משפט: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי לא קיימת $\mathrm{Vol}_n:\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\to[0,\infty]$ עבורה

- $\mathrm{Vol}_n([0,1]^n)=1$.
- תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\mathrm{Vol}_n(\biguplus_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Vol}_n(A_i)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n(\varphi(A))=\mathrm{Vol}_n(A)$.

קבוצות חופפות בחלקים: $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורן קיים $k\in\mathbb{N}$ קיימות $X_1\dots X_k,Y_1\dots Y_k\subseteq\mathbb{R}^n$ וקיימות $\varphi_1\dots\varphi_k$ איזומטריות המקיימות $X=\biguplus_{i=1}^{k}X_i$ וכן $Y=\biguplus_{i=1}^{k}Y_i$ וכן $\forall j\in[k].Y_j=\varphi_j(X_j)$.

סימון: תהיינה $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ חופפות בחלקים אזי $X\equiv Y$.

משפט פרדוקס בנך־טרסקי: יהי $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$ ותהיינה $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומות עבורן $\mathrm{int}(X)\neq\varnothing$ וכן $\mathrm{int}(Y)\neq\varnothing$ אזי $X\equiv Y$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$ אזי לא קיימת $\mathrm{Vol}_n:\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\to[0,\infty]$ עבורה

- $\mathrm{Vol}_n([0,1]^n)=1$.
- תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n(A\uplus B)=\mathrm{Vol}_n(A)+\mathrm{Vol}_n(B)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n(\varphi(A))=\mathrm{Vol}_n(A)$.

משפט בנך: יהי $n\in\{1,2\}$ אזי קיימת $\mathrm{Vol}_n:\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\to[0,\infty]$ עבורה

- $\mathrm{Vol}_n([0,1]^n)=1$.
- תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n(A\uplus B)=\mathrm{Vol}_n(A)+\mathrm{Vol}_n(B)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n(\varphi(A))=\mathrm{Vol}_n(A)$.

אלגברה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $X\in\mathcal{A}$.
- $\forall E\in\mathcal{A}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{A}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ סופית מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

טענה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה ותהיינה $A,B\in\mathcal{A}$ אזי $A\cap B\in\mathcal{A}$.

אידיאל: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $X\notin\mathcal{I}$.
- $\forall A\in\mathcal{I}.\forall B\subseteq A.B\in\mathcal{I}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ סופית מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

σ־אלגברה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $X\in\mathcal{A}$.
- $\forall E\in\mathcal{A}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{A}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{A}$ σ־אלגברה אזי $\mathcal{A}$ אלגברה.

σ־אידיאל: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $X\notin\mathcal{I}$.
- $\forall A\in\mathcal{I}.\forall B\subseteq A.B\in\mathcal{I}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

טענה: תהיינה $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq\mathcal{P}(X)$ σ־אלגבראות אזי $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$ σ־אלגברה.

σ־אלגברה נוצרת: תהא X קבוצה תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ ותהיינה $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל X המכילות את A אזי $\sigma(A)=\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ אזי $\sigma(A)$ הינה ה־σ־אלגברה הקטנה ביותר המכילה את A.

σ־אלגברה בורל: יהי X מרחב מטרי אזי $\mathcal{B}(X)=\sigma(\{\mathcal{O}\in\mathcal{P}(X)\mid \text{פתוחה } \mathcal{O}\})$.

טענה: יהי X מרחב מטרי אזי הקבוצות הבאות שוות

- σ־אלגברה בורל על X.
- $\sigma(\{B_r(a)\mid(r>0)\wedge(a\in X)\})$.
- $\sigma(\{B_r(a)\mid(r\in\mathbb{Q}_+)\wedge(a\in X)\})$.
- תהא $Y\subseteq X$ צפופה אזי $\sigma(\{B_r(a)\mid(r\in\mathbb{Q}_+)\wedge(a\in Y)\})$.

קבוצה G_δ: $A\subseteq X$ עבורה קיימות $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^{\infty}$ פתוחות המקיימות $A=\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathcal{O}_i$.

קבוצה F_δ: $X\subseteq A$ עבורה קיימות $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^{\infty}$ סגורות המקיימות $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathcal{O}_i$.

מסקנה: תהא A קבוצה G_δ ותהא B קבוצה F_δ אזי $A,B\in\mathcal{B}(X)$.

טענה: הקבוצות הבאות שוות

- σ־אלגברה בורל על $\mathbb{R}^n$.
- $\sigma\left(\left\{\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)\mid a_1,b_1\ldots a_n,b_n\in\mathbb{R}\right\}\right)$.
- $\sigma\left(\left\{\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)\mid a_1,b_1\ldots a_n,b_n\in\mathbb{Q}\right\}\right)$.

משפט: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא $C(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid$ רציפה ב־x $f\}$ אזי

- $C(f)\in G_\delta$.
- תהא $X\in G_\delta$ אזי קיימת f עבורה $C(f)=X$.

קבוצה דלילה: יהי X מרחב מטרי אזי $A\subseteq X$ המקיימת $\operatorname{int}\left(\overline{A}\right)=\varnothing$.

קבוצה מקטגוריה ראשונה: יהי X מרחב מטרי אזי $A\subseteq X$ עבורה קיימות $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ דלילות עבורן $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$.

קבוצה מקטגוריה שנייה: יהי X מרחב מטרי אזי $A\subseteq X$ שאינה מקטגוריה ראשונה.

קבוצה שיורית: יהי X מרחב מטרי ותהא $A\subseteq X$ מקטגוריה ראשונה אזי $A^{\mathcal{C}}$.

למה: יהי X מרחב מטרי אזי

- תהא $A\subseteq X$ דלילה ותהא $B\subseteq A$ אזי B דלילה.
- תהיינה $A_1\ldots A_n\subseteq X$ דלילות אזי $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ דלילה.
- תהא $A\subseteq X$ דלילה אזי $\overline{A}$ דלילה.

מסקנה: קבוצות דלילות מהוות אידיאל.

משפט בייר: יהי X מרחב מטרי שלם ותהא $A\subseteq X$ מקטגוריה ראשונה אזי $\operatorname{int}(A)=\varnothing$.

מסקנה: קבוצות דלילות מהוות σ־אידיאל.

מסקנה: $\mathbb{Q}\notin G_\delta$.

משפט: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי קיימת $F\subseteq\mathbb{R}$ מקטגוריה ראשונה וקיימת $N\subseteq\mathbb{R}$ זניחה עבורה $A=F\uplus N$.

משפט בנך: במרחב המטרי $C([0,1])$ עם נורמת מקסימום הקבוצה $\{f\in C([0,1])\mid\exists x\in(0,1).f\in\mathcal{D}(x)\}$ היא מקטגוריה ראשונה.

הערה: "רוב" הפונקציות הרציפות לא גזירות באף נקודה.

קבוצה בעלת תכונת בייר: יהי X מרחב מטרי אזי $A\subseteq X$ עבורה קיימת $G\subseteq X$ פתוחה וקיימת $Q\subseteq X$ מקטגוריה ראשונה עבורה $A=G\triangle Q$.

משפט: תהא $A\subseteq X$ אזי (ל־A יש את תכונת בייר)$\iff$(קיימת $F\subseteq X$ סגורה וקיימת $P\subseteq X$ מקטגוריה ראשונה עבורה $A=F\triangle P$).

מסקנה: תהא $A\subseteq X$ בעלת תכונת בייר אזי $A^{\mathcal{C}}$ בעלת תכונת בייר.

משפט: יהי X מרחב מטרי אזי $\{A\subseteq X\mid$ בעלת תכונת בייר $A\}=\sigma\left(\{A\subseteq X\mid(A\text{ פתוחה})\vee(A\text{ מקטגוריה ראשונה})\}\right)$.

משפט: תהא X קבוצה ותהא $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(X)$ נסמן $\mathcal{F}_0=\mathcal{T}\cup\{\varnothing,\Omega\}$, לכל סודר עוקב $\alpha+1$ נסמן $\mathcal{F}_{\alpha+1}=\mathcal{F}_\alpha\cup\left\{A^{\mathcal{C}}\mid A\in\mathcal{F}_\alpha\right\}\cup\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\mid A_n\in\mathcal{F}_\alpha\right\}$ ולכל סודר גבול λ נסמן $\mathcal{F}_\lambda=\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{F}_\alpha$ אזי $\sigma(\mathcal{T})=\mathcal{F}_{\omega_1}$ באשר ω_1 הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה.

טענה: תהא X קבוצה עבורה $|X|=\aleph$ אזי $|\sigma(X)|=\aleph$.

מרחב מדיד: תהא X קבוצה ותהא $\Sigma\subseteq\mathcal{P}(X)$ σ־אלגברה אזי (X,Σ).

פונקציית מידה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד אזי $\mu:\Sigma\to[0,\infty]$ המקיימת

- $\mu(\varnothing)=0$.
- σ־אדטיביות: תהיינה $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ זרות בזוגות אזי $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}B_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(B_i)$.

מרחב מידה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא μ פונקציית מידה אזי (X,Σ,μ).

מידה סופית: פונקציית מידה μ המקיימת $\mu(X)<\infty$.

מידה σ־סופית: פונקציית מידה μ עבורה קיימים $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ המקיימים $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$ וכן $\forall i\in\mathbb{N}_+.\mu(B_i)<\infty$.

מידת הסתברות: פונקציית מידה μ המקיימת $\mu(X)=1$.

טענה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי

- מונוטוניות: יהיו $A,B\in\Sigma$ באשר $B\subseteq A$ אזי $\mu(A)\leq\mu(B)$.

- σ־תת־אדיטיביות: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(A_i\right)$.
- רציפות מלעיל: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ באשר $\forall i \in \mathbb{N}_+ . A_i \subseteq A_{i+1}$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right)$.
- רציפות מלרע: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ באשר $\forall i \in \mathbb{N}_+ . A_i \supseteq A_{i+1}$ וכן $\mu\left(A_1\right) < \infty$ אזי $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right)$.

מידת בורל: תהא X קבוצה אזי מידה μ על $\left(X, \mathcal{B}\left(X\right)\right)$.

קבוצה ממידה אפס/זניחה: $E \in \Sigma$ המקיימת $\mu\left(E\right) = 0$.

סימון: יהי $\left(X, \Sigma, \mu\right)$ מרחב מידה אזי $\mathcal{N} = \{E \in \Sigma \mid \mu\left(E\right) = 0\}$.

טענה: תהיינה $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ זניחות אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ זניחה.

כמעט בכל מקום (כ.ב.מ.): יהי ψ פרידיקט עבורו קיימת $E \in \mathcal{N}$ המקיים כי ψ מתקיים לכל $X \backslash E$ אזי נאמר כי "ψ נכונה μ כמעט בכל מקום".

מידה שלמה: פונקציית מידה μ עבורה לכל $E \in \mathcal{N}$ ולכל $F \subseteq E$ מתקיים $F \in \mathcal{N}$.

השלמה של σ־אלגברה: יהי $\left(X, \Sigma, \mu\right)$ מרחב מידה אזי $\overline{\Sigma} = \{E \cup F \mid \left(E \in \Sigma\right) \wedge \left(\exists N \in \mathcal{N} . F \subseteq N\right)\}$.

טענה: יהי $\left(X, \Sigma, \mu\right)$ מרחב מידה אזי $\overline{\Sigma}$ σ־אלגברה.

טענה: יהי $\left(X, \Sigma, \mu\right)$ מרחב מידה אזי קיימת ויחידה מידה שלמה ν על $\overline{\Sigma}$ עבורה $\nu_{\restriction_\Sigma} = \mu$.

השלמה של מידה: יהי $\left(X, \Sigma, \mu\right)$ מרחב מידה אזי המידה השלמה $\overline{\mu}$ על $\overline{\Sigma}$ עבורה $\overline{\mu}_{\restriction_\Sigma} = \mu$.

טענה: יהי $\left(X, \Sigma, \mu\right)$ מרחב מידה אזי $\left(X, \overline{\Sigma}, \overline{\mu}\right)$ מרחב מידה.

מחלקת דינקין: תהא $X \ne \varnothing$ אזי $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת

- $X \in \mathcal{D}$.
- יהיו $A, B \in \mathcal{D}$ באשר $A \subseteq B$ אזי $B \backslash A \in \mathcal{D}$.
- תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}$ באשר $\forall i \in \mathbb{N}_+ . A_i \subseteq A_{i+1}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$.

מערכת π: תהא $X \ne \varnothing$ אזי $\Pi \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ עבורה לכל $A_1 \ldots A_n \in \Pi$ מתקיים $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \Pi$.

טענה: תהיינה $\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ מחלקות דינקין אזי $\bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{D}_\alpha$ מחלקת דינקין.

מחלקת דינקין נוצרת: תהא $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ ותהיינה $\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כל המחלקות דינקין מעל X המכילות את $\mathcal{A}$ אזי $d\left(\mathcal{A}\right) = \bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{D}_\alpha$.

מסקנה: תהא $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ אזי $d\left(\mathcal{A}\right)$ הינה המחלקת דינקין הקטנה ביותר המכילה את $\mathcal{A}$.

למה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה על X עבורה לכל $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ באשר $\forall i \in \mathbb{N}_+ . A_i \subseteq A_{i+1}$ מתקיים $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ אזי $\mathcal{A}$ σ־אלגברה.

למה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה על X עבורה לכל $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ באשר $\forall i \in \mathbb{N}_+ . A_i \supseteq A_{i+1}$ מתקיים $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ אזי $\mathcal{A}$ σ־אלגברה.

משפט הלמה של דינקין: תהא $\Pi \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ מערכת π אזי $\sigma\left(\Pi\right) = d\left(\Pi\right)$.

מסקנה: יהי $\left(X, \Sigma\right)$ מרחב מדיד תהא $\Pi \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ מערכת π עבורה $\Sigma = \sigma\left(\Pi\right)$ ותהיינה μ, ν מידות סופיות על Σ עבורן $\mu\left(X\right) = \nu\left(X\right)$ וכן $\mu_{\restriction_\Pi} = \nu_{\restriction_\Pi}$ אזי $\mu = \nu$.

מסקנה: יהי $\left(X, \Sigma\right)$ מרחב מדיד תהא $\Pi \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ מערכת π עבורה $\Sigma = \sigma\left(\Pi\right)$ תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Pi$ באשר $\forall i \in \mathbb{N}_+ . A_i \subseteq A_{i+1}$ וכן $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = X$ ותהיינה μ, ν מידות על Σ עבורן $\forall n \in \mathbb{N}_+ . \mu\left(A_i\right) = \nu\left(A_i\right) < \infty$ וכן $\mu_{\restriction_\Pi} = \nu_{\restriction_\Pi}$ אזי $\mu = \nu$.

חוג למחצה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת

- $\varnothing \in \mathcal{E}$.
- יהיו $A, B \in \mathcal{E}$ אזי $A \cap B \in \mathcal{E}$.
- יהיו $A, B \in \mathcal{E}$ אזי קיימים $C_1 \ldots C_n \in \mathcal{E}$ עבורם $A \backslash B = \biguplus_{i=1}^{n} C_i$.

טענה: יהי $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ חוג למחצה ויהיו $A_1 \ldots A_n \in \mathcal{E}$ אזי

- יהי $P \in \mathcal{E}$ אזי קיימים $B_1 \ldots B_m \in \mathcal{E}$ עבורם $P \backslash \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \biguplus_{i=1}^{m} B_i$.
- קיימים $\{B_{i,j} \mid \left(i \in [n]\right) \wedge \left(j \in [m_i]\right)\} \subseteq \mathcal{E}$ עבורם $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \biguplus_{i=1}^{m} \biguplus_{j=1}^{m_i} B_{i,j}$.
- קיימים $\{B_{i,j} \mid \left(i \in \mathbb{N}_+\right) \wedge \left(j \in [m_i]\right)\} \subseteq \mathcal{E}$ עבורם $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \biguplus_{i=1}^{\infty} \biguplus_{j=1}^{m_i} B_{i,j}$.

מידה אלמנטרית: יהי $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ חוג למחצה אזי $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ המקיימת

- $\mu\left(\varnothing\right) = 0$.
- אדיטיביות: תהיינה $A, B \in \mathcal{E}$ עבורם $A \uplus B \in \mathcal{E}$ אזי $\mu\left(A \uplus B\right) = \mu\left(A\right) + \mu\left(B\right)$.
- מונוטוניות: תהיינה $A, B \in \mathcal{E}$ באשר $A \subseteq B$ אזי $\mu\left(A\right) \le \mu\left(B\right)$.
- σ־תת־אדטיביות: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(A_i\right)$.

מידה חיצונית: יהי $X \ne \varnothing$ אזי $\mu^* : \mathcal{P}\left(X\right) \to [0, \infty]$ המקיימת

- $\mu^*\left(\varnothing\right) = 0$.

- מונוטוניות: תהיינה $A,B\in\mathcal{P}(X)$ באשר $A\subseteq B$ אזי $\mu^*(A)\le\mu^*(B)$.
- σ־תת־אדטיביות: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}(X)$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$.

המידה החיצונית הנוצרת על ידי ρ: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$ באשר $\varnothing,X\in\mathcal{E}$ ותהא $\rho:\mathcal{E}\to[0,\infty]$ עבורה $\rho(\varnothing)=0$ נגדיר $\rho^*:\mathcal{P}(X)\to[0,\infty]$ כך $\rho^*(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\rho(E_i)\mid\left(\{E_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{E}\right)\wedge\left(A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right\}$.

טענה: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$ באשר $\varnothing,X\in\mathcal{E}$ ותהא $\rho:\mathcal{E}\to[0,\infty]$ עבורה $\rho(\varnothing)=0$ אזי ρ^* מידה חיצונית.

טענה: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי $m^*_{\restriction_{\mathcal{M}}}=m$.

קבוצה λ: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ אלגברה ותהא $\lambda:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ עבורה $\lambda(\varnothing)=0$ אזי $E\in\mathcal{A}$ עבורה לכל $F\in\mathcal{A}$ מתקיים $\lambda(E\cap F)+\lambda\left(E^{\mathcal{C}}\cap F\right)=\lambda(E\cap F)+\lambda(F\backslash E)=\lambda(F)$.

סימון: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ אלגברה ותהא $\lambda:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ עבורה $\lambda(\varnothing)=0$ אזי $\Gamma_0=\{E\in\mathcal{A}\mid\lambda\text{ קבוצה }E\}$.

טענה: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ אלגברה ותהא $\lambda:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ עבורה $\lambda(\varnothing)=0$ אזי

- Γ_0 אלגברה.
- λ אדיטיבית על Γ_0.
- תהיינה $E_1\ldots E_n\in\Gamma_0$ ויהי $F\in\mathcal{A}$ אזי $\lambda\left(\biguplus_{i=1}^{n}(E_k\cap F)\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda(E_n\cap F)$.

קבוצה מדידה ביחס למידה חיצונית: תהא μ^* מידה חיצונית על X אזי $A\subseteq X$ עבורה לכל $E\subseteq X$ מתקיים $\mu^*(E)=\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\backslash A)$.

סימון: תהא μ^* מידה חיצונית על X אזי $\Sigma_{\mu^*}=\{A\subseteq X\mid\mu^*\text{ מדידה }A\}$.

טענה: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי $\mathcal{M}\subseteq\Sigma_{m^*}$.

משפט הלמה של קרתאודורי: תהא μ^* מידה חיצונית על X אזי

- Σ_{μ^*} σ־אלגברה.
- $\mu^*_{\restriction_{\Sigma_{\mu^*}}}$ מידה שלמה.

המשכת קרתיאודורי: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי m^* מידה מעל Σ_{m^*}.

משפט: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה תהא m מידה אלמנטרית ותהא (X,Σ',μ) המשכת קרתיאודורי נוספת של $(\mathcal{M},m)$ אזי

- לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu(A)\le m^*(A)$.
- נניח כי $m^*(X)<\infty$ אזי לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu(A)=m^*(A)$.
- נניח כי m σ־סופית אזי לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu(A)=m^*(A)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית σ־סופית אזי המשכת קרתיאודורי יחידה.

משפט קרתיאודורי: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא μ^* מידה חיצונית עבורה לכל $A,B\subseteq X$ באשר $d(A,B)>0$ מתקיים $\mu^*(A\cup B)=\mu^*(A)+\mu^*(B)$ אזי $\mathcal{B}(X)\subseteq\Sigma_{\mu^*}$.

קבוצה רגולרית: קבוצה $A\in\Sigma$ עבורה $\mu(A)=\sup\{\mu(K)\mid(K\subseteq A)\wedge(\text{קומפקטית }K)\}$.

מידה רגולרית: מידה μ עבורה כל $A\in\Sigma$ הינה רגולרית.

משפט אולם: יהי X מרחב מטרי שלם וספירבילי ותהא μ מידת בורל עבורה $\mu(X)<\infty$ אזי μ רגולרית.

מידת הנפח האלמנטרית: מידה אלמנטרית m מעל $\left\{\prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\mid a_1,b_1\ldots a_n,b_n\in\mathbb{R}\right\}$ עבורה $m\left(\prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\right)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$.

σ־אלגברה לבג: $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)=\sigma\left(\{A\subseteq\mathbb{R}^n\mid(\text{פתוחה }A)\vee(\text{זניחה על פי מידת הנפח האלמנטרית }A)\}\right)$.

מסקנה: $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\subseteq\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

טענה: תהא m מידת הנפח האלמנטרית אזי $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)=\Sigma_{m^*}$.

מידת לבג: תהא m מידת הנפח האלמנטרית אזי המשכת קרתיאודור $m_d=m^*$.

מסקנה: תהא $\nu:\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\to[0,\infty]$ מידה אלמנטרית עבורה $\nu\left(\prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\right)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$ אזי ν הינה מידת הנפח האלמנטרית.

טענה: תהא m_d מידת לבג אזי

- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ אזי $m_d(E)=\lim_{n\to\infty}m_d\left(E\cap[-n,n]^d\right)$.
- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $E\subseteq\mathcal{O}$ פתוחה עבורה $m_d(\mathcal{O}\backslash E)<\varepsilon$.
- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $F\subseteq E$ סגורה עבורה $m_d(E\backslash F)<\varepsilon$.
- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ עבורה $\mu(E)<\infty$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $F\subseteq E$ קומפקטית עבורה $m_d(E\backslash F)<\varepsilon$.
- תהא $E\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי $\left(E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)\iff$(קיימות $A,B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ המקיימות $A\subseteq E\subseteq B$ וכן $m_d(A)=m_d(B)$).

טענה: תהא m_d מידת לבג אזי m_d רגולרית.
טענה: תהא m_d מידת לבג ותהא $A \subseteq \mathbb{R}^d$ התב"ש
- $A \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$.
- קיימת $G \in G_\delta$ וקיימת $E \in \mathcal{N}$ עבורן $A = G \backslash E$.
- קיימת $F \in F_\sigma$ וקיימת $E \in \mathcal{N}$ עבורן $A = F \cup E$.

מסקנה: תהא m_d מידת לבג אזי $\left(\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right), m_d\right)$ השלמה של $\left(\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right), m\right)$.
משפט: תהא m_d מידת לבג תהא $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^d$ פתוחה תהא $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^d$ ליפשיץ ותהא $A \subseteq \mathcal{O}$ אזי
- נניח כי $A \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ אזי $f(A) \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$.
- נניח כי $m_d(A) = 0$ אזי $m_d(f(A)) = 0$.

משפט אינווריאנטיות להזזות: תהא $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ויהי $x \in \mathbb{R}^n$ אזי $m_n(A) = m_n(A + x)$.
מסקנה: תהא $\nu : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ מידה אינווריאנטית להזזות עבורה לכל $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ מתקיים $\nu(E) < \infty$ אזי קיים $\kappa \in [0, \infty)$ עבורו $m_d = \kappa\nu$.
משפט: תהא $T \in \operatorname{Hom}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ותהא $E \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ אזי $m_d(T(E)) = |\det(T)| m_d(E)$.
מסקנה: תהא $T \in \operatorname{Hom}\left(\mathbb{R}^d\right)$ אורתוגונלית ותהא $E \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ אזי $m_d(T(E)) = m_d(E)$.
קבוצה פשוטה: $A \subseteq \mathbb{R}^d$ עבורה קיימים $a_1, b_1 \ldots a_n, b_n \in \mathbb{R}$ המקיימים $A = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$.
הגדרה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^d$ חסומה ותהא m_d מידת לבג אזי
- מידת ז'ורדן פנימית: $m_{*,J}(E) = \sup\left\{m_d(A) \mid (\text{פשוטה } A) \wedge (A \subseteq E)\right\}$.
- מידת ז'ורדן חיצונית: $m_J^*(E) = \inf\left\{m_d(A) \mid (\text{פשוטה } A) \wedge (A \supseteq E)\right\}$.

קבוצה מדידה ז'ורדן: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^d$ חסומה עבורה $m_{*,J}(E) = m_J^*(E)$ אזי $m_J(E) = m_J^*(E)$.
טענה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^d$ חסומה אזי $m_{*,J}(E) = m_d(\operatorname{int}(E))$ וכן $m_J^*(E) = m_d\left(\overline{E}\right)$.
טענה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^d$ חסומה ותהא m_d מידת לבג אזי
- E מדידה ז'ורדן.
- לכל $\varepsilon > 0$ אזי קיימות A, B פשוטות עבורן $A \subseteq E \subseteq B$ וכן $m_d(B \backslash A) < \varepsilon$.
- $m_J^*(\partial E) = 0$.
- $m^*(\partial E) = 0$.

למה: תהא $E \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ עבורה $m_d(E) > 1$ אזי קיימים $x, y \in E$ עבורם $(x - y) \in \mathbb{Z}^d \backslash \{0\}$.
משפט מינקובסקי: יהי $V \subseteq \mathbb{R}^d$ גוף קמור סימטרי סביב 0 עבורו $m_d(V) > 2^d$ אזי $V \cap \left(\mathbb{Z}^d \backslash \{0\}\right) \neq \varnothing$.
למה: תהא $E \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ עבורה $m_d(E) \in (0, \infty)$ ותהא $\theta \in (0, 1)$ אזי קיימת קוביה $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ עבורה $m_d(E \cap Q) > \theta \cdot m_d(Q)$.
משפט שטיינהאוס: תהא $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ עבורה $m_d(E) > 0$ אזי $0 \in \operatorname{int}(E - E)$.
מסקנה: תהא $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ עבורה $m_d(E) > 0$ אזי קיימים $x, y \in E$ עבורם $(x - y) \in \mathbb{Q} \backslash \{0\}$.
למה: תהא $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^d$ פתוחה אזי קיימים $\{B_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ כדורים וקיימת $E \in \mathcal{N}$ עבורם $\mathcal{O} = \left(\biguplus_{i=1}^\infty B_i\right) \cup E$.
פונקציית התפלגות: $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ מונוטונית עולה ורציפה מימין.
טענה: תהא μ מידת בורל סופית על $\mathbb{R}$ אזי $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת $F(x) = \mu((-\infty, x])$ הינה פונקציית התפלגות.
קדם־מידה: תהא $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ אלגברה אזי $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ המקיימת
- $\mu(\varnothing) = 0$.
- σ־אדטיביות: תהיינה $\{B_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \Sigma$ זרות בזוגות אזי $\mu\left(\biguplus_{i=1}^\infty B_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i)$.

טענה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה ותהא m קדם־מידה אזי $m^*_{\restriction\mathcal{A}} = m$.
טענה: תהא $\mathcal{A}$אלגברה ותהא m קדם־מידה אזי $\mathcal{A} \subseteq \Sigma_{m^*}$.
המשכת קרתיאודורי: תהא $\mathcal{A}$אלגברה ותהא m קדם־מידה אזי m^* מידה מעל Σ_{m^*}.
משפט: תהא $\mathcal{A}$אלגברה תהא m קדם־מידה ותהא (X, Σ', μ) המשכת קרתיאודורי נוספת של $(\mathcal{A}, m)$ אזי
- לכל $A \in \Sigma' \cap \Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu(A) \leq m^*(A)$.
- נניח כי $m^*(X) < \infty$ אזי לכל $A \in \Sigma' \cap \Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu(A) = m^*(A)$.
- נניח כי m σ־סופית אזי לכל $A \in \Sigma' \cap \Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu(A) = m^*(A)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{A}$אלגברה ותהא m קדם־מידה σ־סופית אזי המשכת קרתיאודורי יחידה.
טענה: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי $\mu([a, b)) = F(b) - F(a)$ מידה אלמנטרית מעל החוג למחצה $\{[a, b) \mid a \leq b\}$.

טענה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{n}\left[a_{i},b_{i}\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(F\left(b_{i}\right)-F\left(a_{i}\right)\right)$ קדם־מידה מעל האלגברה $\{\biguplus_{i=1}^{n}\left[a_{i},b_{i}\right)\mid\forall i\in[n].a_{i}\le b_{i}\}$.

משפט: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי קיימת ויחידה מידת בורל μ_{F} עבורה $\mu_{F}\left(\left[a,b\right)\right)=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

טענה: תהיינה $F,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות התפלגות אזי $\left(\mu_{F}=\mu_{G}\right)\iff\left(\exists c\in\mathbb{R}.F-G=c\right)$.

מידה סופית מקומית: מידת בורל μ מעל $\mathbb{R}$ עבורה $\forall a,b\in\mathbb{R}.\mu\left(\left[a,b\right]\right)<\infty$.

מסקנה: תהא μ מידת בורל סופית מקומית על $\mathbb{R}$ אזי קיימת פונקציית התפלגות $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mu=\mu_{F}$.

מידת לבג־סטילטייס: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי $\overline{\mu_{F}}$.

סימון: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות נסמן $\mu_{F}=\overline{\mu_{F}}$.

מסקנה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E\in\Sigma_{\mu_{F}}$ אזי $\mu_{F}\left(E\right)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(F\left(b_{i}\right)-F\left(a_{i}\right)\right)\mid E\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\left[a_{i},b_{i}\right)\right\}$.

למה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E\in\Sigma_{\mu_{F}}$ אזי $\mu_{F}\left(E\right)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(F\left(b_{i}\right)-F\left(a_{i}\right)\right)\mid E\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\left(a_{i},b_{i}\right)\right\}$.

משפט: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E\in\Sigma_{\mu_{F}}$ אזי $\mu_{F}\left(E\right)=\sup\left\{\mu_{F}\left(K\right)\mid\left(K\subseteq E\right)\wedge\left(\text{קומפקטית } K\right)\right\}$.

מסקנה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי μ_{F} רגולרית.

משפט: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E\subseteq\mathbb{R}$ התב"ש

- $E\in\Sigma_{\mu_{F}}$.
- קיימת $G\in G_{\delta}$ וכן $N\in\mathcal{N}$ עבורן $E=G\backslash N$.
- קיימת $F\in F_{\sigma}$ וכן $N\in\mathcal{N}$ עבורן $E=F\uplus N$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(E\in\Sigma_{\mu_{F}}\right)\Longleftrightarrow$(קיימות $A,B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$ המקיימות $A\subseteq E\subseteq B$ וכן $\mu_{F}\left(A\right)=\mu_{F}\left(B\right)$).

טענה העיקרון הראשון של ליטלווד: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות תהא $E\in\Sigma_{\mu_{F}}$ עבורה $\mu_{F}\left(E\right)<\infty$ ותהא $\varepsilon>0$ אזי קיימים $a_{1},b_{1}\ldots a_{n},b_{n}\in\mathbb{R}$ עבורם $\mu_{F}\left(E\triangle\left(\bigcup_{i=1}^{n}\left(a_{i},b_{i}\right)\right)\right)<\varepsilon$.

קבוצת קנטור: $\mathcal{C}=\left[0,1\right]\setminus\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{3^{n}-1}\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}},\frac{3k+2}{3^{n+1}}\right)$

טענה: תהא m_{d} מידת לבג אזי $\mathcal{C}\in\mathcal{N}$.

טענה: $\mathcal{C}=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_{i}}{3^{i}}\mid x\in\mathbb{N}^{\{0,2\}}\right\}$.

קבוצה מושלמת: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ בלתי קשירה לחלוטין אשר לא מכילה נקודות מבודדות.

טענה:

- $|\mathcal{C}|=\aleph$.
- $\mathcal{C}$ קומפקטית.
- $\mathcal{C}$ מושלמת.

קבוצת קנטור מוכללת: תהיינה $\left\{\delta_{n}\right\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(\left(0,1\right)\right)$ נגדיר $C_{0}=\left[0,1\right]$ וכן את C_{n} להיות C_{n-1} לאחר שהוצאנו ממרכזו של כל קטע I ב־C_{n-1} קטע באורך $\delta_{n}\cdot m_{d}\left(I\right)$ אזי $\bigcap_{i=1}^{\infty}C_{i}$.

טענה: קבוצת קנטור הינה קבוצת קנטור מוכללת באשר $\forall n\in\mathbb{N}_{+}.\delta_{n}=\frac{1}{3}$.

טענה: תהיינה $\left\{\delta_{n}\right\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(\left(0,1\right)\right)$ אזי (קבוצת קנטור המוכללת זניחה על פי מידת לבג)$\Longleftrightarrow\left(\sum_{i=1}^{\infty}\delta_{i}=\infty\right)$.

הגדרה: נגדיר $\varphi^{\star}:\mathcal{C}\to\left[0,1\right]$ כך שאם $x\in\mathcal{C}$ בעל הצגה $x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2a_{i}}{3^{i}}$ עבור $a_{i}\in\{0,1\}$ אזי $\varphi^{\star}\left(x\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_{i}}{3^{i}}$.

פונקציית קנטור: נגדיר $\varphi:\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]$ כך $\varphi\left(x\right)=\sup\left\{\varphi^{\star}\left(t\right)\mid\left(t\in\mathcal{C}\right)\wedge\left(t\le x\right)\right\}$.

טענה: תהא $\varphi:\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]$ פונקציית קנטור אזי

- φ עולה.
- φ רציפה.
- $\varphi\left(\mathcal{C}\right)=\left[0,1\right]$.
- קיימת $E\subseteq\mathcal{C}$ עבורה $\varphi\left(E\right)\notin\mathcal{L}\left(\mathbb{R}\right)$.

קוטר קבוצה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי ותהא $A\subseteq X$ אזי $\text{diam}\left(A\right)=\sup\left\{d\left(x,y\right)\mid x,y\in A\right\}$.

הגדרה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי יהי $s\ge0$ יהי $\delta>0$ ויהי $E\subseteq X$ אזי $\mathcal{H}_{s,\delta}\left(E\right)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\text{diam}\left(A_{i}\right)^{s}\mid\left(E\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}A_{i}\right)\wedge\left(\text{diam}\left(A_{i}\right)<\delta\right)\right\}$.

מידת האוסדורף: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי יהי $s\ge0$ ויהי $E\subseteq X$ אזי $\mathcal{H}_{s}\left(E\right)=\lim_{\delta\downarrow0}\mathcal{H}_{s,\delta}\left(E\right)$.

טענה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי יהי $s\ge0$ ויהי $\delta>0$ אזי

- יהי $E\subseteq X$ אזי $f:\left(0,\infty\right)\to\left[0,\infty\right]$ המוגדרת $f\left(\delta\right)=\mathcal{H}_{s,\delta}\left(E\right)$ יורדת.
- יהי $E\subseteq X$ אזי $f:\left[0,\infty\right)\to\left[0,\infty\right]$ המוגדרת $f\left(s\right)=\mathcal{H}_{s,\delta}\left(E\right)$ יורדת.

- יהי $E\subseteq X$ אזי $f:(0,\infty)\to[0,\infty]$ המוגדרת $f(s)=\mathcal{H}_s(E)$ יורדת.
- $\mathcal{H}_s(\varnothing)=0$.
- $\mathcal{H}_s,\mathcal{H}_{s,\delta}$ מידות חיצוניות.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\ge0$ יהי $\delta>0$ ותהיינה $A,B\subseteq X$ עבורן $d(A,B)>\delta$ אזי $\mathcal{H}_{s,\delta}(A\cup B)=\mathcal{H}_{s,\delta}(A)+\mathcal{H}_{s,\delta}(B)$.

מסקנה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\ge0$ ותהיינה $A,B\subseteq X$ עבורן $d(A,B)>0$ אזי $\mathcal{H}_s(A\cup B)=\mathcal{H}_s(A)+\mathcal{H}_s(B)$.

מסקנה: יהי $s\ge0$ ותהא $E\in\mathcal{B}(X)$ אזי E מדידה $\mathcal{H}_s$.

מסקנה: תהא $f:X\to Y$ ליפשיץ L ותהא $E\subseteq X$ אזי $\mathcal{H}_s(f(E))\le L^s\cdot\mathcal{H}_s(E)$.

מסקנה: תהא $f:X\to X$ איזומטריה ותהא $E\subseteq X$ אזי $\mathcal{H}_s(f(E))=\mathcal{H}_s(E)$.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\ge0$ ותהא $E\subseteq X$ אזי

- אם $\mathcal{H}_s(E)<\infty$ אזי לכל $t>s$ מתקיים $\mathcal{H}_t(E)=0$.
- אם $\mathcal{H}_s(E)>0$ אזי לכל $t<s$ מתקיים $\mathcal{H}_t(E)=\infty$.

מסקנה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^n$ ויהי $n<s$ אזי $\mathcal{H}_s(E)=0$.

מימד האוסדורף: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $E\subseteq X$ אזי $\dim_{\mathcal{H}}(E)=\inf\{s\ge0\mid\mathcal{H}_s(E)=0\}$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^n)=n$.

משפט: $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})=\log_3(2)$.

משפט: תהא m_d מידת לבג מעל $\mathbb{R}^n$ אזי $\mathcal{H}_n=\frac{2^n}{m_d(\{|x|\le1\})}\cdot m_d$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $0<\mathcal{H}_n([0,1]^n)<\infty$.

העתקה מדידה: יהיו $(X,\Sigma_X),(Y,\Sigma_Y)$ מרחבים מדידים אזי $T:X\to Y$ המקיימת $T^{-1}(\Sigma_Y)\subseteq\Sigma_X$.

סימון: יהיו $(X,\Sigma_X),(Y,\Sigma_Y)$ מרחבים מדידים ותהא $T:X\to Y$ העתקה מדידה אזי $T:(X,\Sigma_X)\to(Y,\Sigma_Y)$.

טענה: יהיו $(X,\Sigma_X),(Y,\Sigma_Y),(Z,\Sigma_Z)$ מרחבים מדידים תהא $T:X\to Y$ העתקה (Σ_X,Σ_Y)-מדידה ותהא $S:Y\to Z$ העתקה (Σ_Y,Σ_Z)-מדידה אזי $S\circ T$ העתקה (Σ_X,Σ_Z)-מדידה.

טענה: יהיו $(X,\Sigma_X),(Y,\Sigma_Y)$ מרחבים מדידים תהא $T:X\to Y$ ותהא $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(Y)$ עבורה $\Sigma_Y=\sigma(\mathcal{E})$ וכן $T^{-1}(\mathcal{E})\subseteq\Sigma_X$ אזי T העתקה (Σ_X,Σ_Y)-מדידה.

טענה: יהיו X,Y מרחבים מטריים ותהא $T\in C(X,Y)$ אזי T העתקה $(\mathcal{B}(X),\mathcal{B}(Y))$-מדידה.

הגדרה: $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}=[-\infty,\infty]$.

הגדרה: נגדיר $0\cdot(\pm\infty)=0$ והפעולות $\infty-\infty,\frac{\infty}{\infty}$ אינן מוגדרות.

הגדרה: נגדיר $A(x)=\lim_{t\to x}\arctan(t)$ וכן $\rho(x,y)=|A(x)-A(y)|$.

טענה: $\left(\overline{\mathbb{R}},\rho\right)$ מרחב מטרי שלם.

טענה: תהא $A\subseteq\overline{\mathbb{R}}$ אזי $\left(A\in\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)\Longleftrightarrow$(קיימת $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ וכן $S\in\mathcal{P}(\{\pm\infty\})$ עבורן $A=B\cup S$).

טענה: $\mathcal{B}(\mathbb{R})=\mathbb{R}\cap\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$.

פונקציה מדידה בורל/מדידה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד אזי

- העתקה $f:X\to\mathbb{R}$ $(\Sigma,\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-מדידה.
- העתקה $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ $\left(\Sigma,\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-מדידה.

מסקנה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $f:X\to\mathbb{R}$ התב"ש

- f מדידה בורל.
- לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\{f\ge a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\{f\ge a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\{f>a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\{f>a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\{f\le a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\{f\le a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\{f<a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\{f<a\}\in\Sigma$.

מסקנה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $f\in C(X,\mathbb{R})$ רציפה אזי f מדידה בורל.

טענה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ אזי (f מדידה בורל)$\iff$($f_{\restriction_{f^{-1}(\mathbb{R})}}$ מדידה בורל וכן $f^{-1}(\pm\infty)\in\Sigma$).

סימון: תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ אזי $f^{+}=\max\{f,0\}$ וכן $f^{-}=-\max\{-f,0\}$.

משפט: תהיינה $f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות אזי $f^{+},f^{-},\frac{1}{f},f\cdot g,f+g,f^{2}$ מדידות.

מסקנה: תהיינה $f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות אזי $\{f<g\},\{f\le g\},\{f=g\}\in\Sigma$.

משפט: תהא $\{f_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ סדרת פונקציות מדידות אזי $\sup\{f_n\},\inf\{f_n\},\limsup\{f_n\},\liminf\{f_n\}$ מדידות.

מסקנה: תהא $\{f_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ סדרת פונקציות מדידות ותהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ עבורה $f_n\to f$ אזי f מדידה.

מסקנה: תהיינה $f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות אזי $\min\{f,g\},\max\{f,g\},|f|$ מדידות.

פונקציה פשוטה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד אזי $\varphi:X\to\mathbb{R}$ עבורה קיימים $E_1\dots E_n\in\Sigma$ וכן $a_1\dots a_n\in\mathbb{R}$ עבורם $\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbb{1}_{E_i}$.

פונקציה סטנדרטית: יהי (X,Σ) מרחב מדיד אזי $\varphi:X\to\mathbb{R}$ עבורה קיימים $E_1\dots E_n\in\Sigma$ עבורם $\biguplus_{i=1}^{n}E_i=X$ וקיימים $a_1\dots a_n\in\mathbb{R}$ עבורם $\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbb{1}_{E_i}$.

הצגה סטנדרטית של פונקציה פשוטה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $\varphi:X\to\mathbb{R}$ פשוטה אזי $\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbb{1}_{E_i}$ באשר $\biguplus_{i=1}^{n}E_i=X$.

טענה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $\varphi:X\to\mathbb{R}$ פשוטה אזי קיימת הצגה סטנדרטית.

טענה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $\varphi:X\to\mathbb{R}$ אזי (φ פשוטה)$\iff$(φ מדידה וכן $\varphi(X)$ סופית).

משפט: תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידה חיובית אזי קיימות $\{\varphi_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ פשוטות חיוביות עבורן $\varphi_n\uparrow f$.

משפט: תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידה חיובית תהא $A\subseteq X$ עבורה f חסומה ותהיינה $\{\varphi_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ פשוטות חיוביות עבורן $\varphi_n\uparrow f$ אזי $\varphi_n\rightrightarrows f$ על A.

מסקנה: תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידה אזי קיימות $\{\varphi_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ פשוטות עבורן $\varphi_n\to f$ וכן $|\varphi_n|\uparrow|f|$.

טענה: תהא μ מידה שלמה תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידה ותהא $g:X\to\mathbb{R}$ המקיימת $f=g$ כ.ב.מ. אזי g מדידה.

טענה: תהא μ מידה שלמה תהיינה $\{f_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות ותהא $f:X\to\mathbb{R}$ המקיימת $f_n\to f$ כ.ב.מ. אזי f מדידה.

טענה: תהא μ מידה ותהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ $\overline{\mu}$-מדידה אזי קיימת $g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ μ-מדידה וכן $f=g$ $\overline{\mu}$-כ.ב.מ.

מחלקת בורל: יהי X מרחב מטרי אזי $\mathrm{Borel}(X)=\{f:X\to\mathbb{R}\mid f\text{ מדידה בורל}\}$.

סימון: יהי X מרחב מטרי אזי $\mathrm{Baire}_0(X)=C(X)$ וכן $\mathrm{Baire}_{i+1}(X)=\{\lim_{n\to\infty}f_n\mid\{f_n\}\subseteq\mathrm{Baire}_i(X)\}$.

מחלקת בייר: יהי X מרחב מטרי אזי $\mathrm{Baire}(X)=\bigcup_{i=0}^{\infty}\mathrm{Baire}_i(X)$.

למה: תהא $\varphi\in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ ותהיינה $f,g\in\mathrm{Baire}(X)$ אזי $\varphi(f,g)\in\mathrm{Baire}(X)$.

למה: תהא $F\subseteq X$ סגורה אזי קיימות $\{f_n\}\subseteq C(X,\mathbb{R})$ עבורן $f_n\to\mathbb{1}_F$.

מחלקה מונוטונית: יהי X מרחב מטרי אזי $R\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת
- תהיינה $\{E_i\}\subseteq R$ עבורן $\forall i\in\mathbb{N}.E_i\subseteq E_{i+1}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\in R$.
- תהיינה $\{E_i\}\subseteq R$ עבורן $\forall i\in\mathbb{N}.E_i\supseteq E_{i+1}$ אזי $\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i\in R$.

מחלקה מונוטונית נוצרת: תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ ותהיינה $\{\mathcal{R}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כל המחלקות המונוטוניות מעל X המכילות את A אזי $\mathcal{M}(\mathcal{A})=\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{R}_\alpha$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ אלגברה אזי $\mathcal{M}(A)$ הינה המחלקה המונוטונית הקטנה ביותר המכילה את A.

למה: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ אלגברה אזי $\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

משפט: יהי X מרחב מטרי אזי $\mathrm{Baire}(X)=\mathrm{Borel}(X)$.

משפט לוזין/טענה העיקרון השני של ליטלווד: תהא μ מידת בורל סופית על $\mathbb{R}$ תהא $f:(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ותהא $\varepsilon>0$ אזי קיימת $K\subseteq\mathbb{R}$ קומפקטית עבורה $\mu(\mathbb{R}\backslash K)<\varepsilon$ וכן $f\in C(K)$.

הגדרה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $L^0(X,\Sigma)=\left\{f:X\to\overline{\mathbb{R}}\mid f\text{ מדידה}\right\}$.

התכנסות במידה: יהיו $\{f_n\}\subseteq L^0(X,\Sigma)$ ותהא $f\in L^0(X,\Sigma)$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ מתקיים $\mu(\{x\in X\mid|f_n(x)-f(x)|>0\})\to0$ אזי $f_n\xrightarrow{\mu}f$.

התכנסות כמעט בכל מקום: יהיו $\{f_n\}\subseteq L^0(X,\Sigma)$ ותהא $f\in L^0(X,\Sigma)$ עבורה $\mu(X\backslash\{x\in X\mid\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\})=0$ אזי $f_n\xrightarrow{\mu-a.e.}f$.

סימון: יהיו $\{f_n\}\subseteq L^0(X,\Sigma)$ ותהא $f\in L^0(X,\Sigma)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\mu-a.e.}f$ אזי $f_n\xrightarrow{a.e.}f$ וכן $f_n\xrightarrow{a.s.}f$.

משפט לבג: תהא μ מידה סופית יהיו $\{f_n\}\subseteq L^0(X,\Sigma)$ ותהא $f\in L^0(X,\Sigma)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\mu-a.e.}f$ אזי $f_n\xrightarrow{\mu}f$.

למה בורל קנטלי: יהיו $\{E_n\}\subseteq\Sigma$ מדידות עבורן $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)<\infty$ אזי $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k\right)=0$.

מסקנה: יהיו $\{f_n\}\subseteq L^0(X,\Sigma)$ עבורן לכל $\varepsilon>0$ מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{|f_n>\varepsilon|\})<\infty$ אזי

- $f_n \xrightarrow{a.e.} 0$.
- תהא $\delta > 0$ אזי קיימת $E \subseteq X$ עבורה $\mu(E) < \delta$ וכן $f_n \rightrightarrows 0$ על $X \backslash E$.

משפט ריס: תהיינה $f_n \xrightarrow{\mu} f$ אזי קיימת תת"ס עבורה $f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$.

מסקנה: יהיו $\{f_n\} \subseteq L^0(X, \Sigma)$ ותהיינה $f, g \in L^0(X, \Sigma)$ עבורן $f_n \xrightarrow{\mu} f$ וכן $f_n \xrightarrow{\mu} g$ אזי $f = g$ כ.ב.מ..

משפט אגורוב/טענה העיקרון השלישי של ליטלווד: תהא μ מידה סופית ותהיינה $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $E \subseteq X$ עבורה $\mu(E) < \varepsilon$ וכן $f_n \rightrightarrows f$ על $X \backslash E$.

מסקנה לוזין: תהא μ מידה סופית ותהיינה $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ אזי קיימת $N \subseteq X$ עבורה $\mu(N) = 0$ וקיימות $\{A_k\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורן $X = N \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ וכן לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $f_n \rightrightarrows f$ על A_k.

למה פרשה: יהי (X, ρ) מרחב מטרי שלם וספרבילי תהא μ מידת בורל סופית על X ותהא $f : (X, \mathcal{B}(X)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ אזי קיימות $\{f_n\} \subseteq C(X)$ עבורן $f_n \xrightarrow{a.e.} f$.

משפט לוזין: יהי (X, ρ) מרחב מטרי שלם וספרבילי תהא μ מידת בורל סופית על X תהא $f : (X, \mathcal{B}(X)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ותהא $\varepsilon > 0$ אזי קיימת $K \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטית עבורה $\mu(\mathbb{R} \backslash K) < \varepsilon$ וכן $f \in C(K)$.

סימון: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $\mathcal{S}(\Sigma) = \{\varphi \in X \to \mathbb{R} \mid \text{פונקציה פשוטה } \varphi\}$.

סימון: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $\mathcal{S}^+(\Sigma) = \{\varphi \in \mathcal{S}(\Sigma) \mid \varphi \geq 0\}$.

למה: תהא $f \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ ותהיינה $f = \sum_{i=1}^{N} x_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^{M} y_i \mathbb{1}_{B_i}$ הצגות סטנדרטיות אזי $\sum_{i=1}^{N} x_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{M} y_i \mu(B_i)$.

אינטגרל: תהא $f \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ ותהא $f = \sum_{i=1}^{N} x_i \mathbb{1}_{A_i}$ הצגה סטנדרטית אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{N} x_i \mu(A_i)$.

אינטגרל: תהא $f \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ ותהא $E \in \Sigma$ אזי $\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_X \mathbb{1}_E f \mathrm{d}\mu$.

טענה: תהיינה $f, g \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ תהא $A \in \Sigma$ ויהי $\lambda \geq 0$ אזי
- $\int_X \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu = \mu(A)$.
- הומוגניות חיובית: $\int_X \lambda f \mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f \mathrm{d}\mu$.
- חיבוריות: $\int_X (f+g) \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu + \int_X g \mathrm{d}\mu$.
- מונוטוניות: נניח כי $f \leq g$ אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \mathrm{d}\mu$.

טענה: תהא $f \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ אזי $\psi : \Sigma \to \mathbb{R}$ המוגדרת $\psi(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu$ הינה מידה מעל Σ.

סימון: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $L^0(X, \Sigma) = \{f \in X \to \overline{\mathbb{R}} \mid \left(\Sigma, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\right)\text{-מדידה } f\}$.

סימון: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $L_+^0(X, \Sigma) = \{f \in L^0(X, \Sigma) \mid f \geq 0\}$.

למה: תהא $f \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int_X \varphi \mathrm{d}\mu \mid (\varphi \in \mathcal{S}^+(\Sigma)) \wedge (\varphi \leq f)\right\}$.

אינטגרל: תהא $f \in L_+^0(X, \Sigma)$ אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int_X \varphi \mathrm{d}\mu \mid (\varphi \in \mathcal{S}^+(\Sigma)) \wedge (\varphi \leq f)\right\}$.

אינטגרל: תהא $f \in L_+^0(X, \Sigma)$ ותהא $E \in \Sigma$ אזי $\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_X \mathbb{1}_E f \mathrm{d}\mu$.

טענה: תהיינה $f, \{f_n\} \subseteq L_+^0(X, \Sigma)$ עבורן $f_n \uparrow f$ ותהא $g \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ באשר $g \leq f$ אזי $\int_X g \mathrm{d}\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$.

משפט התכנסות מונוטונית: תהיינה $f, \{f_n\} \subseteq L_+^0(X, \Sigma)$ עבורן $f_n \uparrow f$ אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$.

מסקנה: תהא $f \in L_+^0(X, \Sigma)$ ותהא $\{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{S}^+(\Sigma)$ עבורה $\varphi_n \uparrow f$ אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu$.

טענה: תהיינה $f, g \in L_+^0(X, \Sigma)$ תהא $A \in \Sigma$ ויהי $\lambda \geq 0$ אזי
- $\int_X \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu = \mu(A)$.
- הומוגניות חיובית: $\int_X \lambda f \mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f \mathrm{d}\mu$.
- חיבוריות: $\int_X (f+g) \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu + \int_X g \mathrm{d}\mu$.
- מונוטוניות: נניח כי $f \leq g$ אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \mathrm{d}\mu$.

מסקנה: תהא $\{f_n\} \subseteq L_+^0(X, \Sigma)$ ותהא $E \in \Sigma$ אזי $\int_E f \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu$.

טענה: תהא $f \in L_+^0(X, \Sigma)$ אזי $\left(\int_X f \mathrm{d}\mu = 0\right) \Longleftrightarrow (f = 0$ כ.ב.מ.).

טענה התכנסות מונוטונית: תהיינה $f, \{f_n\} \subseteq L_+^0(X, \Sigma)$ עבורן $f_n \uparrow f$ כ.ב.מ. אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$.

משפט הלמה של פטו: תהא $\{f_n\} \subseteq L_+^0(X, \Sigma)$ אזי $\int_X (\liminf_{n \to \infty} f_n) \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$.

מסקנה: תהיינה $f, \{f_n\} \subseteq L_+^0(X, \Sigma)$ עבורן $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$.

אינטגרל: תהא $f \in L^0(X, \Sigma)$ עבורה $\int_X f^{\pm} \mathrm{d}\mu < \infty$ אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \mathrm{d}\mu$.

סימון: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $L^1(\mu) = \left\{f \in L^0(X, \Sigma) \mid \int_X f^{\pm} \mathrm{d}\mu < \infty\right\}$.

טענה: תהא $f \in L^0(X, \Sigma)$ התב"ש
- $f \in L^1(\mu)$.

- $f^{\pm}\in L^{1}\left(\mu\right)$.
- $\left|f\right|\in L^{1}\left(\mu\right)$.
- קיימת $g\in L^{1}\left(\mu\right)$ עבורה $\left|f\right|\le g$.

טענה: יהיו $f,g\in L^{1}\left(\mu\right)$ ויהי $\lambda\in\mathbb{R}$ אזי

- הומוגניות: מתקיים $\lambda f\in L^{1}\left(\mu\right)$ ובפרט $\int_{X}\lambda f\mathrm{d}\mu=\lambda\int_{X}f\mathrm{d}\mu$.
- חיבוריות: מתקיים $f+g\in L^{1}\left(\mu\right)$ ובפרט $\int_{X}\left(f+g\right)\mathrm{d}\mu=\int_{X}f\mathrm{d}\mu+\int_{X}g\mathrm{d}\mu$.
- $\max\left\{ f,g\right\} ,\min\left\{ f,g\right\} \in L^{1}\left(\mu\right)$.
- מונוטוניות: נניח כי $f\le g$ אזי $\int_{X}f\mathrm{d}\mu\le\int_{X}g\mathrm{d}\mu$.
- אי־שיוויון המשולש: $\left|\int_{X}f\mathrm{d}\mu\right|\le\int_{X}\left|f\right|\mathrm{d}\mu$.

אינטגרל: תהא $f\in L^{1}\left(\mu\right)$ ותהא $E\in\Sigma$ אזי $\int_{E}f\mathrm{d}\mu=\int_{X}\mathbb{1}_{E}f\mathrm{d}\mu$.

מידה עם צפיפות ביחס למידה: תהא $f\in L_{+}^{0}\left(X,\Sigma\right)$ אזי $\psi:\Sigma\to\mathbb{R}$ המוגדרת $\psi\left(E\right)=\int_{E}f\mathrm{d}\mu$.

סימון: תהא $f\in L_{+}^{0}\left(X,\Sigma\right)$ אזי מידה עם צפיפות f ביחס למידה μ הינה $f\mathrm{d}\mu$.

למה: תהא $f\in L_{+}^{0}\left(X,\Sigma\right)$ אזי $f\mathrm{d}\mu$ הינה מידה מעל Σ.

פונקציה מדידה בורל/מדידה: יהי $\left(X,\Sigma\right)$ מרחב מדיד אזי העתקה $f:X\to\mathbb{C}$ $\left(\Sigma,\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{2}\right)\right)$־מדידה.

טענה: תהא $f:X\to\mathbb{C}$ אזי (f מדידה)$\Longleftrightarrow$($\mathrm{Re}\left(f\right),\mathrm{Im}\left(f\right)$ מדידות).

אינטגרל: תהא $f:X\to\mathbb{C}$ מדידה עבורה $\int_{X}\mathrm{Re}\left(f\right)\mathrm{d}\mu,\int_{X}\mathrm{Im}\left(f\right)\mathrm{d}\mu<\infty$ אזי $\int_{X}f\mathrm{d}\mu=\int_{X}\mathrm{Re}\left(f\right)\mathrm{d}\mu+i\int_{X}\mathrm{Im}\left(f\right)\mathrm{d}\mu$.

הערה: נשתמש בסימון $L^{1}\left(\mu\right)$ גם עבור פונקציות מרוכבות אינטגרביליות.

טענה: תהא $f\in L^{1}\left(\mu\right)$ אזי $\left|\int_{X}f\mathrm{d}\mu\right|\le\int_{X}\left|f\right|\mathrm{d}\mu$.

טענה: תהא $f\in L^{1}\left(\mu\right)$ אזי $\left\{ f\ne0\right\}$ קבוצה σ־סופית.

טענה: תהא $f\in L^{1}\left(\mu\right)$ אזי (לכל $E\in\Sigma$ מתקיים $\int_{E}f\mathrm{d}\mu=0$)$\Longleftrightarrow$($f=0$ כ.ב.מ.).

מסקנה: תהיינה $f,g\in L^{1}\left(\mu\right)$ עבורן $\mu\left(\left\{ f\ne g\right\} \right)=0$ אזי $\int_{X}f\mathrm{d}\mu=\int_{X}g\mathrm{d}\mu$.

הגדרה: תהיינה $f,g\in L^{1}\left(\mu\right)$ עבורן $\mu\left(\left\{ f\ne g\right\} \right)=0$ אזי $f\sim g$.

הערה: מכאן והלאה נתייחס לפונקציות שקולות כזהות, כלומר $L^{1}\left(\mu\right)\equiv{}^{L^{1}\left(\mu\right)}/_{\sim}$.

טענה: תהא μ מידה אזי $L^{1}\left(\mu\right)\equiv L^{1}\left(\overline{\mu}\right)$.

משפט ההתכנסות הנשלטת/לבג: תהא $\left\{ f_{n}\right\} \subseteq L^{1}\left(\mu\right)$ עבורה $f_{n}\to f$ וכן קיימת $g\in L^{1}\left(\mu\right)$ עבורה $\left|f_{n}\right|\le g$ אזי $f\in L^{1}\left(\mu\right)$ וכן $\int_{X}f\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{X}f_{n}\mathrm{d}\mu$.

טענה: תהא $\left\{ f_{n}\right\} \subseteq L^{1}\left(\mu\right)$ עבורה $f_{n}\xrightarrow{\mu}f$ וכן קיימת $g\in L^{1}\left(\mu\right)$ עבורה $\left|f_{n}\right|\le g$ אזי $f\in L^{1}\left(\mu\right)$ וכן $\int_{X}f\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{X}f_{n}\mathrm{d}\mu$.

הערה: מהגדרת האינטגרל ניתן להפוך את כל המגבלות לכמעט בכל מקום.

מסקנה: תהא $\left\{ f_{n}\right\} \subseteq L^{1}\left(\mu\right)$ עבורה $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{X}\left|f_{n}\right|\mathrm{d}\mu<\infty$ אזי $\sum f_{n}$ מתכנסת כ.ב.מ..

מסקנה: תהא $\left\{ f_{n}\right\} \subseteq L^{1}\left(\mu\right)$ עבורה $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{X}\left|f_{n}\right|\mathrm{d}\mu<\infty$ אזי $\sum f_{n}\in L^{1}\left(\mu\right)$ וכן $\int_{X}\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_{n}\right)\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{X}f_{n}\mathrm{d}\mu$.

משפט שפה: תהא $\left\{ f_{n}\right\} \subseteq L^{1}\left(\mu\right)$ ותהא $f\in L^{1}\left(\mu\right)$ עבורן $f_{m}\xrightarrow{\mu-a.e.}f$ אזי $\left(\int_{X}\left|f_{n}-f\right|\mathrm{d}\mu\to0\right)\iff\left(\int_{X}\left|f_{n}\right|\mathrm{d}\mu\to\int_{X}\left|f\right|\mathrm{d}\mu\right)$.

סימון: תהא $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי אינטגרל רימן שלה הינו $\left(R\right)\int_{a}^{b}f\mathrm{d}x$.

משפט: תהא m_{d} מידת לבג ותהא $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי קיימת $g:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ מדידה עבורה $g\in L^{1}\left(\lambda\right)$ וכן $f=g$ m_{d}־כ.ב.מ. המקיימת $\int_{\left[a,b\right]}g\mathrm{d}m_{d}=\left(R\right)\int_{a}^{b}f\mathrm{d}x$.

סימון: יהי $p\in\left[1,\infty\right)$ אזי $L^{p}\left(\mu\right)=\left\{ f:X\to\mathbb{R}\mid\left(f\in L^{0}\left(X,\Sigma\right)\right)\wedge\left(\int_{X}\left|f\right|^{p}\mathrm{d}\mu<\infty\right)\right\}$.

סימון: $L^{\infty}\left(\mu\right)=\left\{ f:X\to\mathbb{R}\mid\left(f\in L^{0}\left(X,\Sigma\right)\right)\wedge\left(\exists c>0.\mu\left(\left\{ \left|f\right|\ge0\right\} \right)=0\right)\right\}$.

הגדרה: נגדיר $\left\Vert \cdot\right\Vert _{p}:L^{p}\left(\mu\right)\to\mathbb{R}$ כך $\left\Vert f\right\Vert =\left(\int_{X}\left|f\right|^{p}\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

הגדרה: נגדיר $\left\Vert \cdot\right\Vert _{\infty}:L^{\infty}\left(\mu\right)\to\mathbb{R}$ כך $\rho_{\infty}\left(f,g\right)=\inf\left\{ c>0\mid\mu\left(\left\{ \left|f\right|\ge c\right\} \right)=0\right\}$.

טענה אי־שיוויון הולדר: יהיו $p,q\in\left[1,\infty\right]$ עבורם $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ תהא $f\in L^{p}\left(\mu\right)$ ותהא $g\in L^{q}\left(\mu\right)$ אזי $fg\in L^{1}\left(\mu\right)$ וכן $\int_{X}\left|fg\right|\mathrm{d}\mu\le\left\Vert f\right\Vert _{p}\left\Vert g\right\Vert _{q}$.

מסקנה: יהיו $p,q\in\left[1,\infty\right)$ עבורם $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ תהא $f\in L^{p}\left(\mu\right)$ עבורה $\left\Vert f\right\Vert _{p}\ne0$ ותהא $g\in L^{q}\left(\mu\right)$ עבורה $\left\Vert g\right\Vert _{q}\ne0$ אזי ($\int_{X}\left|fg\right|\mathrm{d}\mu=\left\Vert f\right\Vert _{p}\left\Vert g\right\Vert _{q}$)$\Longleftrightarrow$($\frac{\left|f\right|^{p}}{\left\Vert f\right\Vert _{p}^{p}}=\frac{\left|g\right|^{p}}{\left\Vert g\right\Vert _{p}^{p}}$ כ.ב.מ.).

מסקנה: ρ_{p} מטריקה מעל $L^{p}\left(\mu\right)$.

מסקנה: תהא $f\in L^{1}\left(\mu\right)$ ותהא $g\in L^{\infty}\left(\mu\right)$ אזי $\left(\int_{X}\left|fg\right|\mathrm{d}\mu=\left\Vert f\right\Vert _{1}\left\Vert g\right\Vert _{\infty}\right)\Longleftrightarrow\left(g_{\restriction_{\left\{ f\neq0\right\} }}=\left\Vert g\right\Vert _{\infty}\right.$ כ.ב.מ.).

מסקנה אי־שיוויון קושי־שוורץ: תהיינה $f,g\in L^{2}\left(\mu\right)$ אזי $\int_{X}\left|fg\right|\mathrm{d}\mu\le\left\Vert f\right\Vert _{2}\left\Vert g\right\Vert _{2}$.

מסקנה אי־שיוויון מינקובסקי: יהי $p\in\left[1,\infty\right]$ ותהיינה $f,g\in L^{p}\left(\mu\right)$ אזי $f+g\in L^{p}\left(\mu\right)$ וכן $\left\Vert f+g\right\Vert _{p}\le\left\Vert f\right\Vert _{p}+\left\Vert g\right\Vert _{p}$.

טענה אי־שיוויון צ'בישב: תהא $\varphi\in L_{+}^{0}\left(X,\Sigma\right)$ אזי לכל $t>0$ מתקיים $\mu\left(\left\{ x\in X\mid\varphi\ge t\right\} \right)\le\frac{1}{t}\int_{X}\varphi\mathrm{d}\mu$.

התכנסות L^{p}: תהא $\left\{ f_{n}\right\} \subseteq L^{p}\left(\mu\right)$ ותהא $f\in L^{p}\left(\mu\right)$ עבורן $\lim_{n\to\infty}\left\Vert f_{n}-f\right\Vert _{p}=0$ אזי $f_{n}\xrightarrow{L^{p}}f$.

סדרת קושי במרחב L^{p}: $\left\{ f_{n}\right\} \subseteq L^{p}\left(\mu\right)$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n,m\ge N$ מתקיים $\left\Vert f_{n}-f_{m}\right\Vert _{p}<\varepsilon$.

מסקנה: יהי $p\in\left[1,\infty\right)$ אזי $\mathcal{S}\left(\Sigma\right)$ צפופה במרחב $L^{p}\left(\mu\right)$.

למה: יהי $p\in\left[1,\infty\right)$ ותהא $\left\{ f_{n}\right\} \subseteq L^{p}\left(\mu\right)$ חיוביות אזי $\left\Vert \sum_{n=1}^{\infty}f_{n}\right\Vert _{p}\le\sum_{n=1}^{\infty}\left\Vert f_{n}\right\Vert _{p}$.

משפט ריס: יהי $p\in\left[1,\infty\right)$ תהא $\left\{ f_{n}\right\} \subseteq L^{p}\left(\mu\right)$ ותהא $f\in L^{p}\left(\mu\right)$ עבורה $f_{n}\xrightarrow{\mu-a.e.}f$ אזי $\left(\left\Vert f_{n}\right\Vert _{p}\to\left\Vert f\right\Vert _{p}\right)\Longleftrightarrow\left(f_{n}\xrightarrow{L^{p}}f\right)$.

משפט ריס־פישר: יהי $p\in\left[1,\infty\right]$ אזי $L^{p}\left(\mu\right)$ מרחב שלם.

מסקנה: יהי $p\in\left[1,\infty\right)$ תהא $\left\{ f_{n}\right\} \subseteq L^{p}\left(\mu\right)$ ותהא $f\in L^{p}\left(\mu\right)$ עבורה $f_{n}\xrightarrow{L^{p}}f$ אזי קיימת תת"ס $f_{n_{k}}$ עבורה $f_{n_{k}}\xrightarrow{\mu-a.e.}f$.

טענה רציפות של אינטגרל: תהא $f\in L^{1}\left(\mu\right)$ אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $E\in\Sigma$ המקיימת $\mu\left(E\right)<\delta$ מתקיים $\int_{E}\left|f\right|\mathrm{d}\mu<\varepsilon$.

אינטגרבילית במידה שווה: $\left\{ f_{n}\right\} \subseteq L^{1}\left(\mu\right)$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $E\in\Sigma$ המקיימת $\mu\left(E\right)<\delta$ מתקיים $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{E}\left|f_{n}\right|\mathrm{d}\mu<\varepsilon$.

משפט ויטלי: תהא $\left\{ f_{n}\right\} \subseteq L^{1}\left(\mu\right)$ אזי (קיימת $f\in L^{1}\left(\mu\right)$ עבורה $f_{n}\xrightarrow{L^{1}}f$)$\Longleftrightarrow$(($\left\{ f_{n}\right\}$ אינטגרביליות במ"ש)$\wedge$(קיימת $f\in L^{1}\left(\mu\right)$ עבורה $f_{n}\xrightarrow{\mu}f$)$\wedge$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת $E\in\Sigma$ עבורה $\mu\left(E\right)<\infty$ וכן $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{X\backslash E}\left|f_{n}\right|\mathrm{d}\mu<\varepsilon$)).

מסקנה: יהי $p\in\left[1,\infty\right)$ תהא $\left\{ f_{n}\right\} \subseteq L^{p}\left(\mu\right)$ ותהא $f\in L^{p}\left(\mu\right)$ עבורה $f_{n}\xrightarrow{\mu}f$ התב"ש
- $f_{n}\xrightarrow{L^{p}}f$.
- $\left\{ \left|f_{n}\right|^{p}\right\}$ אינטגרביליות במ"ש וכן לכל $\varepsilon>0$ קיימת $E\in\Sigma$ עבורה $\mu\left(E\right)<\infty$ וכן $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{X\backslash E}\left|f_{n}\right|^{p}\mathrm{d}\mu<\varepsilon$.
- $\left\Vert f_{n}\right\Vert _{p}\to\left\Vert f\right\Vert _{p}<\infty$.

אלגברה למחצה: תהא X קבוצה אזי חוג למחצה $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ עבורו $X\in\mathcal{E}$.

למה: יהיו $\left(X,\Sigma_{X}\right),\left(Y,\Sigma_{Y}\right)$ מרחבים מדידים אזי $\Sigma_{X}\times\Sigma_{Y}$ אלגברה למחצה על $X\times Y$.

σ־אלגברה מכפלה: יהיו $\left(X,\Sigma_{X}\right),\left(Y,\Sigma_{Y}\right)$ מרחבים מדידים אזי $\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y}=\sigma\left(\Sigma_{X}\times\Sigma_{Y}\right)$.

מרחב מכפלה: יהיו $\left(X,\Sigma_{X}\right),\left(Y,\Sigma_{Y}\right)$ מרחבים מדידים אזי $\left(X\times Y,\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y}\right)$.

למה: תהא $A\subseteq\Sigma$ עבורה $\sigma\left(A\right)=\Sigma_{X}$ וכן קיימת $\left\{ A_{n}\right\} \subseteq A$ עבורה $A_{n}\uparrow X$ ותהא $B\subseteq\Sigma$ עבורה $\sigma\left(B\right)=\Sigma_{Y}$ וכן קיימת $\left\{ B_{n}\right\} \subseteq B$ עבורה $B_{n}\uparrow X$ אזי $\sigma\left(A\times B\right)=\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y}$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\Sigma$ עבורה $\sigma\left(A\right)=\Sigma_{X}$ וכן $X\in A$ ותהא $B\subseteq\Sigma$ עבורה $\sigma\left(B\right)=\Sigma_{Y}$ וכן $Y\in B$ אזי $\sigma\left(A\times B\right)=\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y}$.

הגדרה: תהיינה X,Y קבוצות אזי
- נגדיר $\pi_{X}:X\times Y\to X$ כך $\pi_{X}\left(x,y\right)=x$.
- נגדיר $\pi_{Y}:X\times Y\to X$ כך $\pi_{Y}\left(x,y\right)=y$.

σ־אלגברה נוצרת על ידי העתקה מדידה: תהא $T:\left(X,\Sigma_{X}\right)\to\left(Y,\Sigma_{Y}\right)$ העתקה מדידה אזי $\sigma\left(T\right)=\sigma\left(\left\{ T^{-1}\left[A\right]\mid A\in\Sigma_{Y}\right\} \right)$.

משפט: יהיו $\left(X,\Sigma_{X}\right),\left(Y,\Sigma_{Y}\right)$ מרחבים מדידים אזי $\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y}=\sigma\left(\pi_{X},\pi_{Y}\right)$.

טענה: תהא $T:Z\to X\times Y$ אזי (T מדידה)$\Longleftrightarrow$($\pi_{X}\circ T,\pi_{Y}\circ T$ מדידות).

טענה: תהא $T:\left(X\times Y,\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y}\right)\to\left(Z,\Sigma_{Z}\right)$ העתקה מדידה ויהי $x\in X$ אזי $T\left(x,\cdot\right):Y\to Z$ היא $\left(\Sigma_{Y},\Sigma_{Z}\right)$־מדידה.

מסקנה: תהא $T:\left(X\times Y,\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y}\right)\to\left(Z,\Sigma_{Z}\right)$ העתקה מדידה ויהי $y\in Y$ אזי $T\left(\cdot,y\right):X\to Z$ היא $\left(\Sigma_{X},\Sigma_{Z}\right)$־מדידה.

משפט: תהא $A\subseteq\Sigma$ מערכת π עבורה $\sigma\left(A\right)=\Sigma_{X}$ וכן קיימת $\left\{ A_{n}\right\} \subseteq A$ עבורה $A_{n}\uparrow X$ וכן $\mu_{X}\left(A_{n}\right)<\infty$ ותהא $B\subseteq\Sigma$ מערכת π עבורה $\sigma\left(B\right)=\Sigma_{Y}$ וכן קיימת $\left\{ B_{n}\right\} \subseteq B$ עבורה $B_{n}\uparrow X$ וכן $\mu_{Y}\left(B_{n}\right)<\infty$ אזי קיימת ויחידה ρ מידה על $\left(X\times Y,\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y}\right)$ המקיימת $\rho\left(E\times F\right)=\mu_{X}\left(E\right)\mu_{Y}\left(F\right)$ לכל $E\in A$ וכן $F\in B$.

משפט: יהיו μ_{X},μ_{Y} מידות σ־סופיות ותהא $\rho:\Sigma_{X}\times\Sigma_{Y}\to\left[0,\infty\right]$ המקיימת $\rho\left(E\times F\right)=\mu_{X}\left(E\right)\mu_{Y}\left(F\right)$ אזי ρ מידה אלמנטרית.

מידת המכפלה: יהיו μ_{X},μ_{Y} מידות σ־סופיות ותהא $\rho:\Sigma_{X}\times\Sigma_{Y}\to\left[0,\infty\right]$ המקיימת $\rho\left(E\times F\right)=\mu_{X}\left(E\right)\mu_{Y}\left(F\right)$ אזי המשכת קרתאודורי של ρ.

סימון: יהיו μ_{X},μ_{Y} מידות σ־סופיות אזי מידת המכפלה היא $\mu_{X}\times\mu_{Y}$.

חתכים: תהא $E\subseteq X\times Y$ אזי

- יהי $x\in X$ אזי $E_x=\{y\in Y\mid (x,y)\in E\}$.
- יהי $y\in Y$ אזי $E_y=\{x\in X\mid (x,y)\in E\}$.

סימון: תהא $f:X\times Y\to\overline{\mathbb{R}}$ אזי $f_x\left(y\right)=f\left(x,y\right)$ וכן $f_y\left(x\right)=f\left(x,y\right)$.

למה: יהיו $\left(X,\Sigma_X,\mu_X\right),\left(Y,\Sigma_Y,\mu_Y\right)$ מרחבי מידה σ־סופיים ותהא $E\in\Sigma_X\otimes\Sigma_Y$ אזי

- לכל $x\in X$ מתקיים $E_x\in\Sigma_Y$.
- לכל $y\in Y$ מתקיים $E_y\in\Sigma_X$.
- הפונקציה $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $f\left(x\right)=\mu_Y\left(E_x\right)$ היא Σ_X־מדידה.
- הפונקציה $f:Y\to\overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $f\left(y\right)=\mu_X\left(E_y\right)$ היא Σ_Y־מדידה.

הערה: כאשר לא ברור מהו המשתנה באינטגרל מסמנים כך $\int f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu\left(x\right)$.

טענה: יהיו $\left(X,\Sigma_X,\mu_X\right),\left(Y,\Sigma_Y,\mu_Y\right)$ מרחבי מידה σ־סופיים ותהא $E\in\Sigma_X\otimes\Sigma_Y$ אזי $\left(\mu_X\times\mu_Y\right)\left(E\right)=\int_X\mu_Y\left(E_x\right)\mathrm{d}\mu_X=\int_Y\mu_X\left(E_y\right)\mathrm{d}\mu_Y$.

מסקנה: תהיינה μ_X,μ_Y,μ_Z מידות σ־סופיים אזי $\mu_X\times\mu_Y=\mu_Y\times\mu_X$ וכן $\left(\mu_X\times\mu_Y\right)\times\mu_Z=\mu_X\times\left(\mu_Y\times\mu_Z\right)$.

טענה: $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)=\bigotimes_{i=1}^d\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$.

טענה: תהא m_d מידת לבג תהא $f\in L^1\left(m_d\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימות A_i תיבות עבורן $\int_{\mathbb{R}^d}\left|f-\sum_{i=1}^n c_i\mathbb{1}_{A_i}\right|\mathrm{d}m_d<\varepsilon$.

מסקנה: תהא m_d מידת לבג תהא $f\in L^1\left(m_d\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת A תיבה חסומה וכן $g\in C\left(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}\right)$ עבורה $g_{\restriction_{\mathbb{R}^d\setminus A}}=0$ וכן $\int_{\mathbb{R}^d}\left|f-g\right|\mathrm{d}m_d<\varepsilon$.

משפט טונלי: יהיו $\left(X,\Sigma_X,\mu_X\right),\left(Y,\Sigma_Y,\mu_Y\right)$ מרחבי מידה σ־סופיים ותהא $f:X\times Y\to[0,\infty]$ פונקציה $\Sigma_X\otimes\Sigma_Y$ מדידה אזי

- לכל $x\in X$ הפונקציה $f_x\left(y\right)$ היא Σ_Y־מדידה.
- לכל $y\in Y$ הפונקציה $f_y\left(x\right)$ היא Σ_X־מדידה.
- הפונקציה $\varphi:X\to\overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi\left(x\right)=\int_Y f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_Y\left(y\right)$ היא Σ_X־מדידה.
- הפונקציה $\varphi:Y\to\overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi\left(y\right)=\int_X f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_X\left(x\right)$ היא Σ_Y־מדידה.
- מתקיים $\int_{X\times Y}f\mathrm{d}\left(\mu_X\times\mu_Y\right)=\int_X\int_Y f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_Y\left(y\right)\mathrm{d}\mu_X\left(x\right)=\int_Y\int_X f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_X\left(x\right)\mathrm{d}\mu_Y\left(y\right)$.

מסקנה משפט פוביני: יהיו $\left(X,\Sigma_X,\mu_X\right),\left(Y,\Sigma_Y,\mu_Y\right)$ מרחבי מידה σ־סופיים ותהא $f:X\times Y\to\overline{\mathbb{R}}$ פונקציה $\Sigma_X\otimes\Sigma_Y$ מדידה עבורה $\left(\int_{X\times Y}|f|\mathrm{d}\left(\mu_X\times\mu_Y\right)<\infty\right)\vee\left(\int_X\int_Y\left|f\left(x,y\right)\right|\mathrm{d}\mu_Y\left(y\right)\mathrm{d}\mu_X\left(x\right)<\infty\right)\vee\left(\int_Y\int_X\left|f\left(x,y\right)\right|\mathrm{d}\mu_X\left(x\right)\mathrm{d}\mu_Y\left(y\right)<\infty\right)$ אזי

- $\int_Y\int_X\left|f\left(x,y\right)\right|\mathrm{d}\mu_X\left(x\right)\mathrm{d}\mu_Y\left(y\right),\int_X\int_Y\left|f\left(x,y\right)\right|\mathrm{d}\mu_Y\left(y\right)\mathrm{d}\mu_X\left(x\right),\int_{X\times Y}|f|\mathrm{d}\left(\mu_X\times\mu_Y\right)<\infty$.
- $f\in L^1\left(\mu_X\times\mu_Y\right)$.
- $f_y\left(x\right)$ היא μ_Y־כ.ב.מ. שייכת ל־$L^1\left(\mu_X\right)$.
- $f_x\left(y\right)$ היא μ_X־כ.ב.מ. שייכת ל־$L^1\left(\mu_Y\right)$.
- הפונקציה $\varphi:X\to\overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi\left(x\right)=\int_Y f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_Y\left(y\right)$ מקיימת $\varphi\in L^1\left(\mu_X\right)$.
- הפונקציה $\varphi:Y\to\overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi\left(y\right)=\int_X f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_X\left(x\right)$ מקיימת $\varphi\in L^1\left(\mu_Y\right)$.
- מתקיים $\int_{X\times Y}f\mathrm{d}\left(\mu_X\times\mu_Y\right)=\int_X\int_Y f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_Y\left(y\right)\mathrm{d}\mu_X\left(x\right)=\int_Y\int_X f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_X\left(x\right)\mathrm{d}\mu_Y\left(y\right)$.

טענה: יהיו $\left(X,\Sigma_X,\mu_X\right),\left(Y,\Sigma_Y,\mu_Y\right)$ מרחבי מידה שלמים σ־סופיים תהא $\left(X\times Y,\Sigma,\rho\right)$ השלמה של $\left(X\times Y,\Sigma_X\otimes\Sigma_Y,\mu_X\times\mu_Y\right)$ ותהא $f\in L^0\left(X\times Y,\Sigma\right)$ חיובית אזי

- $f_y\left(x\right)$ היא μ_Y־כ.ב.מ. מדידה $\left(\Sigma_X,\mathbb{R}\right)$.
- $f_x\left(y\right)$ היא μ_X־כ.ב.מ. מדידה $\left(\Sigma_Y,\mathbb{R}\right)$.
- הפונקציה $\varphi:X\to\overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi\left(x\right)=\int_Y f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_Y\left(y\right)$ היא מדידה.
- הפונקציה $\varphi:Y\to\overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi\left(y\right)=\int_X f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_X\left(x\right)$ היא מדידה.
- מתקיים $\int_{X\times Y}f\mathrm{d}\left(\mu_X\times\mu_Y\right)=\int_X\int_Y f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_Y\left(y\right)\mathrm{d}\mu_X\left(x\right)=\int_Y\int_X f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_X\left(x\right)\mathrm{d}\mu_Y\left(y\right)$.

טענה: יהיו $\left(X,\Sigma_X,\mu_X\right),\left(Y,\Sigma_Y,\mu_Y\right)$ מרחבי מידה שלמים σ־סופיים תהא $\left(X\times Y,\Sigma,\rho\right)$ השלמה של $\left(X\times Y,\Sigma_X\otimes\Sigma_Y,\mu_X\times\mu_Y\right)$ ותהא $f\in L^1\left(\rho\right)$ אזי

- $f_y\left(x\right)$ היא μ_Y־כ.ב.מ. שייכת ל־$L^1\left(\mu_X\right)$.
- $f_x\left(y\right)$ היא μ_X־כ.ב.מ. שייכת ל־$L^1\left(\mu_Y\right)$.
- הפונקציה $\varphi:X\to\overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi\left(x\right)=\int_Y f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_Y\left(y\right)$ מקיימת $\varphi\in L^1\left(\mu_X\right)$.
- הפונקציה $\varphi:Y\to\overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi\left(y\right)=\int_X f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_X\left(x\right)$ מקיימת $\varphi\in L^1\left(\mu_Y\right)$.

- מתקיים $\int_{X\times Y}f\mathrm{d}\left(\mu_X\times\mu_Y\right)=\int_X\int_Y f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_Y\left(y\right)\mathrm{d}\mu_X\left(x\right)=\int_Y\int_X f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_X\left(x\right)\mathrm{d}\mu_Y\left(y\right)$.

מידת התמונה של מידה תחת ההעתקה: תהא $T:(X,\Sigma_X)\to(Y,\Sigma_Y)$ ותהא μ_X מידה על (X,Σ_X) אזי $T_*\mu:\Sigma_Y\to\overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\left(T_*\mu\right)\left(F\right)=\mu\left(T^{-1}\left(F\right)\right)$.

טענה: תהא $T:(X,\Sigma_X)\to(Y,\Sigma_Y)$ ותהא μ_X מידה על (X,Σ_X) אזי $T_*\mu$ מידה על (Y,Σ_Y).

למה: תהא $T:(X,\Sigma_X)\to(Y,\Sigma_Y)$ ותהא $f\in L_+^0\left(\Sigma_Y\right)$ אזי $\left(f\circ T\in L^1\left(\mu_X\right)\right)\iff\left(f\in L^1\left(T_*\mu_X\right)\right)$.

משפט: תהא $T:(X,\Sigma_X)\to(Y,\Sigma_Y)$ ותהא $f\in L_+^0\left(\Sigma_Y\right)\cup L^1\left(T_*\mu_X\right)$ אזי $\int_Y f\mathrm{d}T_*\mu_X=\int_Y\left(f\circ T\right)\mathrm{d}\mu_X$.

טענה: תהא $T\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^d\right)$ הפיכה ותהא m_d מידת לבג אזי $T_*m_d=\left|\det\left(T\right)\right|^{-1}m_d$.

מסקנה: תהא $A\in M_d\left(\mathbb{R}\right)$ הפיכה תהא $b\in\mathbb{R}^d$ תהא m_d מידת לבג תהא $f\in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ ותהא $U\subseteq\mathbb{R}^d$ פתוחה אזי $\int_{AU+b}f\mathrm{d}m_d=\int_U f\left(Ax+b\right)\left|\det\left(A\right)\right|\mathrm{d}m_d\left(x\right)$.

פונקציית התפלגות של פונקציה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה σ־סופי ותהא $f\in L^0\left(\Sigma\right)$ אזי $\varphi:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ המקיימת $\varphi\left(t\right)=\mu\left(f\geq t\right)$.

משפט: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה σ־סופי תהא $f\in L_+^0\left(\Sigma\right)$ ותהא m מידת לבג אזי $\int_X d\mathrm{d}\mu=\int_{(0,\infty)}\mu\left(f\geq t\right)\mathrm{d}m\left(t\right)$.

מסקנה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה σ־סופי תהא $f\in L_+^0\left(\Sigma\right)$ ותהא $\varphi\in C^1\left(\left[0,\infty\right),\left[0,\infty\right)\right)$ עולה עבורה $\varphi\left(0\right)=0$ אזי $\int_X\varphi\circ f\mathrm{d}\mu=\left(R\right)\int_0^\infty\varphi'\left(s\right)\mu\left(f\geq s\right)\mathrm{d}s$.

קונבולוציה: תהיינה $f,g:\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות אזי $\left(f*g\right)\left(x\right)=\int_{\mathbb{R}^d}f\left(x-y\right)g\left(y\right)\mathrm{d}y$.

טענה: תהיינה $f,g:\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות ונגדיר $\varphi:\mathbb{R}^2\to\overline{\mathbb{R}}$ כך $\varphi\left(x,y\right)=f\left(x-y\right)g\left(y\right)$ אזי φ מדידה.

טענה: תהיינה $f,g\in L^1\left(m_d\right)$ אזי $f*g\in L^1$.

טענה: תהיינה $f,g\in L^1\left(m_d\right)$ אזי $\left\Vert f*g\right\Vert_1\leq\left\Vert f\right\Vert_1\left\Vert g\right\Vert_1$.

טענה: תהיינה $f,g,h:\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות אזי
- $f*g=g*f$.
- $\left(f*g\right)*h=f*\left(g*h\right)$.
- יהי $w\in\mathbb{R}^d$ אזי $\left(f*g\right)\left(x+w\right)=f\left(x+w\right)*g\left(x\right)=f\left(x\right)*g\left(x+w\right)$.

תומך: תהא $f:X\to\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{supp}\left(f\right)=\overline{\left\{f\neq0\right\}}$.

טענה: תהיינה $f,g:\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות אזי $\mathrm{supp}\left(f*g\right)\subseteq\overline{\mathrm{supp}\left(f\right)+\mathrm{supp}\left(g\right)}$.

טענה: תהא $f\in L^1\left(m_d\right)$ ותהא $g\in L^\infty\left(m_d\right)$ אזי $f*g$ רציפה במ"ש.

טענה: תהא $f\in L^1\left(m_d\right)$ ותהא $g\in L^1\left(m_d\right)\cap L^\infty\left(m_d\right)$ אזי $\lim_{|x|\to\infty}\left(f*g\right)\left(x\right)=0$.

הגדרה: תהא $\varphi\in L^1\left(m_d\right)$ עבורה $\int_{\mathbb{R}^d}\varphi=1$ ויהי $\varepsilon>0$ נגדיר $\varphi_\varepsilon:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ כך $\varphi_\varepsilon\left(x\right)=\frac{1}{\varepsilon^d}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

הגדרה: תהא $\varphi\in L^1\left(m_d\right)$ עבורה $\int_{\mathbb{R}^d}\varphi=1$ ויהי $\varepsilon>0$ נגדיר $f_\varepsilon:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ כך $f_\varepsilon=f*\varphi_\varepsilon$.

טענה: תהא $f\in L^1\left(m_d\right)$ אזי $f_\varepsilon\xrightarrow{L^1}f$ כאשר $\varepsilon\downarrow0$.

מידה מסומנת: יהי (X,Σ) מרחב מדיד אזי $\nu:\Sigma\to\left[-\infty,\infty\right]$ המקיימת
- $\nu\left(\varnothing\right)=0$.
- σ־אדטיביות: תהיינה $\left\{B_i\right\}_{i=1}^\infty\subseteq\Sigma$ זרות בזוגות אזי $\nu\left(\biguplus_{i=1}^\infty B_i\right)=\sum_{i=1}^\infty\nu\left(B_i\right)$.
- נניח כי $\nu\left(E\right)=\infty$ אזי לכל $F\in\Sigma$ מתקיים $\nu\left(F\right)\neq-\infty$.

טענה: תהא ν מידה מסומנת ותהא $E_n\uparrow E$ אזי $\nu\left(E\right)=\lim_{n\to\infty}\nu\left(E_n\right)$.

טענה: תהא ν מידה מסומנת ותהא $E_n\downarrow E$ עבורה $\left|\nu\left(E_1\right)\right|<\infty$ אזי $\nu\left(E\right)=\lim_{n\to\infty}\nu\left(E_n\right)$.

קבוצה חיובית: תהא ν מידה מסומנת אזי $E\in\Sigma$ עבורה לכל $F\in\Sigma$ המקיימת $F\subseteq E$ מתקיים $\nu\left(F\right)\geq0$.

קבוצה שלילית: תהא ν מידה מסומנת אזי $E\in\Sigma$ עבורה לכל $F\in\Sigma$ המקיימת $F\subseteq E$ מתקיים $\nu\left(F\right)\leq0$.

קבוצה זניחה: תהא ν מידה מסומנת אזי $E\in\Sigma$ עבורה לכל $F\in\Sigma$ המקיימת $F\subseteq E$ מתקיים $\nu\left(F\right)=0$.

למה: תהא ν מידה מסומנת תהא $E\in\Sigma$ חיובית ותהא $F\subseteq E$ המקיימת $F\in\Sigma$ אזי F חיובית.

למה: תהא ν מידה מסומנת תהיינה $\left\{E_n\right\}_{n=1}^\infty\subseteq\Sigma$ חיוביות אזי $\bigcap_{n=1}^\infty E_n$ חיובית.

למה: תהא ν מידה מסומנת תהיינה $P_1,P_2\in\Sigma$ חיוביות ותהיינה $N_1,N_2\in\Sigma$ שליליות עבורן $X=P_1\uplus N_1=P_2\uplus N_2$ אזי $P_1\triangle P_2,N_1\triangle N_2$ זניחות.

משפט האן: תהא ν מידה מסומנת אזי קיימת $P\in\Sigma$ חיובית וכן $N\in\Sigma$ שלילית עבורן $X=P\uplus N$.

מידות מסומנות סינגולריות: מידות מסומנות μ,ν על (X,Σ) עבורן קיימות $E,F\in\Sigma$ המקיימות $X=E\uplus F$ וכן E זניחה ביחס ל־μ וכן F זניחה ביחס ל־ν.

סימון: תהיינה μ,ν מידות מסומנות סינגולריות אזי $\mu\perp\nu$.

משפט ז'ורדן: תהא ν מידה מסומנת אזי קיימות ויחידות מידות ν^{+},ν^{-} עבורן $\nu=\nu^{+}-\nu^{-}$ וכן $\nu^{+}\perp\nu^{-}$.

החלק החיובי של מידה מסומנת: תהא ν מידה מסומנת אזי ν^{+}.

החלק השלילי של מידה מסומנת: תהא ν מידה מסומנת אזי ν^{-}.

ההשתנות הכוללת של מידה מסומנת: תהא ν מידה מסומנת אזי $|\nu|=\nu^{+}+\nu^{-}$.

טענה: תהא ν מידה מסומנת אזי $|\nu|$ מידה.

מידה מסומנת רציפה בהחלט: תהא μ מידה אזי מידה מסומנת ν עבורה $\mathcal{N}_{\mu}\subseteq\mathcal{N}_{\nu}$.

סימון: תהא μ מידה ותהא ν מידה מסומנת רציפה בהחלט ביחס ל־μ אזי $\nu\ll\mu$.

משפט: תהא μ מידה ותהא ν מידה מסומנת אזי $(\nu\ll\mu)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall E\in\Sigma.\left(\mu\left(E\right)<\delta\right)\implies\left(\left|\nu\left(E\right)\right|<\varepsilon\right)\right)$.

למה: יהיו μ,ν מידות סופיות על (X,Σ) אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- $\mu\perp\nu$.
- קיים $\varepsilon>0$ וקיים $E\in\Sigma$ המקיימת $\mu\left(E\right)>0$ וכן E חיובית ביחס למידה $\nu-\varepsilon\mu$.

משפט לבג־רדון־ניקודים: תהא ν מידה מסומנת σ־סופית תהא μ מידה σ־סופית אזי קיימות ויחידות מידות מסומנות σ־סופיות λ,ρ עבורן $\mu\perp\lambda$ וכן $\rho\ll\mu$ וכן $\nu=\lambda+\rho$.

מסקנה: תהא ν מידה מסומנת σ־סופית תהא μ מידה σ־סופית ותהיינה λ,ρ מידות מסומנות σ־סופיות עבורן $\mu\perp\lambda$ וכן $\rho\ll\mu$ וכן $\nu=\lambda+\rho$ אזי קיימת $f:X\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית עבורה $\mathrm{d}\rho=f\mathrm{d}\mu$.

מסקנה: תהא ν מידה מסומנת σ־סופית תהא μ מידה σ־סופית תהיינה λ,ρ מידות מסומנות σ־סופיות עבורן $\mu\perp\lambda$ וכן $\rho\ll\mu$ וכן $\nu=\lambda+\rho$ ותהיינה $f,g:X\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות עבורן $\mathrm{d}\rho=f\mathrm{d}\mu$ וכן $\mathrm{d}\rho=g\mathrm{d}\mu$ אזי $f=g$ μ־כ.ב.מ..

נגזרת רדון־ניקודים: תהא ν מידה מסומנת σ־סופית ותהא μ מידה מסומנת σ־סופית עבורה $\nu\ll\mu$ אזי $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}:X\to\mathbb{R}$ המקיימת $\mathrm{d}\nu=\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\cdot\mathrm{d}\mu$.

טענה: תהא ν מידה מסומנת σ־סופית ותהיינה μ,λ מידות σ־סופיות עבורן $\nu\ll\mu$ וכן $\mu\ll\lambda$ אזי

- תהא $g\in L^{1}\left(\nu\right)$ אזי $g\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\in L^{1}\left(\mu\right)$ וכן $\int_{\mathcal{U}}g\mathrm{d}\nu=\int_{\mathcal{U}}g\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\mu$.
- $\nu\ll\lambda$ וכן $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\cdot\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}$ λ־כ.ב.מ..

מסקנה: תהיינה μ,λ מידות σ־סופיות אזי $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu}\cdot\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}=1$ λ־כ.ב.מ. וכן μ־כ.ב.מ..

משפט רדון־ניקודים: תהא ν מידה ותהא μ מידה σ־סופית עבורן $\nu\ll\mu$ אזי קיימת $f\in L_{+}^{0}\left(X,\Sigma\right)$ עבורה $\mathrm{d}\nu=f\mathrm{d}\mu$.

מסקנה: תהא ν מידה תהא μ מידה σ־סופית עבורן $\nu\ll\mu$ ותהיינה $f,g\in L_{+}^{0}\left(X,\Sigma\right)$ עבורן $\mathrm{d}\nu=f\mathrm{d}\mu$ וכן $\mathrm{d}\nu=g\mathrm{d}\mu$ אזי $f=g$ μ־כ.ב.מ..