כדור פתוח: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_r(a)=\{x\in\mathbb{R}\mid\|x-a\|<r\}$.

כדור סגור: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_r(a)=\{x\in\mathbb{R}\mid\|x-a\|\le r\}$.

ספירה: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $S_r(a)=\{x\in\mathbb{R}\mid\|x-a\|=r\}$.

תיבה פתוחה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\Pi_{a,b}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\forall j\in[n].a_j<x_j<b_j\}$.

תיבה סגורה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\overline{\Pi}_{a,b}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\forall j\in[n].a_j\le x_j\le b_j\}$.

נקודה פנימית: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $x\in M$ המקיימת $\exists r>0.B_r(x)\subseteq M$.

פנים של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{int}(M)=\overset{\circ}{M}=\{x\in M\mid M \text{ נקודה פנימית של } x\}$.

קבוצה פתוחה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה $M=\overset{\circ}{M}$.

נקודה חיצונית: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $x\in\mathbb{R}^n$ המקיימת $\exists r>0.B_r(x)\subseteq\mathbb{R}^n\backslash M$ אזי x נקודה חיצונית.

נקודה מבודדת: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $x\in M$ המקיימת $\exists r>0.B_r(x)\cap M=\{x\}$ אזי x נקודה מבודדת.

נקודת שפה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $x\in\mathbb{R}^n$ לא נקודה פנימית ולא נקודה חיצונית אזי x נקודת שפה.

שפה של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\partial M=\{x\in M\mid M \text{ נקודת שפה של } x\}$.

קבוצה סגורה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה $\partial M\subseteq M$.

סגור של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\overline{M}=\overset{\circ}{M}\cup\partial M$.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (x נקודה חיצונית של M)$\Longleftrightarrow$(x נקודה פנימית של $\mathbb{R}^n\backslash M$).

מסקנה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (M פתוחה)$\Longleftrightarrow$($M^{\mathcal{C}}$ סגורה).

קבוצה חסומה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ המקיימת $\exists r>0.M\subseteq B_r(0)$.

קבוצה קומפקטית: קבוצה $K\subseteq\mathbb{R}^n$ סגורה וחסומה.

טענת היינה בורל: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (K קומפקטית)$\Longleftrightarrow$(לכל $\{I_n\}_{n\in\Lambda}$ קבוצות פתוחות עבורן $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n$).

סימון: תהא $a\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי $a^{(k)}=a(k)$.

גבול: תהא $a\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ ותהא $L\in\mathbb{R}^n$ עבורן $\lim_{k\to\infty}\left\|a^{(k)}-L\right\|=0$ אזי $\lim_{k\to\infty}a^{(k)}=L$.

הערה: נשתמש באותם סימני גבול כמו במשתנה יחיד, כלומר $\lim_{x\to a}$ וכן $\xrightarrow[x\to a]{}$.

משפט: תהא $a\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ ויהי $b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\left(a^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}b\right)\Longleftrightarrow\left(\forall j\in[n].a_j^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}b_j\right)$.

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של סדרה מחדו"א1 מתקיימות.

משפט קושי: תהא $a\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists k\in\mathbb{N}.\forall m,p>k.\left\|a^{(m)}-a^{(p)}\right\|<\varepsilon\right)$.

מסקנה: תהא $a\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow\left(\forall j\in[n].\forall\varepsilon>0.\exists k\in\mathbb{N}.\forall m,p>k.\left\|a_j^{(m)}-a_j^{(p)}\right\|<\varepsilon\right)$.

משפט בולצאנו ויירשטראס: לכל סדרה חסומה קיימת תת־סדרה מתכנסת.

משפט: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (K קומפקטית)$\Longleftrightarrow$(לכל $a\in K^{\mathbb{N}}$ קיימת תת־סדרה $a^{(k_i)}$ המקיימת $\lim_{k\to\infty}a^{(k_i)}\in K$).

הערה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ נחשוב על f כוקטור של פונקציות $f=\langle f_1,\ldots,f_m\rangle$ כאשר $f_i:A\to\mathbb{R}$.

גבול: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ תהא $a\in\mathbb{R}^n$ ותהא $L\in\mathbb{R}^m$ אזי

- היינה: אם $\forall x\in A^{\mathbb{N}}.\left(x^{(k)}\to a\right)\Longrightarrow\left(f\left(x^{(k)}\right)\to L\right)$ אזי $\lim_{x\to a}f(x)=L$.
- קושי: אם $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in A\backslash\{a\}.\|x-a\|<\delta\Longrightarrow\|f(x)-L\|<\varepsilon$ אזי $\lim_{x\to a}f(x)=L$.

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.

רציפות בנקודה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ אזי $a\in A$ עבורה $f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$.

סימון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ ותהא $B\subseteq A$ אזי (f רציפה נקודתית עבור כל $b\in B$)$\Longleftrightarrow(f\in C(B))$.

משפט: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ ותהא $B\subseteq A$ אזי $(f\in C(b))\Longleftrightarrow(f_1,\ldots,f_m\in C(b))$.

מסקנה: כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.

פונקציה הומאומורפית: תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ וכן $B\subseteq\mathbb{R}^m$ אזי $f:A\to B$ הפיכה עבורה f,f^{-1} רציפות.

עקומה פרמטרית: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע אזי $\gamma:I\to\mathbb{R}^m$.

מסילה: עקומה פרמטרית רציפה.

מסילה של קו ישר: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^m$ נגדיר $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ כך $\gamma(t)=(1-t)a+tb$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^m$ ותהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ מסילה של קו ישר בין a ל־b אזי γ מסילה.

סימון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^m$ ותהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ מסילה של קו ישר בין a ל־b אזי $[a,b]=\mathrm{Im}(\gamma)$.

קבוצה קמורה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ המקיימת $\forall a,b\in M.\left[a,b\right]\subseteq M$.

טענה: יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_{r}\left(a\right),\overline{B}_{r}\left(a\right)$ קבוצות קמורות.

קבוצה קשירה: $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה לכל $x,y\in M$ קיימת מסילה $\gamma:\left[0,1\right]\to M$ המקיימת $\gamma\left(0\right)=x$ וכן $\gamma\left(1\right)=y$.

תחום: קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי קיימת $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}_{\leq\aleph_{0}}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ קבוצה של תחומים זרים עבורה $\biguplus\mathcal{A}=M$.

תכונת דרבו: $f:A\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל $a,b\in A$ עבורן $f\left(a\right)<f\left(b\right)$ מתקיים $\left[f\left(a\right),f\left(b\right)\right]\subseteq f\left(\left[a,b\right]\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קשירה ותהא $f\in C\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי f מקיימת את תכונת דרבו.

משפט ווירשטראס: תהא $\mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קומפקטית ותהא $f\in C\left(\mathcal{K},\mathbb{R}\right)$ אזי קיימים $x,y\in\mathcal{K}$ עבורם $f\left(\mathcal{K}\right)=\left[f\left(x\right),f\left(y\right)\right]$.

רציפה במידה שווה (במ"ש): תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{n}$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x,y\in\mathcal{M}.\left\Vert x-y\right\Vert<\delta\Longrightarrow\left\Vert f\left(x\right)-f\left(y\right)\right\Vert<\varepsilon$.

טענה: תהא $\mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קומפקטית ותהא $f\in C\left(\mathcal{K},\mathbb{R}^{m}\right)$ אזי f רציפה במ"ש.

נורמה: יהי L מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$ אזי $\upsilon:L\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $a\in L$ ולכל $\lambda\in\mathbb{R}$ מתקיים

- $\left(\upsilon\left(a\right)\geq0\right)\wedge\left(\left(\upsilon\left(a\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(a=0\right)\right)$.
- הומוגניות: $\upsilon\left(\lambda a\right)=\left|\lambda\right|\cdot\upsilon\left(a\right)$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\upsilon\left(a+b\right)\leq\upsilon\left(a\right)+\upsilon\left(b\right)$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמה אזי קיים $c>0$ עבורו $\forall x\in\mathbb{R}^{n}.\upsilon\left(x\right)\leq c\left\Vert x\right\Vert$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמה אזי $\upsilon\in C\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמה אזי קיים $c>0$ עבורו $\forall x\in\mathbb{R}^{n}.c\left\Vert x\right\Vert\leq\upsilon\left(x\right)$.

נורמות שקולות: $\upsilon,\eta:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמות עבורן קיימים $a,b>0$ המקיימים $a\cdot\eta\leq\upsilon\leq b\cdot\eta$.

טענה: שקילות נורמות הינו יחס שקילות.

מסקנה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמה אזי $\upsilon,\left\Vert\cdot\right\Vert$ שקולות.

מסקנה: תהיינה $\upsilon,\rho:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמות ותהא $x\in\left(\mathbb{R}^{n}\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(\upsilon\left(x^{(k)}\right)\to0\right)\Longleftrightarrow\left(\rho\left(x^{(k)}\right)\to0\right)$.

נורמת ℓ_{p}: עבור $p\in\mathbb{N}_{+}$ נגדיר נורמה $\left\Vert\cdot\right\Vert_{p}:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ כך $\left\Vert v\right\Vert_{p}=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|v_{i}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$.

נורמת ℓ_{∞}: נגדיר נורמה $\left\Vert\cdot\right\Vert_{\infty}:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ כך $\left\Vert v\right\Vert_{\infty}=\max_{1\leq i\leq n}\left|v_{i}\right|$.

דיפרנציאל של עקומה: תהא $\gamma:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}^{m}$ ויהי $a\in\left(0,1\right)$ אזי $\gamma'\left(a\right)=\lim_{h\to0}\frac{\gamma(a+h)-\gamma(a)}{h}$.

מסקנה: תהא $\gamma:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}^{m}$ ויהי $a\in\left(0,1\right)$ אזי $\gamma'\left(a\right)=\left(\begin{smallmatrix}\gamma_{1}'(a)\\ \vdots\\ \gamma_{m}'(a)\end{smallmatrix}\right)$.

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה קיימת $L\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}\right)$ המקיימת $f\left(x\right)=f\left(a\right)+L\left(x-a\right)+o\left(\left\Vert x-a\right\Vert\right)$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית על $a\in\mathcal{U}$ אזי $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f\in\mathcal{D}\left(a\right)\Longrightarrow f\in C\left(a\right)$.

גרדיאנט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\mathrm{grad}f\left(a\right)=\left[L\right]_{\mathrm{st}}$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\nabla f\left(a\right)=\mathrm{grad}f\left(a\right)$.

נגזרת חלקית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(a\right)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+he_{i})-f(a)}{h}$.

הערה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $f_{x_{i}}'=\frac{\partial f}{\partial x_{i}}$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(a\right)=\left(\nabla f\left(a\right)\right)_{i}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\nabla f\left(a\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_{1}}\left(a\right),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_{n}}\left(a\right)\right)$.

הערה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי ($\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(a\right)$ קיימת לכל i)$\not\Longrightarrow$($f\in\mathcal{D}\left(a\right)$).

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ עבורה קיימת $L\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}^{m}\right)$ המקיימת $f\left(x\right)=f\left(a\right)+L\left(x-a\right)+o\left(\left\Vert x-a\right\Vert\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\left(f\in\mathcal{D}\left(a\right)\right)\Longleftrightarrow\left(\forall i\in\left\{1\ldots m\right\}.f_{i}\in\mathcal{D}\left(a\right)\right)$.

דיפרנציאל/יעקוביאן: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)=\left(\begin{smallmatrix}-\nabla f_{1}(a)-\\ \vdots\\ -\nabla f_{m}(a)-\end{smallmatrix}\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\left(\mathcal{D}_{f}\left(a\right)\right)_{i,j}=\frac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}}\left(a\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהיינה $f,g:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ יהי $a\in\mathcal{U}$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי
- אם $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $f\in C\left(a\right)$.
- אם $f,g\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $cf,f+g\in\mathcal{D}\left(a\right)$.
- $\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=c\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=0\right)$.
- תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=Ax+c\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=A\right)$.

פונקציה גזירה ברציפות: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(\mathcal{U}\right)$ וכן $\mathcal{D}_{f}\in C\left(\mathcal{U}\right)$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ גזירה ברציפות אזי $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ אזי $\forall i\in\left[m\right].\forall j\in\left[n\right].\frac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}}\in C\left(\mathcal{U}\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ עבורה $\forall i\in\left[m\right].\forall j\in\left[n\right].\frac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}}\in C\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $f\in\mathcal{D}\left(\mathcal{U}\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)\right)\Longleftrightarrow\left(\forall i\in\left[m\right].\forall j\in\left[n\right].\frac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}}\in C\left(\mathcal{U}\right)\right)$.

נגזרת כיוונית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+hv)-f(a)}{h}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)=\nabla f\left(a\right)\cdot v$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)=\mathcal{D}_{f}\left(a\right)\cdot v$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום אזי ($\mathcal{U}$ קשירה מסילתית)$\Longleftrightarrow$($\mathcal{U}$ קשירה פוליגונלית).

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=0\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=c\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=c\right)$.

טענה: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=A\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=Ax+c\right)$.

מסקנה: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=A\right)\Longleftrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=Ax+c\right)$.

סימון: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $i\in\left\{ 1\ldots n\right\}$ באשר $\frac{\partial f}{\partial x_{i}}$ גזירה אזי $\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{i}^{2}}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\right)}{\partial x_{i}}$.

נגזרת מעורבת: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהיו $i,j\in\left\{ 1\ldots n\right\}$ באשר $\frac{\partial f}{\partial x_{j}}$ גזירה אזי $\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{i}\partial x_{j}}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_{j}}\right)}{\partial x_{i}}$.

הערה: הסימון מלעיל מוכלל לנגזרת מסדר k בצורה $\frac{\partial^{k}f}{\partial x_{i_{1}}\ldots\partial x_{i_{k}}}$.

משפט: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ יהיו $i,j\in\left\{ 1\ldots n\right\}$ עבורן $\frac{\partial f}{\partial x_{i}},\frac{\partial f}{\partial x_{j}}\in C^{1}\left(\mathcal{U}\right)$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{i}\partial x_{j}}\left(a\right)=\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{j}\partial x_{i}}\left(a\right)$.

סימון: יהי $K\in\mathbb{N}^{n}$ אזי $|K|=\sum_{i=1}^{n}K_{i}$ וכן $\partial x^{K}=\partial x_{1}^{K_{1}}\ldots\partial x_{n}^{K_{n}}$.

מסקנה: יהי $K\in\mathbb{N}^{n}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mathcal{D}_{f}\in C^{k}\left(\mathcal{U}\right)$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי כל פרמוטציה של הנגזרות החלקיות הוא $\frac{\partial^{|K|}f}{\partial x^{K}}\left(a\right)$.

טענה: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $v\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\|Av\|_{\text{st}}\le\|A\|_{\text{st}}\cdot\|v\|_{\text{st}}$.

משפט: יהיו $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$, $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{m}$ תחומים תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהיינה $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$, $g:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^{k}$ עבורן $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ וכן $g\in D\left(f\left(a\right)\right)$ אזי $g\circ f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ וכן $\mathcal{D}_{g\circ f}\left(a\right)=\mathcal{D}_{g}\left(f\left(a\right)\right)\cdot\mathcal{D}_{f}\left(a\right)$.

גרף פונקציה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $\Gamma_{f}=\left\{ \left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}\mid\left(x\in\mathcal{U}\right)\wedge\left(f\left(x\right)=y\right)\right\}$.

עקומות/משטחי גובה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $c\in\mathbb{R}$ אזי $\Pi_{c}=\left\{ x\in\mathcal{U}\mid f\left(x\right)=c\right\}$.

משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $y-f\left(a\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(a\right)\left(x_{i}-a_{i}\right)$.

וקטור הנורמל לגרף בנקודה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $N_{a}=\left(-\nabla f\left(a\right),1\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\nabla f\left(a\right)\perp\Pi_{f\left(a\right)}$.

נקודת קיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי
- נקודת מינימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{O}$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{O}.f\left(x\right)\geq f\left(a\right)$.
- נקודת מקסימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{O}$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{O}.f\left(x\right)\leq f\left(a\right)$.

משפט פרמה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קיצון אזי $\nabla f\left(a\right)=0$.

נקודת קיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי
- נקודת מינימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה לכל $i\in\left[m\right]$ מתקיים a נקודת מינימום מקומי של f_{i}.
- נקודת מקסימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה לכל $i\in\left[m\right]$ מתקיים a נקודת מקסימום מקומי של f_{i}.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קיצון אזי $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)=0$.

נקודה קריטית/חשודה לקיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)=0$.

הגדרה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ נגדיר $\mathcal{D}_{\left(a,b\right)}^{k}f=\sum_{\substack{V\in\mathbb{N}^{n}\\ |V|=k}}\binom{k}{V_{1},\ldots,V_{n}}\prod_{i=1}^{n}\left(a_{i}-b_{i}\right)^{V_{i}}\frac{\partial^{k}}{\partial x^{V}}f$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\mathcal{D}_{(a,b)}^{k}f=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i}-b_{i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\right)^{k}$.

משפט טיילור: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ עבורה $f\in C^{k+1}\left(a\right)$ תהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה קמורה של a ותהא $x\in\mathcal{O}$ אזי קיים $c\in\left[x,a\right]$ עבורו $f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}\mathcal{D}_{(x,a)}^{i}f\left(a\right)+\frac{1}{(k+1)!}\mathcal{D}_{(x,a)}^{k+1}f\left(c\right)$.

הסיאן: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית פעמיים אזי $\left(H_{f}\right)_{i,j}=f''_{x_{i},x_{j}}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי קיים $c\in\left[x,a\right]$ עבורו $f\left(x\right)=f\left(a\right)+\left(x-a\right)^{t}H_{f}\left(c\right)\left(x-a\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי

- ($H_{f}\left(a\right)$ חיובית ממש)$\Longleftarrow$(a נקודת מינימום).
- ($H_{f}\left(a\right)$ שלילית ממש)$\Longleftarrow$(a נקודת מקסימום).
- ($\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)\neq0\right)\wedge$(לא אחד מהמקרים מלעיל))$\Longleftarrow$($a$ אינה נקודת קיצון).

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי

- $\left(\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)>0\right)\wedge\left(f''_{x,x}\left(a\right)>0\right)\right)\Longleftarrow$($a$ נקודת מינימום).
- $\left(\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)>0\right)\wedge\left(f''_{x,x}\left(a\right)<0\right)\right)\Longleftarrow$($a$ נקודת מקסימום).
- ($\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)\neq0\right)\wedge$(לא אחד מהמקרים מלעיל))$\Longleftarrow$($a$ אינה נקודת קיצון).

נקודה קריטית לא מנוונת: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי $a\in\mathcal{U}$ קריטית עבורה $\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)\neq0$.

משפט פונקציה סתומה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)\neq0$ אזי קיימים $I_{x},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_{1}\in I_{x}$ וכן $a_{2}\in I_{y}$ וקיימת $f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in I_{x}\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(y=f\left(x\right)\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)\neq0$ יהיו $I_{x},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_{1}\in I_{x}$ וכן $a_{2}\in I_{y}$ ותהא $f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in I_{x}\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי $f'\left(x\right)=-\frac{F'_{x}(x,f(x))}{F'_{y}(x,f(x))}$ על I_{x}.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $F\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)\neq0$ יהיו $I_{x},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_{1}\in I_{x}$ וכן $a_{2}\in I_{y}$ ותהא $f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in I_{x}\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי $f\left(x\right)\in C^{k}\left(I_{x},I_{y}\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{x_{n+1}}\left(a\right)\neq0$ אזי קיימים $I_{x_{1}},\ldots,I_{x_{n}},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $a_{i}\in I_{x_{i}}$ וכן $a_{n+1}\in I_{y}$ וקיימת $f\in C^{k}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}\right)\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(y=f\left(x\right)\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{x_{n+1}}\left(a\right)\neq0$ יהיו $I_{x_{1}},\ldots,I_{x_{n}},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $a_{i}\in I_{x_{i}}$ וכן $a_{n+1}\in I_{y}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}\right)\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(x\right)=-\frac{F'_{x_{i}}(x,f(x))}{F'_{y}(x,f(x))}$ על $\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ אזי $\underset{m\times(n+m)}{\mathcal{D}_{f}\left(a\right)}=\left(\underset{m\times n}{F'_{x}\left(a\right)},\underset{m\times m}{F'_{y}\left(a\right)}\right)$.

משפט פונקציה סתומה כללי: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)$ הפיכה אזי קיימים $I_{x_{1}},\ldots,I_{x_{n}},I_{y_{1}}\ldots I_{y_{m}}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $a_{i}\in I_{x_{i}}$ ולכל $j\in\left[m\right]$ מתקיים $a_{j+n}\in I_{y_{j}}$ וקיימת $f\in C^{k}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}\right)\times\left(\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}\right)$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(y=f\left(x\right)\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)$ הפיכה יהיו $I_{x_{1}},\ldots,I_{x_{n}},I_{y_{1}}\ldots I_{y_{m}}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $a_{i}\in I_{x_{i}}$ ולכל $j\in\left[m\right]$ מתקיים $a_{j+n}\in I_{y_{j}}$ ותהא $f\in C^{k}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}\right)\times\left(\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}\right)$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי $\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=-F'_{y}\left(x,f\left(x\right)\right)^{-1}\cdot F'_{x}\left(x,f\left(x\right)\right)$ על $\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $\nabla F\left(a\right)\neq0$ אזי משוואת המישור המשיק למשטח $\left\{F=0\right\}$ הינו $\sum_{i=1}^{n}F'_{x_{i}}\left(a\right)\left(x_{i}-a_{i}\right)=0$.

דיפאומורפיזם: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathcal{V}\right)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C^{1}\left(\mathcal{V},\mathcal{U}\right)$.

דיפאומורפיזם C^{k}: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathcal{V}\right)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C^{k}\left(\mathcal{V},\mathcal{U}\right)$.

משפט פונקציה הפוכה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורה $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)$ הפיכה אזי קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה f דיפאומורפיזם על $\mathcal{O}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ תהא $f\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^n)$ עבורה $\mathcal{D}_f(a)$ הפיכה ותהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a עבורה f דיפאומורפיזם אזי $\mathcal{D}_{f^{-1}}(f(x))=\mathcal{D}_f(x)^{-1}$ על $\mathcal{O}$.

טענה: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $A\subseteq\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם אזי

- (A פתוחה)$\iff$($f(A)$ פתוחה).
- (A סגורה)$\iff$($f(A)$ סגורה).
- (A קומפקטית)$\iff$($f(A)$ קומפקטית).
- אם $\partial A\subseteq\mathcal{U}$ אזי $\partial(f(A))=f(\partial A)$.

פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת לכל $\widetilde{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{U}$ פתוחה מתקיים $f\left(\widetilde{\mathcal{U}}\right)$ פתוחה.

משפט פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ עבורה $\text{rank}(\mathcal{D}_f(a))=m$ אזי קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה f פתוחה על $\mathcal{O}$.

נקודה קריטית בתנאי: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ תהא $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ אזי $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $g(a)=0$ וכן $\nabla f(a)\in\text{span}\{\nabla g_i(a)\}$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ תהא $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $g(a)=0$ וכן $\{\nabla g_i(a)\}$ בת"ל וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה a קיצון בקבוצה $\text{sols}(g)\cap\mathcal{O}$ אזי a נקודה קריטית של f בתנאי $g=0$.

פונקציית לגראנז': יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ ותהא $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ נגדיר $L\in C^1(\mathcal{U}\times\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ כך $L(x_1\ldots x_n,\lambda_1,\ldots\lambda_m)=f(x_1\ldots x_n)-\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i(x_1\ldots x_n)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ תהא $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ אזי (a נקודה קריטית של f בתנאי $g=0$)$\iff$(קיימת $\lambda\in\mathbb{R}^m$ עבורה (a,λ) נקודה קריטית של L).

דרגה של פונקציה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ אזי $\text{rank}(f(a))=\text{rank}(\mathcal{D}_f(a))$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ עבורה $\forall x\in\mathcal{U}.\text{rank}(f(x))=k$ אזי קיימת $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a קיימת $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של $f(a)$ קיימים דיפאומורפיזמים $\varphi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ וכן $\psi:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^m$ וקיימת $\mathcal{W}\subseteq\varphi(\mathcal{O})$ סביבה של $\varphi(a)$ עבורם $\left(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\right)(x)=(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)$ על $\mathcal{W}$.

הלמה של הדמר: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה קמורה של 0 יהי $p\geq 1$ ותהא $f\in C^p(\mathcal{U},\mathbb{R})$ עבורה $f(0)=0$ אזי קיימת $g\in C^{p-1}(\mathcal{U},\mathbb{R}^n)$ עבורה $g(0)=\nabla f(0)$ וכן $f(x)=\sum_{i=1}^n x_i g(x)$.

הלמה של מורס: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^3(\mathcal{U},\mathbb{R})$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ נקודה קריטית לא מנוונת אזי קיימת $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a וגם $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה של 0 וכן דפיאומורפיזם $g:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ המקיים $(f\circ g)(x)-f(a)=\sum_{i=1}^k x_i^2-\sum_{i=k+1}^n x_i^2$.

תיבה סגורה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $P_{a,b}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\forall j\in[n].a_j\leq x_j\leq b_j\}$.

תיבה מנוונת: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ עבורם $\exists i\in[n].a_i=b_i$ אזי $P_{a,b}$.

חלוקה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ לכל $i\in[n]$ תהיינה $\left\{t_i^0,\ldots,t_i^{\ell_i}\right\}$ חלוקה של $[a_i.b_i]$ אזי $\left\{\prod_{i=1}^n\left[t_i^{m_i},t_i^{m_i+1}\right]\mid\forall i\in[n].m_i\in[\ell_i-1]\right\}$.

מידה/נפח של תיבה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $V(P)=\text{Vol}(P)=\prod_{i=1}^n(b_i-a_i)$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $\{A_1,\ldots,A_k\}$ חלוקה של P אזי $\text{Vol}(P)=\sum_{i=1}^k\text{Vol}(A_i)$.

הערה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ עבורם $P_{a,b}$ תיבה מנוונת אזי $\text{Vol}(P_{a,b})=0$.

סכום רימן: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ תהא $\Pi=\{A_1,\ldots,A_k\}$ חלוקה ויהיו $x^{(j)}\in A_j$ אזי $S\left(f,\Pi,\left\{x^{(i)}\right\}\right)=\sum_{j=1}^k f\left(x^{(j)}\right)\text{Vol}(A_j)$.

קוטר קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $d(M)=\sup_{x,y\in M}\|x-y\|$.

מדד העדינות: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $\Pi=\{A_1,\ldots,A_k\}$ חלוקה אזי $\lambda(\Pi)=\max_{i\leq i\leq k}d(A_i)$.

אינטגרביליות רימן: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ אזי $\int_P f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda(\Pi)\to 0}S\left(f,\Pi,x^{(j)}\right)$.

סימון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $f\in R(P)$.

טענה: תהא P תיבה ותהא $f\in R(P)$ אזי f חסומה על P.

סכום דרבו עליון: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא $\{A_1,\ldots,A_n\}$ חלוקה אזי $\overline{S}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^n\sup_{P_j}(f)\,\text{Vol}(P_j)$.

סכום דרבו תחתון: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא $\{A_1,\ldots,A_n\}$ חלוקה אזי $\underline{S}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^n\inf_{P_j}(f)\,\text{Vol}(P_j)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה תהא Π חלוקה ויהיו $x^{(j)}$ נקודות מתאימות אזי $\underline{S}(f,\Pi)\leq S\left(f,\Pi,\left\{x^{(i)}\right\}\right)\leq\overline{S}(f,\Pi)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\subseteq\Pi_2$ חלוקות אזי $\underline{S}(f,\Pi_1)\leq\underline{S}(f,\Pi_2)\leq\overline{S}(f,\Pi_2)\leq\overline{S}(f,\Pi_1)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהיינה Π_1,Π_2 חלוקות אזי $\underline{S}(f,\Pi_1)\leq\overline{S}(f,\Pi_2)$.

אינטגרל דרבו עליון: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\overline{I}(f)=\inf_{\text{חלוקה }\Pi}\overline{S}(f,\Pi)$.

אינטגרל דרבו תחתון: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\underline{I}\left(f\right)=\sup_{\Pi\text{ חלוקה}}\underline{S}\left(f,\Pi\right)$.

מסקנה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\le\underline{I}\left(f\right)\le\overline{I}\left(f\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

קריטריון דרבו: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\left(f\in R\left(P\right)\right)\iff\left(\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)\right)$.

מסקנה: תהא P תיבה ותהא $f\in R\left(P\right)$ חסומה אזי $\int_{P}f=\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי $\lambda>0$ אזי $\text{Vol}\left(P_{\lambda a,\lambda b}\right)=\lambda^{n}\text{Vol}\left(P_{a,b}\right)$.

טענה: יהיו $P_{1}\ldots P_{n}$ תיבות עבורן לכל $i\ne j$ מתקיים $\text{int}\left(P_{i}\right)\cap\text{int}\left(P_{j}\right)=\varnothing$ וכן $\bigcup_{i=1}^{n}P_{i}$ תיבה אזי $\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^{n}P_{i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\text{Vol}\left(P_{i}\right)$.

מסקנה: יהיו $P_{1}\ldots P_{n}$ תיבות ותהא $P\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}P_{i}$ תיבה אזי $\text{Vol}\left(P\right)\le\sum_{i=1}^{n}\text{Vol}\left(P_{i}\right)$.

טענה: יהיו P_{1},P_{2} תיבות אזי $P_{1}\cap P_{2}$ תיבה.

הערה: תהא P תיבה אזי $\text{Vol}\left(P\backslash\text{int}\left(P\right)\right)=0$.

קבוצה זניחה: $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\left\{ P_{i}\right\} _{i=0}^{\infty}$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty}P_{i}$ וכן $\sum_{i=0}^{\infty}\text{Vol}\left(P_{i}\right)<\varepsilon$.

סימון: $\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)=\left\{ E\subseteq\mathbb{R}^{n}\mid\text{זניחה }E\right\}$.

טענה: $\varnothing\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$, יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left\{ a\right\} \in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

טענה: תהיינה $\left\{ E_{i}\right\} _{i=0}^{\infty}$ זניחות אזי $\bigcup_{i=0}^{\infty}E_{i}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי (E זניחה)$\iff$(לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\left\{ P_{i}\right\} _{i=0}^{\infty}$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty}\text{int}\left(P_{i}\right)$ וכן $\sum_{i=0}^{\infty}\text{Vol}\left(P_{i}\right)<\varepsilon$).

מסקנה: תהא $E\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ קומפקטית אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\left\{ P_{i}\right\} _{i=0}^{n}$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^{n}\text{int}\left(P_{i}\right)$ וכן $\sum_{i=0}^{n}\text{Vol}\left(P_{i}\right)<\varepsilon$.

טענה: תהא $E\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ותהא $A\subseteq E$ אזי $A\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

טענה: $\mathbb{Q}^{n}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$, תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה לא מנוונת אזי $P\notin\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה קיימת נקודה פנימית אזי $M\notin\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

מסקנה: תהא $M\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $\text{int}\left(M\right)=\varnothing$.

טענה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה ותהא $f\in C\left(P,\mathbb{R}\right)$ אזי $\Gamma_{f}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ותהא $f\in C\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי $\Gamma_{f}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי קיימות קוביות $\left\{ C_{i}\right\} _{i=0}^{\infty}$ בעלות אורך צלע $2^{-e_{i}}$ עבור $e_{i}\in\mathbb{N}$ עבורן לכל $i\ne j$ מתקיים $\text{int}\left(P_{i}\right)\cap\text{int}\left(P_{j}\right)=\varnothing$ וכן $\mathcal{U}=\bigcup_{i=1}^{\infty}C_{i}$.

מסקנה: $\mathbb{S}^{n-1}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$, קבוצת קנטור זניחה.

תנודה של פונקציה בנקודה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $a\in A$ ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ אזי $\omega\left(f,a\right)=\lim_{\delta\to0^{+}}\omega\left(f,B_{\delta}\left(a\right)\cap A\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $a\in A$ ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ אזי (f רציפה על a)$\iff$($\omega\left(f,a\right)=0$).

למה של קנטור: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קומפקטית יהי $M>0$ ותהא $f:K\to\mathbb{R}$ המקיימת $\forall k\in K.\omega\left(f,k\right)\le M$ אזי $\forall x\in K.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\omega\left(f,B_{\delta}\left(x\right)\cap K\right)<\omega_{0}+\varepsilon$.

כמעט לכל: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ויהי ψ פרידיקט אזי נאמר כי "ψ מתקיים כמעט על כל A" אם קיימת $E\subseteq A$ זניחה עבורה ψ מתקיים לכל $A\backslash E$.

סימון: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ויהי $\varepsilon>0$ אזי $B_{f,\varepsilon}=\left\{ x\in P\mid\omega\left(f,x\right)\ge\varepsilon\right\}$.

למה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ויהי $\varepsilon>0$ אזי $B_{f,\varepsilon}$ קומפקטית.

למה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה תהא Π חלוקה ויהי $k\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\left\{ A\in\Pi\mid\left(A\cap B_{f,\frac{1}{k}}\ne\varnothing\right)\wedge\left(\omega\left(f,A\right)\ge\frac{1}{2k}\right)\right\}$ כיסוי של $B_{f,\frac{1}{k}}$.

קריטריון לבג לאינטגרביליות רימן בתיבה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי (f רציפה כמעט על כל P)$\iff$($f\in R\left(P\right)$).

קבוצה מדידת ז'ורדן: $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה עבורה ∂E זניחה.

טענה: תהיינה $E_{1},E_{2}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי

- ∂E_{1} סגורה.
- $\partial\left(E_{1}\backslash E_{2}\right),\partial\left(E_{1}\cup E_{2}\right),\partial\left(E_{1}\cap E_{2}\right)\subseteq\partial E_{1}\cup\partial E_{2}$.

סימון: $J\left(\mathbb{R}^{n}\right)=\left\{ E\subseteq\mathbb{R}^{n}\mid\text{ז'ורדן }E\right\}$.

מסקנה: תהיינה $A,B\in J$ אזי $A\backslash B,A\cup B,A\cap B\in J$.

פונקציית אפיון/אינדיקטור: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\chi_{A}:\mathbb{R}^{n}\to\left\{ 0,1\right\}$ כך $\chi_{A}\left(x\right)=\begin{cases}1 & x\in A\\0 & x\notin A\end{cases}$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\chi_{A}\in C\left(\text{int}\left(A\right)\right)$ וכן $\chi_{A}\in C\left(\mathbb{R}^{n}\backslash A\right)$.

אינטגרביליות רימן: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה סגורה תהא $A\subseteq P$ חסומה ותהא $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ עבורה $f\cdot\chi_A\in R(P)$ אזי $\int_A f=\int_P f\cdot\chi_A$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה תהיינה $P_1,P_2\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבות סגורות עבורן $A\subseteq P_1,P_2$ ותהא $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ אזי

- $(f\cdot\chi_A\in R(P_1))\Longleftrightarrow(f\cdot\chi_A\in R(P_2))$.
- $\int_{P_1} f\cdot\chi_A=\int_{P_2} f\cdot\chi_A$.

מידה/נפח של תיבה: תהא $A\in J(\mathbb{R}^n)$ אזי $V(A)=\text{Vol}(A)=\int_A \mathrm{d}x$.

משפט: תהא $A\in J(\mathbb{R}^n)$ ותהיינה $f,g\in R(A)$ אזי

- יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $af+bg\in R(A)$ וכן $\int_A(af+bg)=a\int_A f+b\int_A g$.
- נניח כי $f\geq0$ אזי $\int_A f\geq0$.
- נניח כי $f\geq g$ אזי $\int_A f\geq\int_A g$.
- נניח כי $m\leq f\leq M$ אזי $m\text{Vol}(A)\leq\int_A f\leq M\text{Vol}(A)$.

טענה: תהיינה $A,B\in J(\mathbb{R}^n)$ ותהא $f\in R(A)\cap R(B)$ אזי $f\in R(A\cap B)$ וכן $f\in R(A\cup B)$.

מסקנה: תהיינה $A,B\in J(\mathbb{R}^n)$ עבורן $\text{Vol}(A\cap B)=0$ אזי $\int_{A\cup B} f=\int_A f+\int_B f$.

משפט ערך הביניים: יהי $A\in J(\mathbb{R}^n)$ תחום ותהא $f\in C(A,\mathbb{R})$ אזי $\exists c\in A.\ \int_A f=f(c)\,\text{Vol}(A)$.

טענה: תהא $A\in J(\mathbb{R}^n)$ ויהי $f\in R(A)$ אזי $|f|\in R(A)$ וכן $\left|\int_A f\right|\leq\int_A|f|$.

טענה: תהא $A\in J(\mathbb{R}^n)$ ותהיינה $f,g\in R(A)$ כמעט על כל A אזי $\int_A f=\int_A g$.

משפט: תהא $A\in J(\mathbb{R}^n)$ אזי $\int_{\text{int}(A)} f=\int_A f=\int_{\overline{A}} f$.

טענה: תהיינה $A_1\ldots A_k\in J(\mathbb{R}^n)$ אזי $\bigcup_{i=1}^k A_i,\bigcap_{i=1}^k A_i\in J(\mathbb{R}^n)$.

מסקנה: תהיינה $A_1\ldots A_k\in J(\mathbb{R}^n)$ עבורן לכל $i\neq j$ מתקיים $\text{Vol}(A_i\cap A_j)=0$ אזי $\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right)=\sum_{i=1}^n\text{Vol}(A_i)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $a\in\mathbb{R}^n$ אזי $(A\in J(\mathbb{R}^n))\Longleftrightarrow(A+a\in J(\mathbb{R}^n))$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $a\in\mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}(A)=\text{Vol}(A+a)$.

משפט יחידות פונקציית נפח: תהא $\nu:J(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}_{\geq0}$ אדיטיבית אינווריאנטית להזזות עבורה $\nu([0,1]^n)=1$ אזי $\nu=\text{Vol}$.

טענה: תהא $T\in\text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אורתוגונלית ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה אזי $T(A)$ חסומה.

מסקנה: תהא $T\in\text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אורתוגונלית ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $T(\partial A)=\partial(T(A))$.

מסקנה: תהא $T\in\text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אורתוגונלית ותהא $E\subseteq\mathbb{R}^n$ זניחה וחסומה אזי $T(E)$ זניחה וחסומה.

משפט: תהא $T\in\text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אורתוגונלית ותהא $A\in J(\mathbb{R}^n)$ אזי $T(A)\in J(\mathbb{R}^n)$ וכן $\text{Vol}(T(A))=\text{Vol}(A)$.

משפט פוביני: תהיינה $P\subseteq\mathbb{R}^n$, $Q\subseteq\mathbb{R}^m$ תיבות ותהא $f\in R(P\times Q)$ עבורה $\iint_{P\times Q} f$ קיים אזי $\int_P\int_Q f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x,\int_Q\int_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ קיימים ובפרט $\iint_{P\times Q} f=\int_P\int_Q f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_Q\int_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסקנה: תהיינה $P\subseteq\mathbb{R}^n$, $Q\subseteq\mathbb{R}^m$ תיבות ותהא $f\in R(P\times Q)$ אזי $\int_Q f(a,y)\,\mathrm{d}y$ קיים כמעט לכל $a\in P$.

מסקנה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}^{n-1}$ חסומה תהיינה $\varphi_1,\varphi_2:B\to\mathbb{R}$ תהא $A=\{(x,y)\in B\times\mathbb{R}\mid\varphi_1(x)\leq y\leq\varphi_2(x)\}$ ותהא $f\in R(A)$ אזי $\int_A f=\int_B\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

מסקנה: תהא $A\in J(\mathbb{R}^n)$ תהא $A\subseteq\prod_{i=1}^n P_i$ תיבה אזי $A\cap\left(\mathbb{R}^{n-1}\times\{y\}\right)\in J\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ כמעט לכל $y\in P_n$ ובפרט $\text{Vol}(A)=\int_{P_n}\text{Vol}\left(A\cap\left(\mathbb{R}^{n-1}\times\{y\}\right)\right)\mathrm{d}y$.

שטח: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^2$ אזי $S(D)=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^2$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_{\geq0}$ צפיפות אזי $m(D)=\iint_D\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מומנט מסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^2$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_{\geq0}$ צפיפות אזי

- מומנט מסה לפי ציר x: $M_x(D)=\iint_D y\cdot\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
- מומנט מסה לפי ציר y: $M_x(D)=\iint_D x\cdot\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מרכז המסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^2$ אזי $\left(\frac{M_y(D)}{m(D)},\frac{M_x(D)}{m(D)}\right)$.

נפח: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^3$ אזי $V(E)=\iiint_E\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מסה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^3$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_{\geq0}$ צפיפות אזי $m(E)=\iiint_E\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מומנט מסה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^3$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_{\geq0}$ צפיפות אזי

- מומנט מסה לפי המישור $\{z=0\}$: $M_{xy}(E)=\iiint_E z\cdot\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
- מומנט מסה לפי המישור $\{y=0\}$: $M_{xz}(E)=\iiint_E y\cdot\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
- מומנט מסה לפי המישור $\{x=0\}$: $M_{yz}(E)=\iiint_E x\cdot\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מרכז המסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ אזי $\left(\frac{M_{yz}(E)}{m(E)},\frac{M_{xz}(E)}{m(E)},\frac{M_{xy}(E)}{m(E)}\right)$.

מקבילון: יהיו $v_1\ldots v_n\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\text{Par}\left(v_1\ldots v_n\right)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\mid\forall i\in[n].\alpha_i\in[0,1]\right\}$.

טענה: יהיו $v_1\ldots v_n\in\mathbb{R}^{n}$ אזי מתקיים $\text{Vol}\left(\text{Par}\left(v_1\ldots v_n\right)\right)=\left|\det\begin{pmatrix}- & v_1 & -\\ & \vdots & \\ - & v_n & -\end{pmatrix}\right|$.

תומך: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $\text{supp}\left(f\right)=\overline{\left\{x\in\mathcal{U}\mid f\left(x\right)\neq0\right\}}$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $E\subseteq A$ אזי

- (E זניחה)$\Longleftarrow$($\varphi\left(E\right)$ זניחה).
- $\left(\left(\text{Vol}\left(E\right)=0\right)\wedge\left(\overline{E}\subseteq A\right)\right)\Longleftarrow\left(\left(\text{Vol}\left(\varphi\left(E\right)\right)=0\right)\wedge\left(\overline{\varphi\left(E\right)}\subseteq B\right)\right)$.
- (($\overline{E}\subseteq A$)$\wedge$(E ז'ורדן))$\Longleftarrow$(($\overline{\varphi\left(E\right)}\subseteq B$)$\wedge$($\varphi\left(E\right)$ ז'ורדן)).

מסקנה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f\in R\left(B\right)$ אזי $\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\right|\in R\left(A\right)$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f\in R\left(B\right)$ אזי $\left(f\circ\varphi\right)\left|\varphi'\right|\in R\left(A\right)$ ובפרט $\int_{B}f=\int_{A}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\varphi'\right|\text{d}t$.

דיפאומורפיזם אלמנטרי: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}$ פתוחות וחסומות אזי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם עבורו קיימת $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $\varphi\left(x\right)=\left(x_1,\ldots,\psi\left(x_i\right),\ldots x_n\right)$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם אלמנטרי ותהא $f\in R\left(B\right)$ אזי $\int_{B}f=\int_{A}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|\text{d}t$.

טענה: תהיינה $A,B,C\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהיו $\varphi:B\to C$, $\psi:A\to B$ דיפאומורפיזם אלמנטריים ותהא $f\in R\left(A\right)$ אזי $\int_{C}f=\int_{A}f\left(\left(\varphi\circ\psi\right)\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi\circ\psi}\left(t\right)\right|\text{d}t$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ויהי $a\in A$ אזי קיימת $\mathcal{O}\subseteq A$ סביבה של a וכן $\psi_1\ldots\psi_m$ דיפאומורפיזם אלמנטריים עבורם $\varphi=\psi_1\circ\ldots\circ\psi_m$ על $\mathcal{O}$.

משפט: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f\in R\left(B\right)$ אזי $\int_{B}f=\int_{A}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|\text{d}t$.

מסקנה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם תהא $E\subseteq A$ עבורה $\overline{E}\subseteq A$ ותהא $f\in R\left(\varphi\left(E\right)\right)$ אזי $\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\right|\in R\left(E\right)$ ובפרט $\int_{\varphi(E)}f=\int_{E}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|\text{d}t$.

משפט: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות תהא $\varphi:A\to B$ תהיינה $E\subseteq A$, $S\subseteq B$ זניחות עבורן $A\backslash E,S\backslash B$ פתוחות וכן $\varphi\left(A\backslash E\right)=S\backslash B$ כמו כן φ דיפאומורפיזם בעל דיפרנציאל חסום על $A\backslash E$ ותהא $f\in R\left(S\right)$ אזי $\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\right|\in R\left(A\backslash E\right)$ ובפרט $\int_{B}f=\int_{A\backslash E}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|\text{d}t$.

מסקנה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות תהא $\varphi:A\to B$ בעל דיפרנציאל חסום תהיינה $E\subseteq A$, $S\subseteq B$ זניחות עבורן $A\backslash E,S\backslash B$ פתוחות וכן $\varphi\left(A\backslash E\right)=S\backslash B$ כמו כן φ דיפאומורפיזם על $A\backslash E$ ותהא $f\in R\left(S\right)$ אזי $\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\right|\in R\left(A\right)$ ובפרט $\int_{B}f=\int_{A}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|\text{d}t$.

קואורדינטות קוטביות/פולריות: יהי $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{2}$ אזי $\left(\rho,\phi\right)\in\left(0,\infty\right]\times\left[0,2\pi\right]$ עבורן $x=\rho\cos\left(\phi\right)$ וכן $y=\rho\sin\left(\phi\right)$.

טענה: תהא $\varphi:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}^{2}$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לפולריות אזי $\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|=\rho$.

קואורדינטות גליליות: יהי $\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^{2}$ אזי $\left(\rho,\phi,\iota\right)\in\left(0,\infty\right]\times\left[0,2\pi\right]\times\left\{z\right\}$ עבורן $x=\rho\cos\left(\phi\right)$ וכן $y=\rho\sin\left(\phi\right)$.

טענה: תהא $\varphi:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}^{2}$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לגליליות אזי $\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|=\rho$.

קואורדינטות כדוריות: יהי $\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^{2}$ אזי $\left(\rho,\phi,\theta\right)\in\left(0,\infty\right]\times\left[0,2\pi\right]\times\left[0,\pi\right]$ עבורן $x=\rho\sin\left(\theta\right)\cos\left(\phi\right)$ וכן $y=\rho\sin\left(\theta\right)\sin\left(\phi\right)$ וכן $z=\rho\cos\left(\theta\right)$.

טענה: תהא $\varphi:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}^{2}$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לכדוריות אזי $\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|=\rho^{2}\sin\left(\theta\right)$.

טענה: תהא $S\subseteq\mathbb{R}^{2}$ ותהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ סיבוב S סביב ציר z בקואורדינטות גליליות אזי $\text{Vol}\left(E\right)=2\pi\iint_{S}\rho\text{d}\rho\text{d}z$.

מסקנה נפח גוף סיבוב: תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ עבורן $f\leq g$ תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ סביב S סביב ציר x אזי $\text{Vol}\left(E\right)=\pi\int_{a}^{b}\left(g^{2}\left(x\right)-f^{2}\left(x\right)\right)\text{d}x$.

משפט פאפוס: תהא $S\subseteq\mathbb{R}^{2}$ יהי $c\in\mathbb{R}^{2}$ מרכז המסה של S ותהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ סיבוב S סביב ציר x אזי $\text{Vol}\left(E\right)=2\pi R_{c}\cdot\text{Vol}\left(S\right)$ באשר R_c רדיוס סיבוב c.

מיצוי ז'ורדן: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left(E_k\right)_{k=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות מדידות ז'ורדן עולה עבורה $\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k=E$.

טענה: תהא $E\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ויהי $\left(E_k\right)_{k=1}^{\infty}$ מיצוי ז'ורדן של E אזי $\lim_{k\to\infty}\text{Vol}\left(E_k\right)=\text{Vol}\left(E\right)$.

מסקנה: תהא $E\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ יהי $\left(E_k\right)_{k=1}^{\infty}$ מיצוי ז'ורדן של E ותהא $f\in R\left(E\right)$ אזי $\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f=\int_{E}f$.

אינטגרל לא אמיתי: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f : E \to \mathbb{R}$ עבורם לכל $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ מיצוי ז'ורדן של E מתקיים $\forall k \in \mathbb{N}. f \in R(E_k)$ וכן $\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f$ קיים ושווה אזי $\int_E f = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f$.

טענה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f : E \to \mathbb{R}$ אי שלילית עבורה קיים מיצוי ז'ורדן $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ של E המקיימת $\forall k \in \mathbb{N}. f \in R(E_k)$ וכן $\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f$ קיים אזי $\int_E f$ מתכנס.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} \mathrm{d}x = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t\right)^n = \pi^{\frac{n}{2}}$.

משפט מבחן ההשוואה לאינטגרלים לא אמיתיים: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהיינה $f, g : E \to \mathbb{R}$ עבורן $|f| \le g$ וכן $\forall A \in \mathcal{P}(E) \cap J(\mathbb{R}^n). (f \in R(A)) \Longleftrightarrow (g \in R(A))$ וכן $\int_E g$ מתכנס אזי $\int_E f, \int_E |f|$ מתכנסים.

מסקנה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f : E \to \mathbb{R}$ אזי ($\int_E |f|$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\int_E f$ מתכנס).

טענה: תהא $E \in J(\mathbb{R}^n)$ ותהא $f \in R(E)$ אזי $\forall \varepsilon > 0. \forall A \subseteq E. \left|\int_A f\right| > \frac{1}{2} \int_E |f| - \varepsilon$.

משפט: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ בעלת מיצוי ז'ורדן ותהא $f : E \to \mathbb{R}$ בעלת קבוצת נקודות אי־רציפות זניחה אזי ($\int_E f$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\int_E |f|$ מתכנס).

טענה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהיינה $f, g : E \to \mathbb{R}$ עבורן $\int_E f, \int_E g$ מתכנסים אזי $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$.

הערה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה E בעלת מיצוי ז'ורדן.

משפט: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות יהי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f : B \to \mathbb{R}$ עבורה לכל $E \subseteq B$ ז'ורדן וקומפקטית מתקיים $f \in R(E)$ וכן $\int_B f$ מתכנס אזי $\int_B f = \int_A f(\varphi(t)) |\det \mathcal{D}_\varphi(t)| \,\mathrm{d}t$.

פונקציית גאמא: יהי $t > 0$ אזי $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} \mathrm{d}x$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\Gamma(n) = (n-1)!$.

טענה: יהי $t > 0$ אזי $\Gamma(t)$ מתכנס.

פונקציית בטא: יהיו $t, s > 0$ אזי $B(t,s) = \int_0^{\infty} x^{t-1} (1-x)^{s-1} \mathrm{d}x$.

טענה: יהיו $t, s > 0$ אזי $B(t,s)$ מתכנס.

טענה: תהא $f \in C([a,b] \times [c,d])$ ותהא $t_n \in [c,d]^{\mathbb{N}}$ עבורה $t_n \to \ell$ אזי $\forall x \in [a,b]. f(x, t_n) \xrightarrow{u} f(x, \ell)$.

טענה: תהא $f \in C([a,b] \times [c,d])$ אזי $\int_a^b f(x,t) \mathrm{d}x \in C([c,d])$.

טענה: תהא $f \in C([a,b] \times [c,d])$ עבורה $\frac{\partial f}{\partial t} \in C([a,b] \times [c,d])$ אזי $\int_a^b f(x,t) \mathrm{d}x \in C^1([c,d])$ וכן $\frac{d}{dt}\left(\int_a^b f(x,t) \mathrm{d}x\right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \mathrm{d}x$.

משפט: תהא $f \in C([a,b] \times [c,d])$ עבורה $\frac{\partial f}{\partial t} \in C([a,b] \times [c,d])$ ותהיינה $\alpha, \beta \in C^1([c,d], [a,b])$ אזי מתקיים $\frac{d}{dt}\left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t) \mathrm{d}x\right) = f(\beta(t), t) \beta'(t) - f(\alpha(t), t) \alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \mathrm{d}x$.

מסקנה: יהיו $t, s > 0$ אזי $B(t,s) = \frac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)}$.

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathrm{Vol}(B_1^n(0)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

סימפלקס: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall i \in [n]. x_i \ge 0) \wedge (\sum_{i=1}^n x_i \le 1)\}$.

טענה נוסחת דירכלה: יהיו $p_1 \ldots p_n > 0$ אזי $\int \cdots \int_{\Delta_n} \left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i - 1}\right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(p_i)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n p_i\right)}$.

מסקנה: יהיו $p_1 \ldots p_n > 0$ ויהיו $\gamma_1 \ldots \gamma_n > 0$ אזי $\int \cdots \int_{\substack{x_1, \ldots x_n \ge 0 \\ \sum x_i^{\gamma_i} \le 1}} \left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i - 1}\right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \gamma_i} \cdot \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{p_i}{\gamma_i}\right)}{\Gamma\left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\gamma_i}\right)}$.

טענה: יהיו $p_1 \ldots p_n > 0$ ותהא $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ רציפה כמעט תמיד אזי $\int \cdots \int_{\Delta_n} \psi(x_1 \ldots x_n) \left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i - 1}\right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(p_i)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n p_i\right)} \int_0^1 \psi(u) u^{\left(\sum p_i\right) - 1} \mathrm{d}u$.