פעולה בינארית: פונקציה $A \times A \to A : *$ ונסמן $a * b := * (\langle a, b \rangle)$.

אגודה: תהא G קבוצה ותהא $*$ פעולה בינארית אזי $\langle G, * \rangle$ המקיימת

- אסוציטיביות/קיבוציות: $\forall a, b, c \in A . a * (b * c) = (a * b) * c$.

מונואיד: אגודה $\langle G, * \rangle$ המקיימת

- איבר יחידה: $\exists e \in A . \forall g \in G . e * g = g * e = g$.

סימון: איבר יחידה של $\langle G, * \rangle$ הוא e_G.

חבורה: מונואיד $\langle G, * \rangle$ המקיימת

- איבר הופכי/נגדי: $\forall g \in G . \exists h \in A . g * h = h * g = e_G$.

סימון: איבר הופכי של a הוא a^{-1}.

טענה: איבר יחידה הוא יחיד, איבר הופכי הוא יחיד.

חזקה: $a^n = \begin{cases} a * a^{n-1} & n > 0 \\ e_G & n = 0 \\ a^{-1} * a^{n+1} & n < 0 \end{cases}$.

טענה: $(a^n)^k = a^{nk}$, $a^{n+k} = a^n \cdot a^k$.

קומוטטיביות/חילופיות/אבליות: $\forall a, b \in A . a * b = b * a$.

הגדרה: $GL_n(\mathbb{F})$ היא קבוצת המטריצות ההפיכות ב־$M_n(\mathbb{F})$.

טענה: $\langle GL_n(\mathbb{F}), \cdot \rangle$ חבורה לא אבלית.

הגדרה: נגדיר $S_A = A \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} A$, נסמן $S_n = S_{[n]}$.

טענה: $\langle S_n, \circ \rangle$ חבורה לא אבלית.

סדר: תהא G חבורה סופית אזי $o(G) = \text{ord}(G) = |G|$.

הגדרה: יהיו $\langle G, \cdot \rangle, \langle H, \cdot \rangle$ חבורות אזי $\langle G \times H, \cdot \rangle$ באשר $\langle g_1, h_1 \rangle \cdot \langle g_2, h_2 \rangle = \langle g_1 g_2, h_1 h_2 \rangle$.

הגדרה: $\mathbb{Z}_n = \{0, \ldots, n-1\}$.

טענה: $\langle \mathbb{Z}_n, + \rangle$ חבורה באשר $a + b = a + b \mod n$.

חבורת קליין: $\langle \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, + \rangle$.

טענה: $\forall a, b, c \in G . a * b = a * c \Longrightarrow b = c$.

חבורה ציקלית/מעגלית: חבורה G המקיימת $\exists g \in G . G = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

טענה: $\mathbb{Z}_n$ ציקלית.

סימון: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

טענה: $\left\langle \langle g \rangle, \cdot\restriction_{\langle g \rangle} \right\rangle$ חבורה.

סדר: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $o(g) = \text{ord}(g) = \min(n \in \mathbb{N}_+ \mid g^n = e)$.

טענה: $\text{ord}(g) = |\langle g \rangle|$.

הגדרה: יהיו G, H חבורות

- הומומורפיזם: $\varphi : G \to H$ המקיימת $\varphi(xy) = \varphi(x) \varphi(y)$.
- מונומורפיזם/שיכון: $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם חח"ע.
- אפימורפיזם: $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם על.
- איזומורפיזם: $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם הפיך.
- אוטומורפיזם: איזומורפיזם עבורו $G = H$.

סימון: $G \hookrightarrow H$ קבוצת השיכונים בקבוצה $G \to H$.

הגדרה: $Aut(G)$ קבוצת האוטומורפיזם בקבוצה $G \to G$.

טענה: $\langle Aut(G), \circ \rangle$ חבורה.

סימון: נניח כי G, H חבורות איזומורפיות אזי $G \cong H$.

טענה: $\cong$ הוא יחס שקילות.

טענה: אם $G \cong H$ אזי (G ציקלית) $\Longleftrightarrow$ (H ציקלית).

הגדרה: תהא $\langle G, * \rangle$ חבורה אזי $\langle G^{op}, \cdot \rangle$ חבורה באשר $g \cdot h = h * g$.

טענה: $G \cong G^{op}$.

טענה: יהי φ הומומורפיזם אזי $(\varphi(e)=e)\wedge(\varphi(g^{-1})=\varphi(g)^{-1})$.

תת חבורה: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה ותהא $H\subseteq G$ אזי החבורה $\langle H,*_{\restriction_H}\rangle$.

סימון: אם H תת חבורה של G אזי $H\le G$.

בוחן תת חבורה: תהא G חבורה ותהא $H\subseteq G$ אזי $H\le G$ אמ"מ
- $e\in H$.
- $\forall a,b\in H.ab\in H$.
- $\forall a\in H.a^{-1}\in H$.

למה: $H\le G\Longrightarrow e_G=e_H$.

טענה: $G\le G$, $\{e_G\}\le G$.

טענה: יהיו G,H חבורות ויהי $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם אזי $\operatorname{Im}(\varphi)\le H$.

הגדרה: תהא G חבורה יהי $g\in G$ ויהיו $A,B\subseteq G$
- מחלקה שמאלית: $gA=\{ga\mid a\in A\}$.
- מחלקה ימנית: $Ag=\{ag\mid a\in A\}$.
- $AB=\{ab\mid a\in A\wedge b\in B\}$.
- $A^{-1}=\{a^{-1}\mid a\in A\}$.

טענה: יהיו $H\le G$ חבורות אזי $HH=H$, $H^{-1}=H$, $\forall h\in H.hH=Hh=H$.

הצמדה: יהיו $H\le G$ חבורות ויהי $g\in G$ אזי $gHg^{-1}\le G$.

סימון: $H^g=gHg^{-1}$.

למה: יהיו $H\le G$ ויהיו $g_1,g_2\in G$ התב"ש
- $g_1H=g_2H$.
- $g_1H\subseteq g_2H$.
- $g_1H\cap g_2H\neq\varnothing$.
- $g_1\in g_2H$.
- $g_2^{-1}g_1\in H$.

מנה: $G/H=\{gH\mid g\in G\}$.

אינדקס: $[G:H]=|G/H|$.

משפט לגראנז': יהיו $H\le G$ חבורות סופיות אזי $|G|=|H|\cdot[G:H]$.

מסקנה: $|H|\mid|G|$, $[G:H]\mid|G|$.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $g\in G$ אזי $\operatorname{ord}(g)\mid\operatorname{ord}(G)$.

מסקנה: תהא G חבורה אזי $(\operatorname{ord}(G)$ ראשוני$)\Longleftarrow(G$ ציקלית$)$.

מסקנה: תהא G חבורה מסדר p ראשוני אזי $G\cong\mathbb{Z}_p$.

טענה: אם G ציקלית אינסופית אזי $G\cong\mathbb{Z}$.

תת חבורה נורמלית: תהא G חבורה אזי חבורה H המקיימת $\forall g\in G.gH=Hg$.

סימון: אם H תת חבורה נורמלית של G אזי $H\lhd G$.

למה: התב"ש
- $N\lhd G$.
- $\forall g\in G.gNg^{-1}=N$.
- $\forall g\in G.gNg^{-1}\subseteq N$.

טענה: אם $N\lhd G$ אזי $(g_1N)\cdot(g_2N)=g_1g_2N$ מוגדרת היטב.

חבורת המנה: אם $N\lhd G$ אזי $\langle G/H,\cdot\rangle$ חבורה.

טענה: תהא G חבורה אבלית אזי $(H\le G)\Longleftrightarrow(H\lhd G)$.

גרעין: יהיו G,H חבורות ויהי $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם אזי $\ker(\varphi)=\{g\in G\mid\varphi(g)=e_H\}$.

טענה: $\ker(\varphi)\lhd G$.

טענה: יהי φ הומומורפיזם אזי $(\varphi$ מונומורפיזם$)\Longleftrightarrow(\ker(\varphi)=\{e\})$.

טענה: יהיו $H\le G$ חבורות אזי $([G:H]=2)\Longrightarrow(H\lhd G)$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\left(\bigcap_{i=1}^{n}N_i\lhd G\right)\Longrightarrow\left(\forall i\in[n].N_i\lhd G\right)$.

טענה: יהיו $H\le G$, $N\lhd G$ אזי $(HN\le G)\wedge(NH\le G)$.

מסקנה: יהיו $N,H\lhd G$ אזי $HN\lhd G$.

טענה: יהיו $H_1,H_2\le H$ סופיות אזי $|H_1H_2|=\frac{|H_1|\cdot|H_2|}{|H_1\cap H_2|}$.

משפט האיזומורפיזם הראשון: יהי $\varphi:G\to K$ הומומורפיזם אזי $G/\ker(\varphi)\cong\text{Im}(\varphi)$.

הגדרה: $C=\left\{e^{2\pi ix}\mid x\in\mathbb{R}\right\}$.

טענה: $\langle C,\cdot\rangle$ חבורה.

הגדרה: יהי $\langle A,*\rangle$ מונואיד אזי $A^{\times}=\{a\in A\mid\exists h\in A.a*h=h*a=e_A\}$.

מסקנה: $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong C$, $\mathbb{C}^{\times}/C=\mathbb{R}^{\times}$.

הגדרה: $SL_n(\mathbb{F})=\{A\in GL_n(\mathbb{F})\mid\det(A)=1\}$.

טענה: $SL_n(\mathbb{R})\lhd GL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^{\times}$.

ההעתקה הקנונית: יהיו $N\lhd G$ חבורות אזי $\pi:G\to G/N$ המוגדרת $\pi(g)=gN$.

טענה: π אפימורפיזם.

משפט ההומומורפיזם: יהי $\varphi:H\to H$ הומומורפיזם ותהא $N\le\ker(\varphi)$ אזי קיים ויחיד הומומורפיזם $\varphi^*:G/N\to H$ המקיים $\varphi^*\circ\pi=\varphi$.

מסקנה: $(\text{Im}(\varphi)=\text{Im}(\varphi^*))\wedge$(חח"ע φ^*) $\Longleftrightarrow(\ker(\varphi)=N)$.

משפט האיזומורפיזם השני: יהיו G,H,N חבורות המקיימות $H\le G$, $N\lhd G$, $HN\lhd G$ אזי $HN/N\cong H/(H\cap N)$.

טענה: יהיו G,H,N חבורות המקיימות $H\le G$, $N\lhd G$ אזי $H\cap N\lhd H$.

תת חבורה יוצרת: תהא G חבורה ותהא $A\subseteq G$ אזי $\langle A\rangle=\{e\}\cup\bigcup_{n=0}^{\infty}\left\{\prod_{i=1}^{n}a_i\mid a\in\left(A\cup A^{-1}\right)^n\right\}$.

טענה: $\langle A\rangle$ היא תת חבורה.

חבורה נוצרת סופית (נ"ס): חבורה G עבורה קיימת $A\subseteq G$ סופית המקיימת $\langle A\rangle=G$.

מחזור/חישוקון/ציקלוס באורך k: תמורה π המקיימת $\pi(b)=\begin{cases}b & b\notin\langle a_1,\ldots,a_k\rangle\\ a_{)\iota i\in[k].b=a_i(+1 \mod k} & else\end{cases}$.

סימון: $\pi=(a_1\ldots a_k)$.

חילוף/היפוך//חישוקון: מחזור מאורך 2.

למה: תהא $\sigma\in S_n$ אזי קיימים ויחידים $\{\pi_1\ldots\pi_r\}$ מחזורים זרים מאורך גדול מ־1 המקיימים $\sigma=\prod_{i=1}^{r}\pi_i$.

טענה: תהא $\sigma\in S_n$ אזי קיימים $\{\pi_1\ldots\pi_r\}$ חילופים המקיימים $\sigma=\prod_{i=1}^{r}\pi_i$.

משפט: נניח כי $\prod_{i=1}^{m}p_i=\prod_{i=1}^{\ell}\pi_i$ בעבור p_i,π_i חילופים אזי $\ell=m \mod 2$.

סימון: תהא $\sigma\in S_n$ מכפלה של k חילופים אזי $\text{sgn}(\sigma)=\text{sign}(\sigma)=(-1)^k$.

טענה: $\text{sign}:S_n\to\{\pm1\}$ הומומורפיזם.

תמורה זוגית/איזוגית: תהא $\sigma\in S_n$ אזי (זוגית $\sigma\Longleftarrow\text{sign}(\sigma)=1$)$\wedge$(איזוגית $\sigma\Longleftarrow\text{sign}(\sigma)=-1$).

סימון: $A_n=\{\sigma\in S_n\mid\text{sign}(\sigma)=1\}$.

טענה: $A_n\lhd S_n$, $|A_n|=\frac{|S_n|}{2}$.

מסקנה: $[S_n:A_n]=2$, $S_n/A_n\cong\{\pm1\}$.

טענה: יהיו $N\lhd G$ חבורות ותהא $N\le H\le G$ חבורה אזי $(N\lhd H)\wedge(H/N\le G/N)$.

משפט האיזומורפיזם השלישי: יהיו $N\lhd G$ חבורות חבורות אזי $\varphi:\{H\mid N\le H\le G\}\to\{H\mid H\le G/N\}$ המוגדרת $\varphi(H)=H/N$ איזומורפיזם.

מסקנה: יהיו $N\lhd G$ חבורות ויהיו $N\le A_1\ldots A_n\le G$ חבורות

- $A_1/N\le A_2/N\Longleftrightarrow A_1\le A_2$.
- $\bigcap_{i=1}^{n}(A_i/N)=\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)/N$.
- $A_1/N\lhd A_2/N\Longleftrightarrow A_1\lhd A_2$.
- $A_1\lhd A_2\Longrightarrow{}^{(A_2/N)}/_{(A_1/N)}\cong A_2/A_1$.

הלמה של צננהאוס/למת הפרפר: יהיו $A_1\lhd A\le G$, $B_1\lhd B\le G$

- $A_1(A\cap B_1)\lhd A_1(A\cap B)\le G$.
- $B_1(A\cap B)/B_1(A_1\cap B)\cong A_1(A\cap B)/A_1(A\cap B_1)$.

תת חבורת האלכסון: תהא G חבורה אזי $\Delta = \{\langle g, g\rangle \mid g \in G\}$.

טענה: $G \cong \Delta$, ($\Delta \lhd G^2$) $\iff$ (G אבלית).

קומוטטור: תהא G חבורה ויהיו $g, h \in G$ אזי $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$.

טענה: g, h מתחלפים $\iff$ $[g, h] = e$.

תת חבורת הקומוטטור: תהא G חבורה אזי $G' = \{[g, h] \mid g, h \in G\}$.

טענה: $G' \lhd G$.

טענה: יהיו $N \lhd G$ חבורות אזי (G/N אבלית) $\iff$($G' \leq N$).

טענה: יהיו $H \leq G$ חבורות סופיות באשר H היחידה בעלת סדר $|H|$ אזי $H \lhd G$.

המרכז של חבורה: תהא G חבורה אזי $Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G . hg = gh\}$.

טענה: $Z(G) \lhd G$.

המרכז של איבר: תהא G חבורה ויהי $a \in G$ אזי $C_G(a) = \{g \in G \mid aga = g\}$.

טענה: $C_G(a) \leq G$.

מסקנה: $Z(G) = G \iff G$ אבלית $\iff G' = \{e\}$.

הנורמליזטור/המשמר: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $N_G(g) = \left\{h \in G \mid hgh^{-1} = g\right\}$.

טענה: $N_G(g) \leq G$.

הנורמליזטור/המשמר של חבורה: יהיו $H \leq G$ חבורות אזי $N_G(H) = \left\{g \in G \mid gHg^{-1} = H\right\}$.

טענה: $a \in Z(G) \iff N_G(a) = G$.

פעולה משמאל: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $\pi : G \times X \to X$ המקיימת

- $\pi(g_1 g_2, x) = \pi(g_1, \pi(g_2, x))$.
- $\pi(e, x) = x$.

סימון: $\pi(g, x) = g * x$.

הגדרה: תהא G פועלת על X אזי $x_1 \sim x_2 \iff \exists g \in G . g * x_1 = x_2$.

טענה: $\sim$ יחס שקילות על X.

הגדרה: מחלקת השקילות של $\sim$ נקראת מסלול-G.

תת חבורת המיצב של x: תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x \in X$ אזי $G_x = \{g \in G \mid g * x = x\}$.

למה: נניח כי G פועלת על X

- $G_x \leq G$.
- $g_2^{-1} g_1 \in G_x \iff g_1 * x = g_2 * x$.

אורך המסלול של x: תהא G חבורה הפועלת על X אזי $[G : G_x] = |[x]_\sim|$.

למת האיפיון לתת חבורות של חבורות ציקליות: תהא $G = \langle a \rangle$ חבורה ציקלית מסדר n יהי $d|n$ אזי $\left\langle a^{\frac{n}{d}} \right\rangle$ תת החבורה היחידה של G מסדר d.

מסקנה: תהא G חבורה הפועלת על X סופית ותהא $\{x_1, \ldots, x_n\}$ מערכת נציגים מסלולי G אז $|X| = \sum_{i=1}^{n} [G : G_{x_i}]$.

מחלקות צמידות: תהא G חבורה סופית אזי מחלקת השקילות של פעולת ההצמדה של G על עצמה.

משוואת המחלקים: תהא $\{x_1 \ldots x_n\}$ מערכת נציגים למחלקות הצמידות אזי $|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{n} [G : C_G(x_i)]$.

טענה: תהא G חבורה הפועלת על X אזי $\varphi : G \to S_X$ המוגדרת $\varphi(g)(x) = \pi(g, x)$ הומומורפיזם.

מסקנה: יהיו $H \leq G$ חבורות נניח כי $[G : H] = n < \infty$ וגם $K = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$

- $K \lhd G$.
- $K \leq H$.
- G/K איזומורפית לתת חבורה של S_n.
- (G סופית)$\wedge$($|G| \nmid n!$) $\Longleftarrow$ ($K \neq \{e\}$).

חבורה פשוטה: חבורה G כך שכל התת חבורות הנורמליות שלה הן $G, \{e\}$.

מסקנה: יהיו $H \leq G$ חבורות ההיח כי $|G| \nmid [G : H]!$ אזי G אינה פשוטה.

למה: A_n נוצרת על ידי המחזורים מאורך 3 ב־S_n.

טענה: יהי $n \geq 5$ אם $N \lhd A_n$ מכילה מחזור מאורך 3 אזי $N = A_n$.

טענה: יהי $n \geq 5$ אם $\{e\} \neq N \lhd A_n$ אזי יש מחזור מאורך 3 ב־N.

משפט: יהי $n\ge5$ אזי A_n פשוטה.

משפט קיילי: תהא G חבורה סופית מסדר n אזי G איזומורפית לתת חבורה של S_n.

מכפלה ישרה פנימית: תהא G חבורה אזי $G_1\ldots G_n$ חבורות המקיימות

- $G_i\lhd G$.
- $G_i\cap G_j=\{e\}$.
- $\prod_{i=1}^{n}G_i=G$.

סימון: אם $G_1\ldots G_n$ מכפלה ישרה פנימית של G אזי $G=G_1\oplus\ldots\oplus G_n=G_1\cdot\ldots\cdot G_n$.

מכפלה ישרה חיצונית: יהיו $G_1\ldots G_n$ חבורות אזי $G_1\times\ldots\times G_n$.

טענה: מכפלה ישרה עם פעולה איבר איבר היא חבורה.

משפט: תהא G חבורה ויהיו $G_1\ldots G_n\le G$ חבורות התב"ש

-
  - $G=\langle G_1,\ldots,G_n\rangle$.
  - $\forall i\in[n].G_i\lhd G$.
  - $\forall i\in[n].G_i\cap\langle G_j\mid j\ne i\rangle=\{e\}$.
-
  - $G=\langle G_1,\ldots,G_n\rangle$.
  - $\forall i\ne j.\forall x\in G_j.\forall y\in G_i.xy=yx$.
  - $\prod_{i=1}^{n}x_i=\prod_{i=1}^{n}y_i$ באשר $x_i,y_i\in G_i$ אזי $x_i=y_i$.
- $G\cong G_1\times\ldots\times G_n$.

מסקנה: (מכפלה ישרה פנימית) $\cong$ (מכפלה ישרה חיצונית).

טענה: תהא G חבורה סופית ויהיו $G_1\ldots G_n\lhd G$ חבורות בעלי סדרים זרים המקיימים $|G|=\prod_{i=1}^{n}|G_i|$ אזי $G=\langle G_1,\ldots,G_n\rangle$.

מסקנה: יהי $m\in\mathbb{N}_+$ ונניח כי $m=\prod_{i=1}^{k}p_i^{n_i}$ פירוק לראשוניים אזי $\mathbb{Z}_m=\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}}\cdot\ldots\cdot\mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}$.

סדרה נורמלית מאורך m: תהא G חבורה סופית אזי $\{G_i\}_{i=0}^{m}$ המקיימת $\{e\}=G_0\lhd\ldots\lhd G_m=G$.

סדרות שקולות: $\{G_i\}_{i=0}^{m}$, $\{H_i\}_{i=0}^{m}$ סדרות נורמליות של G המקיימות $\exists\sigma\in S_n.\forall i\in[n].G_i/G_{i-1}=H_{\sigma(i)}/H_{\sigma(i)-1}$.

עידון: תהא $\{G_i\}_{i=0}^{m}$ סדרה אזי סדרה $\{H_i\}_{i=0}^{n}$ המקיימת $\forall i\in\{0,\ldots,m\}.\exists j\in\{i,\ldots,n\}.G_i=H_j$.

משפט שרייר: לכל שתי סדרות נורמליות של אותה חבורה קיימים עידונים שקולים.

מסקנה: לכל שתי סדרות נורמליות של אותה חבורה קיימים עידונים שקולים ללא חזרות.

סדרת הרכב: תהא G חבורה אזי סדרה נורמלית ללא חזרות שכל עידון שלה מכיל חזרות.

משפט ז'ורדן הלדר: תהא G חבורה סופית אזי כל שתי סדרות הרכב של G שקולות.

נורמלית מקסימלית: תהא G חבורה אזי $G\ne H\lhd G$ עבורה $R\lhd H\Longrightarrow R\lhd G$.

למה: תהא $\{G_i\}_{i=0}^{m}$ סדרה נורמלית ללא חזרות של G התב"ש

- $\{G_i\}_{i=0}^{m}$ סדרת הרכב.
- G_{i-1} נורמלית מקסימלית ב־G_i.
- G_i/G_{i-1} פשוטה.

חבורה פתירה: חבורה סופית G בעלת סדרת הרכב $\{G_i\}_{i=0}^{m}$ כך שהחבורה G_i/G_{i-1} אבלית.

למה: תהא G חבורה סופית ותהא $K\lhd G$ אזי (G פתירה) $\Longleftrightarrow$ (G/K, K פתירות).

חבורת p: יהי p מספר ראשוני אזי G חבורה המקיימת $\exists n\in\mathbb{N}_+.\mathrm{ord}(G)=p^n$.

למה: יהיו G,H חבורות p אזי ($R\le G$ חבורת p)$\wedge$($G\times H$ חבורת p).

משפט: תהא $G\ne\{e\}$ חבורת p אזי $Z(G)\ne\{e\}$.

מסקנה: יהי p ראשוני ותהא G חבורה אזי ($\mathrm{ord}(G)=p^2$) $\Longleftarrow$ (G אבלית).

למה: תהא G חבורת p ותהא $H\le G$ חבורה אזי $H\le N_G(H)$.

תת חבורה מירבית: תהא G חבורה אזי $G\ne H\le G$ עבורה $R\le H\Longrightarrow R\le G$.

מסקנה: תהא G חבורת p ותהא $H\le G$ תת חבורה מירבית אזי

- $H\lhd G$.
- $[G:H]=p$.

- קיימת ל־G סדרת הרכב $\{G_i\}_{i=0}^{m}$ כך שהחבורה G_i/G_{i-1} ציקלית מסדר p.

תת חבורת p סילו: יהי p ראשוני ותהא G חבורה סופית המקיימת $p| |G|$ אזי $P \le G$ תת חבורת p מקסימלית עבורה $|P| | |G|$.

משפט קושי: יהי p ראשוני ותהא G חבורה סופית אזי $p| |G| \implies \exists g \in G.\text{ord}(g) = p$.

המשפט הראשון של סילו: תהא G חבורה סופית ויהי $p| |G|$ ראשוני אזי קיימת ל־G תת חבורת p סילוב.

משפט: יהי $p| |G|$ ותהא $H \le G$ חבורת p אזי H תת חבורה של חבורת p סילוב.

המשפט השני של סילו: יהיו $H, N \le G$ תת חבורות p סילוב אזי $\exists g \in G.H = gNg^{-1}$.

מסקנה: נניח כי $n_p = 1$ אזי תת חבורת p סילו היא נורמלית.

סימון: כמות תת חבורות p סילוב הוא n_p.

המשפט השלישי של סילו: $n_p \equiv 1 \mod p$, $n_p| [G : P]$.

למה: יהיו $N \lhd G$ חבורות סופיות ונניח כי P חבורת p סילו אזי

- $P \cap N$ חבורת p סילו ב־N.
- PN/N חבורת p סילו ב־G/N.

טענה: תהא G חבורה מסדר pq בעבור $q < p$ ראשוניים אזי

- G פתירה.
- $(q \nmid p-1) \Longleftarrow (G$ ציקלית).

הערה: $\langle G, \cdot\rangle$ היא חבורה עם כפל מוכלל $\prod$, $\langle A, +\rangle$ היא חבורה עם חיבור מוכלל $\sum$.

תת חבורת הפיתול: תהא A חבורה אבלית אזי $A^t = \{a \in A \mid \text{ord}(a) < \infty\}$.

חבורת פיתול: חבורה אבלית A המקיימת $A^t = A$.

חבורה חסרת פיתול: חבורה אבלית A המקיימת $A^t = \{e\}$.

למה: תהא A חבורה אבלית

- $A^t \le A$.
- A/A^t חסרת פיתול.
- אם A חבורת פיתול חילופית נוצרת סופית אז A סופית.

סדרה תלויה לינארית (ת"ל): סדרה $a \in A^n$ עבורה $\exists k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} . \sum_{i=1}^{n} k_i a_i = 0$.

- בלתי תלויה לינארית (בת"ל).

בסיס: תהא A חבורה אבלית אזי $v \in A^n$ בת"ל המקיימת $\forall a \in A.\exists \alpha \in \mathbb{Z}^n. \sum \alpha_i v_i = a$.

חבורה חופשית: חבורה אבלית בעלת בסיס.

משפט: תהא F חבורה חופשית עם בסיס $v \in F^n$ ותהא A חבורה אבלית עם $a \in A^n$ אזי קיים ויחיד הומומורפיזם $\varphi : F \to A$ המקיים $\forall i \in [n] .\varphi(v_i) = a_i$.

למה: תהא A חבורה אבלית אינסופית ויהי $v \in A^n$ אזי (v בסיס) $\iff ((\bigoplus_{i=1}^{n} \langle v_i\rangle = A) \wedge (\forall i \in [n] . \langle v_i\rangle \cong \mathbb{Z}))$.

מסקנה: תהא A חבורה אבלית אינסופית אזי (A חופשית) $\iff (A \cong \mathbb{Z}^n)$.

משפט: תהא A חבורת חסרת פיתול אבלית אזי (A נ"ס) $\iff$ (A חופשית).

משפט: תהא A חבורה אבלית ויהיו $v_1 \dots v_n$ בסיס, $u_1 \dots u_k$ סדרת יוצרים אזי $n \le k$.

מסקנה: יהיו B_1, B_2 בסיסים של חבורה חופשית A אזי גודל הבסיסים שווה.

דרגה של חבורה: תהא A חבורה חופשית אזי $\text{rank}(A)$ הוא גודל הבסיס של A.

משפט החבורות החלקיות של תת חבורה חופשית: יהיו $H \le A$ חבורות באשר A חבורה חופשית מדרגה n אזי H חופשית.

מסקנה: יהי $v \in A^n$ בסיס אזי קיים $k \le n$ עבורו קיימים $\varepsilon \in \mathbb{N}^k$ המקיימים $\varepsilon_i|\varepsilon_{i+1}$ וגם $\varepsilon_1 v_1 \dots \varepsilon_k v_k$ בסיס של H.

מסקנה: יהיו $H \le A$ חבורות חופשית אזי $\text{rank}(H) \le \text{rank}(A)$.

טענה: תהא $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ ונניח כי $N_i \lhd G_i$ אזי $G/(N_1 \cdot \ldots \cdot N_n) \cong G_1/N_1 \times \ldots \times G_n/N_n$.

משפט השאריות הסיני: יהיו $j, k, m \in \mathbb{N}$ ונניח כי $\gcd(j, k) = 1$, $j \cdot k = m$ אזי $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_j \oplus \mathbb{Z}_k$.

המשפט היסודי של חבורות אבליות נוצרות סופית: תהא A חבורה אבלית נ"ס אזי

- $A \cong \mathbb{Z}_{\varepsilon_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{\varepsilon_k} \times \mathbb{Z}^r$ באשר $\varepsilon_i|\varepsilon_{i+1}$.
- קיים פירוק יחיד $A \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\varepsilon_1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_n^{\varepsilon_n}} \times \mathbb{Z}^r$ באשר $p_1 \dots p_n$ ראשוניים.

חבורה סבבה: חבורה G אשר $|G| = \prod_{i=1}^{n} p_i^{e_i}$ פירוק לראשוניים המקיימת $n_{p_i} = 1$.

טענה: תהא G חבורה סבבה ותהא P_i תת חבורה p סילו אזי $G = P_1 \cdot \ldots \cdot P_n$.

הגדרה: יהיו $H,K\le G$ חבורות אזי $[H,K]=\{[h,k]\mid h\in H\wedge k\in K\}$.

טענה: $[H,K]\le G$.

טענה: יהיו $H,K\le G$ חבורות אזי

- $K\le H\Longrightarrow[K,G]\le[H,G]$.
- $[H,G]\le H\Longleftrightarrow H\lhd G$.
- $((K\lhd G)\wedge(K\le H\le G))\Longrightarrow(H/K\le Z(G/K)\Longleftrightarrow[H,G]\le K)$.

הסדרה המרכזית היורדת: תהא G חבורה אזי $\Phi_1(G)=G$, $\Phi_{i+1}(G)=[\Phi_i(G),G]$.

למה: $\Phi_{i+1}\lhd\Phi_i$.

למה: $\Phi_i/\Phi_{i+1}\le Z(G/\Phi_{i+1})$.

הסדרה המרכזית העולה: תהא G חבורה אזי $Z_0(G)=\{e\}$, $Z_i(G)/Z_{i-1}(G)=Z(G/Z_{i-1}(G))$.

מסקנה: $Z_1(G)=Z(G)$.

משפט: $(Z_m=G)\Longleftrightarrow(\Phi_{m+1}=\{e\})$.

מסקנה: $(Z_m=G)\Longrightarrow(\forall i\in[m].\Phi_{i+1}\le Z_{m-i})$.

חבורה נילפוטנטית: חבורה G עבורה

- $\exists i\in\mathbb{N}.\Phi_i(G)=\{e\}$.
- $\exists i\in\mathbb{N}.Z_i(G)=G$.

טענה: מכפלה ישרה של חבורות נילפוטנטיות היא נילפוטנטית.

למה: תהא G נילפוטנטית ותהא $H\le G$ חבורה אזי $H\le N_G(H)$.

למת הארגומנט של פראטיני: יהיו $K\lhd G$ חבורות סופיות ותהא P תת חבורה p סילו אזי $G=K\cdot N_G(P)$.

למה: תהא G חבורה סופית ותהא P תת חבורת p סילו אזי $(N_G(P)\le H\le G)\Longrightarrow(N_G(H)=H)$.

משפט: תהא G חבורה אזי (G סבבה) $\Longleftrightarrow$ (G נילפוטנטית).