}$.
- $B=\left\langle b_{1},\ldots,b_{k},\text{Re}\left(c_{1}\right),\text{Im}\left(c_{1}\right),\ldots,\text{Re}\left(c_{m}\right),\text{Im}\left(c_{m}\right)\right\rangle$ בסיס מעל $\mathbb{R}$ עבורו $\left[A\right]_{B}=\text{Diag}\left(a_{1},\ldots,a_{k},M_{\mathbb{C}}^{\lambda_{1}},\ldots,M_{\mathbb{C}}^{\lambda_{m}}\right)$.

טענה: תהא λ ע"ע ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $\dim\left(\ker\left(A-\lambda I\right)^{m}\right)=\dim\left(\ker\left(A-\overline{\lambda}I\right)^{m}\right)$.

מסקנה: $\overline{I\left(\lambda\right)}=I\left(\overline{\lambda}\right)$.

טענה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ נניח כי $\left\langle b_{1},\ldots,b_{k}\right\rangle$ שרשרת היוצרת את $J_{k}\left(\lambda\right)$ אזי $\left\langle \overline{b_{1}},\ldots,\overline{b_{k}}\right\rangle$ שרשרת היוצרת את $J_{k}\left(\overline{\lambda}\right)$.

מכפלה הרמיטית/מכפלה פנימית (מ"פ): יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $\left\langle \cdot,\cdot\right\rangle :V^{2}\to\mathbb{C}$ המקיימת

- לינאריות: $\forall a,b,c\in V.\left\langle \alpha a+\beta b,c\right\rangle =\alpha\left\langle a,c\right\rangle +\beta\left\langle b,c\right\rangle$.
- הרמיטיות: $\forall a,b\in V.\left\langle a,b\right\rangle =\overline{\left\langle b,a\right\rangle }$.
- חיוביות: $\forall a\in V.\left\langle a,a\right\rangle \in\mathbb{R}_{+}$.
- חיוביות ממש: $\forall a\in V.\left(\left\langle a,a\right\rangle =0\right)\iff\left(a=0\right)$.

מרחב מכפלה פנימית (ממ"פ): $\left\langle V,+,\cdot,\left\langle \cdot,\cdot\right\rangle \right\rangle$ שמקיים $\left(\left\langle V,+,\cdot\right\rangle\right.$ מ"ו$\left.\right)\wedge\left(\left\langle \cdot,\cdot\right\rangle\right.$ מ"פ$\left.\right)$.

מכפלה סקלרית סטנדרטית: יהיו $a,b\in\mathbb{C}^{n}$ אזי $\left\langle a,b\right\rangle =\sum_{i=1}^{n}a_{i}\overline{b_{i}}$.

הגדרה: $\left(\overline{A}\right)_{i,j}=\overline{\left(A\right)_{i,j}}$.

מטריצה צמודה: $A^{*}=\overline{A}^{t}$.

מכפלה פנימית על מטריצות: יהיו $A,B\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ אזי $\left\langle A,B\right\rangle =\text{trace}\left(AB^{*}\right)$.

מכפלה פנימית על פונקציות רציפות: יהיו $f,g\in C^{0}\left(\left[0,1\right]\right)$ אזי $\left\langle f,g\right\rangle =\int_{0}^{1}f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx$.

נורמה: יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left\Vert a\right\Vert =\sqrt{\left\langle a,a\right\rangle }$.

ניצב/אורתוגונלי/מאונך: $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ המקיימים $\left\langle a,b\right\rangle =0$.

סימון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ ניצבים אזי $a\perp b$.

קוסינוס: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ ותהא θ הזווית בין a,b אזי $\cos\left(\theta_{a,b}\right)=\frac{\left\langle a,b\right\rangle }{\left\Vert a\right\Vert \cdot\left\Vert b\right\Vert }$.

טענה: $\left(A^{*}\right)^{*}=A$, $\left(\alpha A\right)^{*}=\overline{\alpha}A^{*}$, $\left(A+B\right)^{*}=A^{*}+B^{*}$, $\left(AB\right)^{*}=B^{*}A^{*}$.

מסקנה: יהי $v,u\in\mathbb{C}^{n}$ אזי $\left\langle v,u\right\rangle _{st}=u^{*}\cdot v$.

הגדרה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ אזי $\left\langle v,u\right\rangle _{A}=u^{*}Av$.

מטריצה הרמיטית: $A^{*}=A$.

הגדרה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ סימטרית אזי

- חיובית לחלוטין/מוגדרת חיובית: $\forall v\in\mathbb{C}^{n}\backslash\left\{ 0\right\} .\left\langle Ax,x\right\rangle >0$.
- אי שלילית: $\forall v\in\mathbb{C}^{n}\backslash\left\{ 0\right\} .\left\langle Av,v\right\rangle \geq0$.
- שלילית לחלוטין: $\forall v\in\mathbb{C}^{n}\backslash\left\{ 0\right\} .\left\langle Av,v\right\rangle <0$.
- אי חיובית: $\forall v\in\mathbb{C}^{n}\backslash\left\{ 0\right\} .\left\langle Av,v\right\rangle \leq0$.

מסקנה: (A הרמיטית וחיובית לחלוטין) $\iff$ ($\left\langle \cdot,\cdot\right\rangle _{A}$ מ"פ).

טענה: יהי V ממ"פ

- $\forall v\in V.\left\langle v,0\right\rangle =\left\langle 0,v\right\rangle =0$.
- $\left\langle \sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}v_{i},\sum_{i=1}^{m}\beta_{i}u_{i}\right\rangle =\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_{i}\overline{\beta_{j}}\left\langle v_{i},u_{i}\right\rangle$.

מטריצת גראם: יהי V ממ"פ ויהיו $v_{1},\ldots,v_{n}\in V$ אזי $\left(G\left(v_{1},\ldots,v_{n}\right)\right)_{i,j}=\left\langle v_{i},v_{j}\right\rangle$.

טענה: ($G\left(v_{1},\ldots,v_{n}\right)$ הרמיטית ומוגדרת חיובית) $\iff$ ($v_{1},\ldots,v_{n}$ בת"ל).

מרחק: יהיו v,u אזי $\text{dist}\left(v,u\right)=\left\Vert v-u\right\Vert$.

טענה: $\left\Vert v\right\Vert \geq0$, $\left\Vert v\right\Vert =0\iff v=0$, $\left\Vert \alpha v\right\Vert =\left|\alpha\right|\left\Vert v\right\Vert$.

אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\left\Vert v+u\right\Vert \leq\left\Vert v\right\Vert +\left\Vert u\right\Vert$.

אי שיוויון קושי שוורץ: יהי V ממ"פ אזי $\forall v,u\in V.\left|\left\langle v,u\right\rangle \right|\leq\left\Vert v\right\Vert \left\Vert u\right\Vert$.

טענה: $\text{dist}\left(v,u\right)\geq0$, $\text{dist}\left(v,u\right)=0\iff v=u$, $\text{dist}\left(v,u\right)+\text{dist}\left(u,w\right)\leq\text{dist}\left(v,w\right)$.

משפט פיתגורס: $\left\Vert v-u\right\Vert ^{2}=\left\Vert v\right\Vert +\left\Vert u\right\Vert \iff\text{Re}\left(\left\langle v,u\right\rangle \right)=0$.

משפט הקוסינוסים: $\left\Vert v-u\right\Vert =\left\Vert v\right\Vert ^{2}+\left\Vert u\right\Vert ^{2}-2\left\Vert v\right\Vert \left\Vert u\right\Vert \text{Re}\left(\cos\left(\theta_{v,u}\right)\right)$.

קבוצה אורתוגונלית: קבוצה $S\subseteq V$ המקיימת $\forall v,u\in S.v\neq u\implies v\perp u$.

וקטור יחידה: $v\in V$ המקיים $\|v\|=1$.

נרמול: יהי $0\neq v\in V$ אזי $\frac{v}{\|v\|}$.

קבוצה אורתונורמלית: קבוצה $S\subseteq V$ אורתגונלית המקיימת $\forall v\in S.\ \|v\|=1$.

משפט: תהא $0\notin S\subseteq V$ אורתוגונלית אזי S בת"ל.

טענה: תהא $0\notin B=(v_1,\dots,v_n)$ סדרה אורתוגונלית

- $G(B)=\text{Diag}\left(\|v_1\|^2,\dots\|v_n\|^2\right)$.
- נניח כי B בסיס אזי $([v]_B)_i=\frac{\langle v,v_i\rangle}{\langle v_i,v_i\rangle}$.
- נניח כי B בסיס אזי $\langle v,u\rangle=[v]_B^T G(B)\overline{[u]_B}$.
- שיוויון פרסבל: נניח כי B בסיס אזי $\|v\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n\frac{|\langle v,v_i\rangle|^2}{\|v_i\|^2}}$.

ניצבות לקבוצה: יהי $S\subseteq V$ אזי $v\perp S\iff\forall s\in S.v\perp s$.

טענה: $v\perp\text{span}(v_1,\dots,v_n)\iff\forall i\in[n].v\perp v_i$.

הטלה אורתוגונלית: יהי $e_1,\dots,e_k$ בסיס אורתונורמלי של $U\subseteq V$ נגדיר $P_U:V\to U$ כך $P_U(v)=\sum_{i=1}^k\langle v,e_i\rangle e_i$.

טענה: P_U לינארית, $v-P_U(v)\perp U$, $P_U^2=P_U$, $\text{Im}(P_U)=U$, $\ker(P_U)=\{v\mid v\perp U\}$.

המשלים לניצב: יהי $U\subseteq V$ אזי $U^\perp=\{v\in V\mid v\perp U\}$.

טענה: $U^\perp$ תמ"ו, $U\oplus U^\perp$.

טענה: יהי V מ"ו נ"ס ויהיו $U,W\subseteq V$ ויהי בסיס אורתונורמלי של U

- $V=U\oplus U^\perp$, $v=P_U(v)+(v-P_U(v))$.
- $P_{(U,U^\perp)}=P_U$, $P_{(U^\perp,U)}=Id-P_U$.
- $U\subseteq W\implies W^\perp\subseteq U^\perp$.
- $\dim(U)+\dim\left(U^\perp\right)=\dim(V)$.
- $\left(U^\perp\right)^\perp=U$.
- $(U+W)^\perp=U^\perp\cap W^\perp$, $(U\cap W)^\perp=U^\perp+W^\perp$.

מסקנה: $\langle v,v\rangle=\langle P_U(v),P_U(v)\rangle+\langle v-P_U(v),v-P_U(v)\rangle$.

מרחק ממרחב: יהי $U\subseteq V$ מרחב ויהי $v\in V$ אזי $\text{dist}(v,U)=\inf_{u\in U}(\text{dist}(v,u))$.

משפט: יהי $U\subseteq V$ מרחב ויהי $v\in V$ אזי $\text{dist}(v,U)=\text{dist}(v,P_U(v))$.

תהליך גראם שמידט: בהינתן $v_1,\dots v_n\in V$ בת"ל נגדיר $GS(v_1,\dots v_n)=\left(\frac{v_i-P_{\text{span}(v_1,\dots,v_{i-1})}(v_i)}{\left\|v_i-P_{\text{span}(v_1,\dots,v_{i-1})}(v_i)\right\|}\right)_{i=1}^n$.

טענה: $\text{span}(v_1,\dots v_n)=\text{span}(GS(v_1,\dots v_n))$, $GS(v_1,\dots v_n)$ קבוצה אורתונורמלית.

מסקנה: יהי V ממ"פ ויהי $U\subseteq V$ תמ"ו נ"ס אזי קיים בסיס אורתונורמלי ל־U.

מטריצה אורתוגונלית: מטריצה $A\in M_n(\mathbb{R})$ המקיימת $AA^t=I$.

מטריצה אוניטרית: מטריצה $Q\in M_n(\mathbb{C})$ המקיימת $QQ^*=I$.

טענה: Q אוניטרית $\iff$ עמודות Q בסיס אורתונורמלי לממ"פ $(\mathbb{C}^n,\langle,\rangle_{st})$ $\iff$ Q^t אוניטרית.

טענה: תהא $Q\in M_n(\mathbb{C})$ אזי $|\det(Q)|=1$.

משפט פירוק QR: תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ בעבור $m\geq n$ אזי $A=QR$ בעבור Q אוניטרית ו־R משולשית עליונה.

מסקנה: נניח כי $QR=A\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ אזי $Q\in M_m(\mathbb{C})$, $R\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$.

טענה: נניח כי $A=QR$ ונניח כי $(u_1,\dots,u_r)$ בסיס של $\mathcal{C}(A)$ ו־$(u_1,\dots,u_m)$ השלמה לבסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^m$ אזי

$$(R)_{i,j}=\begin{cases}\langle C_j(A),u_i\rangle & i\leq j\\ 0 & else\end{cases}$$

$$C_i(Q)=u_i$$

טענה: יהיו B,C בסיסים של V אזי $G(C)=\left([Id]_B^C\right)^T G(B)\overline{[Id]_B^C}$.

משפט: B בת"ל $\iff\det(G(B))\neq 0$.

טענה: $\det\left(G\left(B\right)\right)\ge0$.

הגדרה: $\text{Vol}\left(\text{Par}\left(B\right)\right)=\sqrt{\det\left(G\left(B\right)\right)}$.

טענה: $v_{1},\ldots,v_{n}$ אורתוגונלים $\Longleftarrow$ $\text{Vol}\left(\text{Par}\left(v_{1},\ldots,v_{n}\right)\right)=\prod_{i=1}^{n}\left\Vert v_{i}\right\Vert$.

טענה: יהי E בסיס אורתונורמלי ויהי B בסיס אזי $\text{Vol}\left(\text{Par}\left(B\right)\right)=\left|\det\left(\left[Id\right]_{E}^{B}\right)\right|$.

הגדרה: נגדיר יחס שקילות על בסיסים $B\sim C\Longleftrightarrow\det\left(\left[Id\right]_{C}^{B}\right)>0$.

נפח עם אוריאנטציה: יהי E בסיס אורתונורמלי ויהי B בסיס אזי $\text{Vol}^{*}\left(\text{Par}\left(B\right)\right)=\det\left(\left[Id\right]_{E}^{B}\right)$.

טענה: יהי V ממ"פ יהי $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ ויהי B בסיס אורתונורמלי אזי $\left(\left[T\right]_{B}\right)_{i,j}=\left\langle T\left(B_{j}\right),B_{i}\right\rangle$.

הגדרה: יהי V ממ"פ ויהי $v\in V$ נגדיר $a_{v}\in V^{*}$ כך $a_{v}\left(u\right)=\left\langle u,v\right\rangle$.

הגדרה: יהי V ממ"פ נ"ס אזי נגדיר $a:V\to V^{*}$ כך $a\left(v\right)=a_{v}$.

טענה: $a\left(v\right)$ הפיכה ובפרט איזומורפיזם קנוני בין V ל־V^{*}.

משפט: תהא V נ"ס אזי $\forall T\in\text{Hom}\left(V\right).\exists!T^{*}\in\text{Hom}\left(V\right).\forall v,u\in V.\left\langle T\left(v\right),u\right\rangle=\left\langle v,T^{*}\left(u\right)\right\rangle$.

טענה: $T^{*}=a^{-1}\circ T^{t}\circ a$.

טענה: יהיו $T,S\in\text{Hom}\left(V\right)$

- $\left(T+S\right)^{*}=T^{*}+S^{*}$.
- $\left(\alpha T\right)^{*}=\overline{\alpha}T^{*}$.
- $\left(T\circ S\right)^{*}=S^{*}\circ T^{*}$.
- $T^{**}=T$.
- $\left[T^{*}\right]_{B}=\left[T\right]_{B}^{*}$.

מסקנה: יהי B בסיס אורתונורמלי אזי $\left(\left[T^{*}\left(u\right)\right]_{B}\right)_{i}=\left\langle u,T\left(B_{i}\right)\right\rangle$.

איזומטריה: יהיו V,U ממ"פ אזי $T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ הפיכה המקיימת $\forall v,u\in V.\left\langle v,u\right\rangle=\left\langle T\left(v\right),T\left(u\right)\right\rangle$.

טענה: יהיו $S,T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ איזומטריות

- $S\circ T$ איזומטריה.
- S^{-1} איזומטריה.
- $\left\Vert v\right\Vert_{V}=\left\Vert S\left(v\right)\right\Vert_{U}$, $\text{dist}\left(u,v\right)=\text{dist}\left(S\left(v\right),S\left(u\right)\right)$.
- $\theta_{v,u}=\theta_{S\left(v\right),S\left(u\right)}$, $\text{Vol}\left(\text{Par}\left(B\right)\right)=\text{Vol}\left(\text{Par}\left(S\left(B\right)\right)\right)$.

משפט: יהיו V,U ממ"פ אזי $V\cong U\Longleftrightarrow\dim\left(V\right)=\dim\left(U\right)$.

משפט: תהא $T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ התב"ש

- T איזומטריה.
- $T^{*}\circ T=Id$.
- לכל בסיס אורתונומלי B של V מתקיים כי $T\left(B\right)$ בסיס אורתונומלי של U.
- קיים בסיס אורתונומלי B של V עבורו $T\left(B\right)$ בסיס אורתונומלי של U.
- $\forall v,u\in V.\text{dist}\left(v,u\right)=\text{dist}\left(T\left(v\right),T\left(u\right)\right)$.

מסקנה: יהי B בסיס אזי (T איזומטריה) $\Longleftrightarrow$ ($\left[T\right]_{B}^{-1}=\left[T\right]_{B}^{*}$).

מסקנה: תהא T איזומטריה ויהי λ ע"ע אזי $\left|\lambda\right|=1$.

העתקה קונפורמית: $T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ המקיימת $\forall v,u\in V.\theta_{v,u}=\theta_{T\left(v\right),T\left(u\right)}$.

טענה: תהא $T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ איזומטריה אזי λT קונפורמית.

העתקה שומרת נפח: $T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ המקיימת $\text{Vol}\left(\text{Par}\left(B\right)\right)=\text{Vol}\left(\text{Par}\left(T\left(B\right)\right)\right)$.

העתקה הרמיטית: $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ המקיימת $T^{*}=T$.

העתקה נורמלית: $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ המקיימת $TT^{*}=T^{*}T$.

משפט: יהי B בסיס אורתונורמלי ויהי C בסיס אזי (C אורתונורמלי) $\Longleftrightarrow$ ($\left[Id\right]_{C}^{B}$ אוניטרית).

טענה: A אוניטרית $\Longleftrightarrow$ T_{A} איזומטריה.

הגדרה:

- $U\left(n\right)=\left\{ Q\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)\mid QQ^{*}=I\right\}$.
- $SU\left(n\right)=\left\{ Q\in U\left(n\right)\mid\det\left(Q\right)=1\right\}$.
- $O\left(n\right)=\left\{ A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)\mid AA^{t}=I\right\}$.

- $SO(n)=\{A\in O(n)\mid \det(A)=1\}$.

טענה: $\langle U(n),\cdot\rangle$, $\langle SU(n),\cdot\rangle$, $\langle O(n),\cdot\rangle$, $\langle SO(n),\cdot\rangle$ חבורות.

טענה: תהא $T\in \mathrm{Hom}(V)$ אזי $(\ker(T)=\mathrm{Im}(T^*)^{\perp})\wedge(\mathrm{Im}(T)=\ker(T^*)^{\perp})$.

טענה: תהא $T\in \mathrm{Hom}(V)$ אזי (T אוניטריות)$\vee$(T הרמיטיות) $\Longleftarrow$ (T נורמלית).

טענה: תהא T נורמלית אזי $\forall v,u\in V.\langle T(v),T(u)\rangle=\langle T^*(v),T^*(u)\rangle$.

מסקנה: $\|T(v)\|=\|T^*(v)\|$, $T^*(v)\perp T^*(u)\Longleftrightarrow T(v)\perp T(u)$.

לכסינה אוניטרית/לכסינה אורתוגונלית: $T\in \mathrm{Hom}(V)$ עבורה קיים בסיס אורתונורמלי B כך ש־$[T]_B$ אלכסונית.

דמיון אוניטרי: $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ המקיימות כי קיימת מטריצה P אוניטרית עבורה $A=PBP^*$.

לכסינה אוניטרית/לכסינה אורתוגונלית: A אשר דומה אוניטרית למטריצה אלכסונית.

טענה: תהא A מטריצה הרמיטית/אוניטרית/נורמלית ותהא B דומה אוניטרית ל־A אזי B הרמיטית/אוניטרית/נורמלית.

למה: אם W הוא T אינו' אז $W^{\perp}$ הוא T^* אינו'.

למה: T נורמלית אז לכל λ,v מתקיים $T^*(v)=\overline{\lambda}v\Longleftrightarrow T(v)=\lambda v$.

טענה: אם T נורמלית אז $T-\lambda I$ נורמלית.

טענה: אם T נורמלית אז ו"ע לע"ע שונים ניצבים.

למה: (T נורמלית)$\wedge$(f_T מתפרק לגורמים לינארים) $\Longleftrightarrow$ (T ניתנת ללכסון אוניטרי).

משפט הפירוק הספקטרלי: $A\in M_n(\mathbb{C})$ ניתנת ללכסון אוניטרי $\Longleftrightarrow$ A נורמלית.

מסקנה: תהא $A\in M_n(\mathbb{C})$ נורמלית

- $A=A^*\Longleftrightarrow \mathrm{sols}_{\mathbb{C}}(f_A)\subseteq\mathbb{R}$.
- $AA^*=I\Longleftrightarrow \mathrm{sols}_{\mathbb{C}}(f_A)\subseteq\{x\in\mathbb{C}\mid \|x\|=1\}$.

משפט הפירוק הספקטרלי: $A\in M_n(\mathbb{R})$ ניתנת ללכסון אורתוגונלי $\Longleftrightarrow$ A סימטרית.

משפט: תהא $T\in \mathrm{Hom}(V)$ אזי (T נורמלית) $\Longleftrightarrow$ $(\exists p\in\mathbb{R}[x].T^*=p(T))$.

טענה: תהא $T\in \mathrm{Hom}(V)$ מעל $\mathbb{R}$ אזי קיים תמ"ו $U\subseteq V$ T־אינו' המקיים $\dim(U)\le 2$.

משפט: תהא T העתקה נורמלית אזי קיים בסיס B אורתונורמלי עבורו

$$[T]_B=\left(\begin{array}{ccc|cccccc}
\lambda_1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & \lambda_k & & & & & & \\
\hline
 & & & a_1 & b_1 & & & & \\
 & & & -b_1 & a_1 & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & & a_r & b_r \\
 & & & & & & & -b_r & a_r
\end{array}\right)$$

מסקנה: תהא T העתקה אורתוגונלית אזי קיים בסיס B אורתונורמלי עבורו

$$[T]_B = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ \hline &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ \hline &&&&&& R(\theta_1) && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& R(\theta_k) \end{array}\right)$$

לכסון סימולטני אוניטרי: יהיו $T, S \in \operatorname{Hom}(V)$ נורמליות ומתחלפות אזי קיים בסיס B אורתונורמלי עבורו $[T]_B, [S]_B$ אלכסוניות.

תבנית בילינארית: יהיו V, W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $f : V \times W \to \mathbb{C}$ המקיימת

- לינאריות ברכיב הראשון: $f(\alpha v + \beta u, w) = \alpha f(v, w) + \beta f(u, w)$.
- לינאריות ברכיב השני: $f(w, \alpha v + \beta u) = \alpha f(w, v) + \beta f(w, u)$.

טענה: יהיו $\varphi \in V^*$, $\psi \in W^*$ אזי $f(v, w) = \varphi(v)\psi(w)$ תבנית בילינארית.

מרחב התבניות הבילינאריות: $\operatorname{Bil}(V, W) = B(V, W) = \{T \in V \times W \to \mathbb{F} \mid \text{תבנית בילינארית } T\}$.

טענה: $B(V, W)$ מ"ו.

טענה: תהא $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ אזי $f_A(v, u) = v^t A u$ תבנית בילינארית.

טענה: תהא $f \in B(\mathbb{F}^m, \mathbb{F}^n)$ אזי $\exists A \in M_{m \times n}(\mathbb{F}) . f = f_A$.

מסקנה: תהא $f_A \in B(\mathbb{F}^m, \mathbb{F}^n)$ אזי $(A)_{i,j} = f_A(e_i, e_j)$.

מטריצה מייצגת: תהא $f \in B(V, W)$ ויהיו C בסיס של V וגם B בסיס של W אזי המטריצה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ עבורה $f_A(x, y) = f\left(Q_C^{-1}(x), Q_B^{-1}(y)\right)$.

סימון: המטריצה המייצגת של f על פי הבסיסים C, B היא $[f]_B^C = M(f)$.

טענה: $\left([f]_B^C\right)_{i,j} = f(v_i, v_j)$.

מסקנה: $f(v, u) = [v]_C^t \cdot [f]_B^C \cdot [u]_B$.

משפט: $[*]_B^C : B(V, W) \to M_{\dim(V) \times \dim(W)}(\mathbb{F})$ המוגדרת $[*]_B^C(f) = [f]_B^C$ היא איזומורפיזם.

מסקנה: $\dim(B(V, W)) = \dim(V) \cdot \dim(W)$.

משפט: $[f]_{B_1}^{C_1} = \left([Id]_{C_2}^{C_1}\right)^t [f]_{B_2}^{C_2} [Id]_{B_2}^{B_1}$.

דרגה של תבנית: תהא $f \in B(V, W)$ אזי $\operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}\left([f]_C^B\right)$.

מסקנה: $[f]_C^B = \left(\begin{array}{c|c} I_{\operatorname{rank}(f)} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

סימון: $B(V, V) = B(V)$.

סימון: אם $f \in B(V)$ אזי $[f]_C = [f]_C^C$.

מטריצות חופפות: $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ המקיימות $\exists P \in M_n^{\times}(\mathbb{F}) . P^t B P = A$.

טענה: יהיו A, B חופפות אזי

- $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.
- $\exists c \in \mathbb{F} . |A| = c^2 |B|$.

תבנית סימטרית: $f \in B(V)$ המקיימת $\forall v, u \in V . f(v, u) = f(u, v)$.

תבנית אנטי סימטרית: $f \in B(V)$ המקיימת $\forall v, u \in V . f(v, u) = -f(u, v)$.

תבנית מנוונת: $f \in B(V)$ המקיימת $\exists v \in V \setminus \{0\} . (\forall w \in V . f(v, w) = 0) \vee (\forall w \in V . f(w, v) = 0)$.

הגדרה: תהא $\varphi \in B(V)$ מעל $\mathbb{F}$ המקיימת $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ אזי
- $\varphi^+(u,v) = \frac{\varphi(u,v)+\varphi(v,u)}{2}$.
- $\varphi^-(u,v) = \frac{\varphi(u,v)-\varphi(v,u)}{2}$.

משפט: תהא $\varphi \in B(V)$ אזי (φ סימטרית) $\iff$ ($[\varphi]_C$ סימטרית).

תבנית ריבועית: תהא $f \in B(V)$ תבנית סימטרית אזי $Q_f : V \to \mathbb{F}$ המקיימת $Q_f(v) = f(v,v)$.

משפט הפולריזציה: יהי $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ ותהא $f \in B(V)$ סימטרית אזי
- $f(v,w) = \frac{Q_f(v+v)-Q_f(v)-Q_f(w)}{2}$.
- $f \neq 0 \Longrightarrow Q_f \neq 0$.

לכסון תבניות: נניח $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ תהא $f \in B(V)$ תבנית סימטרית אז קיים בסיס B של V עבורו $[f]_B$ אלכסונית.

מסקנה: תהא $f \in B(V)$ מעל $\mathbb{C}$ אזי קיים בסיס B של V עבורו $[f]_B = \left(\begin{array}{c|c} I_{\text{rank}(f)} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

מסקנה: תהא $f \in B(V)$ מעל $\mathbb{R}$ אזי קיים בסיס B של V עבורו $[f]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$.

משפט ההתמדה של סילבסטר: נניח כי $[f]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ וגם $[f]_C = \text{Diag}(I_{p'}, -I_{q'}, 0)$ אזי $\langle p,q \rangle = \langle p',q' \rangle$.

אינדקס ההתמדה החיובי: נניח כי $[f]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ מעל $\mathbb{R}$ אזי p.

סימון: אינדקס ההתמדה החיובי הוא $\sigma_+(f)$.

אינדקס ההתמדה השלילי: נניח כי $[f]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ מעל $\mathbb{R}$ אזי q.

סימון: אינדקס ההתמדה החיובי הוא $\sigma_-(f)$.

הסיגנטורה/החתימה של תבנית: תהא f תבנית מעל $\mathbb{R}$ אזי $(\sigma_+(f), \sigma_-(f))$.

סימון: $\sigma_0(f) = \dim(V) - \text{rank}(f)$.

המינור הפינתי: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי נגדיר $A_{(k)} \in M_k(\mathbb{R})$ כך $\left(A_{(k)}\right)_{i,j} = (A)_{i,j}$.

הדטרמיננטה הפינתית: $\Delta_k = \left|A_{(k)}\right|$, $\Delta_0 = 1$.

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית עבורה $\Delta_k \neq 0$. $\forall k \in [n]$ אזי קיימת $C \in M_n(\mathbb{R})$ משולשית תחתונה עבורה CAC^t אלכסונית.

קריטריון סילבסטר: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית עבורה $\Delta_k \neq 0$. $\forall k \in [n]$ אזי $\sigma_-(A) = |\{i \in [n] \mid \Delta_i \Delta_{i-1} < 0\}|$.

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית עבורה $\Delta_k \neq 0$. $\forall k \in [n]$ אזי (A מוגדרת חיובית) $\iff$ ($\forall i \in [n].\Delta_i > 0$).

משפט: יהי $\mathbb{F}$ שדה המקיים $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ וגם $\forall \alpha \in \mathbb{F}.\exists \beta \in \mathbb{F}.\beta^2 = \alpha$ ותהא $T \in B(V)$ סימטרית אזי הסיגנטורה היא $(\text{rank}(T), 0)$.

שיטת לגראנז' על פי השלמה לריבוע: תהא Q_f תבנית ריבועית אזי קיימת החלפת משתנים עבורה $Q_f(v) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ בפרט $[Q_f]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ באשר B בסיס המשתנים המוחלפים.

הגדרה: תהא $T \in B(V)$ סימטרית מעל $\mathbb{R}$ אזי
- חיובית לחלוטין/מוגדרת חיובית: $\forall v \in V \backslash \{0\}.T(v,v) > 0$.
- אי שלילית: $\forall v \in V \backslash \{0\}.T(v,v) \geq 0$.
- שלילית לחלוטין: $\forall v \in V \backslash \{0\}.T(v,v) < 0$.
- אי חיובית: $\forall v \in V \backslash \{0\}.T(v,v) \leq 0$.

טענה: תהא $T \in B(V)$ סימטרית ותהא $A = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ מטריצה מייצגת אזי
- T חיובית לחלוטין $\iff$ $A = I$.
- T אי שלילית $\iff$ $A = \text{Diag}(1,\ldots,1,0,\ldots,0)$.
- T שלילית לחלוטין $\iff$ $A = -I$.
- T אי חיובית $\iff$ $A = \text{Diag}(-1,\ldots,-1,0,\ldots,0)$.

משפט: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ הרמיטית התב"ש
- T_A מוגדרת חיובית.
- לכל $T \in \text{Hom}(V)$ המטריצה $[T]_B = A$ מוגדרת חיובית.
- קיים $T \in \text{Hom}(V)$ כך שהמטריצה $[T]_B = A$ מוגדרת חיובית.
- כל הע"ע של A ממשיים חיוביים ממש.

משפט: תהא A סימטרית מייצגת של $f\in B\left(V\right)$ סימטרית מעל $\mathbb{R}$ אזי

$$\sigma_{+}\left(f\right)=\#\left\{ \lambda\mid\lambda>0\wedge\lambda\text{ ע"ע}\right\}$$
$$\sigma_{-}\left(f\right)=\#\left\{ \lambda\mid\lambda<0\wedge\lambda\text{ ע"ע}\right\}$$
$$\sigma_{0}\left(f\right)=\#\left\{ \lambda\mid\lambda=0\wedge\lambda\text{ ע"ע}\right\}$$

משפט: תהא $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ הרמיטית אי שלילית מעל $\mathbb{C}$ אזי קיימת ויחידה $R\in\text{Hom}\left(V\right)$ המקיימת $R^{2}=T$.

סימון: אם $R^{2}=T$ אזי $R=\sqrt{T}$.

משפט הפירוק הפולרי של העתקות לינאריות הפיכות: תהא $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ הפיכה אזי קיימות ויחידות $U\in\text{Hom}\left(V\right)$ אוניטרית ו־$R\in\text{Hom}\left(V\right)$ מוגדרת חיובית הרמיטית עבורן מתקיים $T=UR$.

מסקנה: תהא $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ הפיכה אזי נגדיר $R=\sqrt{TT^{*}}$, $U=T\circ\left(\sqrt{TT^{*}}\right)^{-1}$.

ערכים סינגולרים: תהא $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ אזי הע"ע של $\sqrt{TT^{*}}$.

טענה: $f_{TT^{*}}\left(x\right)=f_{T^{*}T}\left(x\right)$.

פירוק SVD: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ אזי קיימות U,V אוניטריות וקיימת D אלכסונית אי שלילית המקיימות $A=UDV$.

טענה: נניח כי $A=UDV$ פירוק SVD ונניח כי $\alpha_{1}\ldots\alpha_{n}$ הערכים הסינגולרים של A אזי $D=\text{Diag}\left(\alpha_{1},\ldots,\alpha_{n}\right)$.

תבנית סימפלקטית: תבנית בילינארית אנטי סימטירת לא מנוונת.

הגדרה: תהא $\omega\in B\left(V\right)$ סימפלקטית ויהי $W\subseteq V$ תמ"ו אזי $W^{\omega}=\left\{ v\in V\mid\forall w\in W.\omega\left(v,w\right)=0\right\}$.

מרחב לגרנז'יאני: תהא $\omega\in B\left(V\right)$ סימפלקטית אזי תמ"ו $W\subseteq V$ המקיים $W^{\omega}=W$.

מבנה מרוכב: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי איזומורפיזם $J\in\text{Hom}\left(V\right)$ המקיים $J^{2}=-I$.

מבנה תואם תבנית: מבנה מרוכב J ותבנית סימפלקטית ω המקיימות $\left(\forall v\in V.\omega\left(Jv,v\right)>0\right)\wedge\left(\forall v,u\in V.\omega\left(Jv,Ju\right)=\omega\left(v,u\right)\right)$.

שניונית: פולינום בנעלמים $x_{1}\ldots x_{n}$ מהצורה $c+2\sum_{i=1}^{n}b_{i}x_{i}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}\left(A\right)_{i,j}x_{i}x_{j}+\sum_{i=1}^{n}\left(A\right)_{i,i}x_{i}^{2}=0$.

מסקנה: מטריציונית שניונית היא $c+2b^{t}x+x^{t}Ax=0$.

המטריצה המצומצמת של שניונית: A.

מסקנה: מטריצניות שניונית היא $\left(\begin{array}{cccc}x_{1} & \ldots & x_{n} & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}A & b\\ b & c\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}x_{1}\\ \vdots\\ x_{n}\\ 1\end{array}\right)=0$.

המטריצה המורחבת של שניונית: $\left(\begin{array}{cc}A & b\\ b & c\end{array}\right)$.

איזומטריה אופיינית: $f:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}^{3}$ המקיימת כי קיימת איזומטריה T וקיים $w\in\mathbb{R}^{3}$ עבורם $f\left(x\right)=T\left(x\right)+w$.