פונקציה קדומה: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה המקיימת $F'=f$.
פונקציה קדומה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה המקיימת $F'(x)=f(x)$ לכל $x\in(a,b)$ ומקיימת $F'_{+}(a)=f(a)$ וכן $F'_{-}(b)=f(b)$.
אינטגרל לא מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי $\int f=\left\{F\in\mathbb{R}^{I}\mid F'=f\right\}$.
טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ תהא $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קדומה ותהא $G\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $(G'=f)\Longleftrightarrow(\exists c\in\mathbb{R}.G=F+c)$.
הערה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $F\in\int f$ אזי מקובל לסמן $\int f=F+c$ עבור $c\in\mathbb{R}$.
טענה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ בעלות פונקציות קדומות אזי

- $\int(f+g)=\left(\int f\right)+\left(\int g\right)$.
- יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי $\int(\alpha f)=\alpha\left(\int f\right)$.

טענה אינטגרציה בחלקים: תהיינה $u,v\in\mathbb{R}^{I}$ גזירות אזי $\int uv'=u\cdot v-\int u'v$.
טענה החלפת משתנים: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $F\in\int f$ אזי $F\circ g=\int((f\circ g)\cdot g')$.
חלוקה: יהי $[a,b]$ אזי $\Pi=\{x_0,\ldots,x_n\}$ המקיימות $a=x_0<x_1\ldots<x_{n-1}<x_n=b$.
סימון: תהא $\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.
מדד העדינות: תהא $\Pi=\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\lambda(\Pi)=\max_{i=1}^{n}|\Delta x_i|$.
עידון: תהא Π_1 חלוקה אזי חלוקה Π_2 המקיימת $\Pi_1\subseteq\Pi_2$.
טענה: תהא Π_1 חלוקה וכן Π_2 עידון אזי $\lambda(\Pi_2)\le\lambda(\Pi_1)$.
נקודות מתאימות: תהא $\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\{t_1\ldots t_n\}$ המקיימות $t_i\in[x_{i-1},x_i]$.$\forall i\in\{1\ldots n\}$.
סכום רימן: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $S(f,\Pi,\{t_i\})=\sum f(t_i)\Delta x_i$.
אינטגרביליות רימן: $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורה קיים $L\in\mathbb{R}$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ לכל נקודות מתאימות $\{t_i\}$ מתקיים $|S(f,\Pi,\{t_i\})-L|<\varepsilon$.
אינטגרל רימן מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $L=\int_a^b f$.
סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $\int_a^b f=\int_{[a,b]}f=\int_{[a,b]}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
הערה: יהיו $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $\int_a^b f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ אינטגרל על פי המשתנה φ.
הערה: כל עוד ברור מהו תחום האינטגרל וכן מהי הפונקציה כל הסימונים תקפים.
סימון: $R([a,b])=\left\{f\in\mathbb{R}^{[a,b]}\mid f\text{ אינטגרבילית רימן}\right\}$.
הערה: ניתן להגדיר אינטגרביליות רימן בסימון $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{\lambda(\Pi)\to0}S(f,\Pi,\{t_i\})$.
טענה: יהי $c\in\mathbb{R}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $\int_a^b c\cdot\mathrm{d}t=c(b-a)$.
טענה: $D(x)\notin R(\mathbb{R})$.
משפט: תהא $f\in R([a,b])$ אזי f חסומה.
סכום דרבו עליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_i,x_{i-1}]}(f)\cdot\Delta x_i$.
סכום דרבו תחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_i,x_{i-1}]}(f)\cdot\Delta x_i$.
למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sup_{\{t_i\}\text{ נקודות מתאימות}}S(f,\Pi,\{t_i\})$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\inf_{\{t_i\}\text{ נקודות מתאימות}}S(f,\Pi,\{t_i\})$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\subseteq\Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\ge\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה Π_1,Π_2 חלוקות אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.
האינטגרל העליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\overline{I}(f)=\inf_{\Pi\text{ חלוקה}}\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.
האינטגרל התחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\underline{I}(f)=\sup_{\Pi\text{ חלוקה}}\underline{\Sigma}(f,\Pi)$.
מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{I}(f)\le\overline{I}(f)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.
קריטריון דרבו: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $(f\in R([a,b]))\Longleftrightarrow$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ מתקיים $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$).
מסקנה: תהא $f\in R([a,b])$ חסומה אזי $\int_a^b f=\underline{I}(f)=\overline{I}(f)$.

תנודה: תהא $f\in\mathbb{R}^J$ חסומה אזי $\omega\left(f,J\right)=\sup_{x,y\in J}\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^J$ חסומה ויהי $x_0\in J$ אזי (f רציפה על x_0)$\iff(\lim_{\delta\to0}\omega\left(f,\left[x_0-\delta,x_0+\delta\right]\right)=0)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^J$ חסומה אזי (f רציפה במ"ש)$\iff(\forall I\subseteq J.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>\text{len}\left(I\right).\omega\left(f,I\right)<\varepsilon)$.

תנודה כוללת ביחס לחלוקה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\omega\left(f,\left[x_{i-1},x_i\right]\right)\Delta x_i$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega\left(f,\Pi\right)=\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\cup\{p\}=\Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_1\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_2\right)+\lambda\left(\Pi_1\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_1\right)\ge\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_2\right)-\lambda\left(\Pi_1\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\cup\{p_1\ldots p_m\}=\Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_1\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_2\right)+m\lambda\left(\Pi_1\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_1\right)\ge\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_2\right)-m\lambda\left(\Pi_1\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ לכל Π חלוקה $\lambda\left(\Pi\right)<\delta$ מתקיים

- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\le\underline{I}\left(f\right)\le\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)+\varepsilon$.
- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\ge\overline{I}\left(f\right)\ge\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת $\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

קריטריון דרבו משופר: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\left(f\in R\left(\left[a,b\right]\right)\right)\iff$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה Π עבורה $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)<\varepsilon$).

משפט: $C\left(\left[a,b\right]\right)\subseteq R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ומונוטונית אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in\left[a,c\right]$ עבורה $f_{\restriction_{[a,b]}}\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in\left[a,c\right]$ עבורה $\left(f\in R\left(\left[a,b\right]\right)\right)\wedge\left(f\in R\left(\left[b,c\right]\right)\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,d]}$ חסומה ויהיו $b<c\in\left[a,d\right]$ עבורם $f\in R\left(\left[a,d\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[b,c\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in\left(a,c\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in\left(a,c\right).f\in R\left(\left[b,c\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ ויהי $b\in\left[b,c\right]$ נגדיר $g\left(x\right)=\begin{cases}y & x=b\\ f\left(x\right) & \text{else}\end{cases}$ אזי $g\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

מסקנה: נגדיר $f\left(x\right)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$ אזי $f\in R\left(\left[-1,1\right]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת מונוטוניות או רציפות למקוטעין אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ תהא $H\in C\left(\mathbb{R}\right)$ וכן $c\in\mathbb{R}$

- $\left(f+g\right),\left(cf\right)\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.
- $\left(f\cdot g\right),\left(H\circ f\right),\left|f\right|\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

קבוצה ממידה אפס: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימים $\{\left(a_i,b_i\right)\}_{i=0}^{\infty}$ עבורם $A\subseteq\bigcup\left(a_i,b_i\right)$ וכן $\sum\left(b_i-a_i\right)<\varepsilon$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $|A|\le\aleph_0$ אזי A ממידה אפס.

קבוצה צפופה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ אזי $A\subseteq B$ המקיימת $\forall b\in B.\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.\left|b-a\right|<\varepsilon$.

טענה: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורן קיימת A צפופה עבורה $f_{\restriction_A}=g_{\restriction_A}$ אזי $\int_a^b f=\int_a^b g$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ נגדיר $g\left(x\right)=\begin{cases}y_i & x\in\{b_1\ldots b_m\}\\ f\left(x\right) & \text{else}\end{cases}$ אזי $\int_a^c f=\int_a^c g$.

משפט ליניאריות האינטגרנד: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^b\alpha f+\beta g=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$.

משפט ליניאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ ויהי $b\in\left(a,c\right)$ אזי $\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f$.

הגדרה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_a^b f=-\int_b^a f$.

משפט חיוביות: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $f\ge0$ אזי $\int_a^b f\ge0$.

מונוטוניות האינטגרל: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימות $f\ge g$ אזי $\int_a^b f\ge\int_a^b g$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ רציפה המקיימת $f\ge0$ וכן $\int_a^b f=0$ אזי $f=0$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $m\le f\le M$ אזי $m\left(b-a\right)\le\int_a^b f\le M\left(b-a\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b\left|f\right|\le\sup_{[a,b]}\left(\left|f\right|\right)\left(b-a\right)$.

משפט רציפות האינטגרל המסויים: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ נגדיר $F\left(x\right)=\int_a^x f\left(t\right)\text{dt}$ אזי $F\in C\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט ערך ביניים ראשון: תהא $f\in C([a,b])$ ותהא $0\le g\in R([a,b])$ אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b (f\cdot g)=f(x_0)\int_a^b g$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R([a,b])$ ותהא $x_0\in[a,b]$ נקודת רציפות של f נגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ אזי $F'(x_0)=f(x_0)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R([a,b])$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]$ אזי $\int_a^b f=F(b)-F(a)$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,b])$ יהיו $x_1\dots x_n\in[a,b]$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]\setminus\{x_1\dots x_n\}$ אזי $\int_a^b f=F(b)-F(a)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $[f]|_a^b=f(b)-f(a)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R([a,b])$ אזי $\int_a^b f'g=[f\cdot g]|_a^b-\int_a^b fg'$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f\in C([a,b])$ ותהא $\varphi\in C^1([\alpha,\beta],[a,b])$ המקיימת $(\varphi(\alpha)=a)\wedge(\varphi(\beta)=b)$ אזי $\int_a^b f=\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\cdot\varphi'$.

למה: תהא $f\in C^1([0,2\pi])$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=-\int_0^{2\pi} f'(x)\frac{\sin(nx)}{n}\mathrm{d}x$.

טענה דעיכת מקמדי פורייה בהינתן גזירות: תהא $f\in C^1([0,2\pi])$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{2\pi\sup(|f'|)}{n}$.

אינטגרל רימן לא אמיתי: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי

- חד צדדי חיובי: נניח $I=[a,\infty)$ וכן $\forall b\in[a,\infty).f\in R([a,b])$ אזי $\int_a^\infty f=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f$.
- חד צדדי שלילי: נניח $I=(-\infty,b]$ וכן $\forall a\in(-\infty,b].f\in R([a,b])$ אזי $\int_{-\infty}^b f=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f$.
- דו צדדי: נניח $I=\mathbb{R}$ וכן $\forall a,b\in\mathbb{R}.(a<b)\Longrightarrow(f\in R([a,b]))$ אזי $\int_{-\infty}^\infty f=\int_{-\infty}^0 f+\int_0^\infty f$.
- לא חסום משמאל: נניח $I=(a,b]$ וכן $\forall c\in I.f\in R([c,b])$ אזי $\int_a^b f=\lim_{r\to a^+}\int_r^b f$.
- לא חסום מימין: נניח $I=[a,b)$ וכן $\forall c\in I.f\in R([a,c])$ אזי $\int_a^b f=\lim_{r\to b^-}\int_a^r f$.

סימון: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $R(I)=\left\{f\in\mathbb{R}^I \;\middle|\; \text{קיים וסופי } \int_I f\right\}$.

משפט: יהיו $\omega,\eta\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ אזי

- ליניאריות האינטגרד: תהיינה $f,g\in R([a,\omega))$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^\omega(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_a^\omega f+\beta\int_a^\omega g$.
- ליניאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R([a,\omega))$ ויהי $c\in(a,\omega)$ אזי $\int_a^\omega f=\int_a^c f+\int_c^\omega f$.
- מונוטוניות: תהיינה $f,g\in R([a,\omega))$ המקיימות $f\ge g$ אזי $\int_a^\omega f\ge\int_a^\omega g$.
- ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R([a,\omega))$ ותהא $F\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $F'(x)=f(x)$ על $[a,\omega)$ אזי $\int_a^\omega f=\lim_{b\to\omega}F(b)-F(a)$.
- אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ גזירות עבורן $f',g'\in R([a,\omega))$ אזי $\int_a^\omega f'g=\lim_{b\to\omega}[f\cdot g]|_a^b-\int_a^\omega fg'$.
- שינוי משתנה: תהא $f\in R([a,\omega))$ ותהא $\varphi\in C^1([c,\eta),[a,\omega))$ המקיימת $\varphi(c)=a$ וכן $\lim_{b\to\eta}\varphi(b)=\omega$ אזי $\int_a^\omega f=\int_c^\eta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ אזי $\left(\forall\varepsilon>0.\exists B\in(a,\omega).\forall b_1,b_2\in[B,\omega).\left|\int_{b_1}^{b_2} f\right|<\varepsilon\right)\Longleftrightarrow(f\in R([a,\omega)))$.

התכנסות בהחלט: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ עבורה $\int_a^\omega|f|$ מתכנס.

התכנסות בתנאי: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ עבורה $\int_a^\omega|f|$ אינו מתכנס אך $\int_a^\omega f$ מתכנס.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\int_a^\omega f$ מתכנס.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\left|\int_a^\omega f\right|\le\int_a^\omega|f|$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ אזי $\left(\int_a^\omega f<\infty\right)\Longleftrightarrow$($F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ חסומה על $[a,\omega)$).

מסקנה: תהיינה $0\le f\le g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימות $\forall b\in(a,\omega).f,g\in R([a,b])$ אזי

- $\left(\int_a^\omega g<\infty\right)\Longrightarrow\left(\int_a^\omega f<\infty\right)$.
- $\left(\int_a^\omega f=\infty\right)\Longrightarrow\left(\int_a^\omega g=\infty\right)$.

משפט: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\left(\sum_{n=1}^\infty f(n)<\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\int_1^\infty f<\infty\right)$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\sum_{n=2}^\infty f(n)\le\int_1^\infty f\le\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

משפט אבל: תהא $g\in C([a,\omega))\cap R([a,\omega))$ ותהא $f\in C^1([a,\omega))$ מונוטונית וחסומה אזי $\int_a^\omega fg$ מתכנס.

משפט דיריכלה: תהא $g\in C([a,\omega))$ עבורה $G(x)=\int_a^x g$ חסומה ותהא $f\in C^1([a,\omega))$ מונוטונית עבורה $\lim_{x\to\omega}f(x)=0$ אזי $\int_a^\omega fg$ מתכנס.

למה של בונה: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ באשר $0\le g$ וכן g יורדת אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{x_0}f(x)\,\mathrm{d}x$.

למה של אבל: תהא $a_n\ge0$ סדרה יורדת ותהא b_n סדרה עבורה $\forall n\in\mathbb{N}.m<\sum_{k=1}^n b_k<M$ אזי $a_1m<\sum_{k=1}^n a_kb_k<a_1M$.

משפט ערך ביניים שני: תהיינה $f,g\in R\left([a,b]\right)$ באשר g מונוטונית אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x=g\left(a\right)\int_a^{x_0}f\left(x\right)\mathrm{d}x+g\left(b\right)\int_{x_0}^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f\in R\left([a,b]\right)$ ותהא $\varphi\in C^1\left([\alpha,\beta],[a,b]\right)$ עולה ממש המקיימת $\left(\varphi\left(\alpha\right)=a\right)\wedge\left(\varphi\left(\beta\right)=b\right)$ אזי $\int_a^b f=\int_\alpha^\beta\left(f\circ\varphi\right)\cdot\varphi'$.

טענה: תהא $f\in C^{n+1}\left([a,b]\right)$ אזי $R_n\left(f,a\right)\left(x\right)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}\left(t\right)\left(x-t\right)^n\mathrm{d}t$.

סימון: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $k!!=\prod_{n=0}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor-1}\left(k-2n\right)$.

למה: יהי $m\in\mathbb{N}_+$ אזי $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(x\right)^m\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(x\right)^m\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(m-1)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$.

משפט מכפלת ואליס: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots(2n-2)\cdot(2n-2)\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\ldots(2n-1)\cdot(2n-1)}=\prod_{n=1}^\infty\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2}$.

משפט אבל: תהא $g\in R\left([a,\omega)\right)$ ותהא $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ מונוטונית וחסומה אזי $fg\in R\left([a,\omega)\right)$.

משפט דיריכלה: תהא $\forall b\in[a,\omega).g\in R\left([a,b]\right)$ עבורה $G\left(x\right)=\int_a^x g$ חסומה ותהא $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ מונוטונית עבורה $\lim_{x\to\omega}f\left(x\right)=0$ אזי $fg\in R\left([a,\omega)\right)$.

טענה נוסחאת סטירלינג: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\le n!\le\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{1}{12n}}$.

מסקנה: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}=\sqrt{2\pi}$.

פונקציית זטא של רימן: נגדיר $\zeta:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ כך $\zeta\left(s\right)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}$.

טענה: $\lim_{s\to1^+}\zeta\left(s\right)\left(s-1\right)=1$.

משפט הרמיט: e הינו טרנסצנדנטי.

התכנסות נקודתית: יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^I$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{pointwise}}g\right)\iff\left(\forall x\in I.\lim\limits_{n\to\infty}f_n\left(x\right)=g\left(x\right)\right)$.

סימון: $\left(f_n\xrightarrow{p.w.}f\right)\iff\left(f_n\xrightarrow{\text{pointwise}}f\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $f_n\in\mathbb{R}^I$ מתכנסת נקודתית אל f אזי

- רציפות: $\left(\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in C\left(I\right)\right)\not\Longrightarrow\left(f\in C\left(I\right)\right)$.
- אינטגרביליות רימן: $\left(\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in R\left(I\right)\right)\not\Longrightarrow\left(f\in R\left(I\right)\right)$.
- גבול האינטגרל: נניח $f\in R\left(I\right)$ וכן $\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in R\left(I\right)$ אזי $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\int_I f_n=L\right)\not\Longrightarrow\left(\int_I f=L\right)$.
- נגזרת: יהי $x\in I$ נניח f גזירה ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים f_n גזירה אזי $\left(\lim\limits_{n\to\infty}f_n'\left(x\right)=L\right)\not\Longrightarrow\left(f'\left(x\right)=L\right)$.

התכנסות במידה שווה (במ"ש): יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^I$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{uniform}}g\right)\iff\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|=0\right)$.

סימון: $\left(f_n\xrightarrow{u}f\right)\iff\left(f_n\xrightarrow{\text{unifom}}f\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{u}f\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall x\in A.\forall n>N.\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon\right)$.

חסומה במידה אחידה: $f_n\in\mathbb{R}^I$ המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.\forall x\in I.\left|f_n\left(x\right)\right|\le M$.

למה: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^I$ חסומות במידה אחידה על ידי $M\in\mathbb{R}$ עבורן $\left(f_n\xrightarrow{u}f\right)\wedge\left(g_n\xrightarrow{u}g\right)$ אזי $f_ng_n\xrightarrow{u}fg$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה: תהיינה $f_n\in\mathbb{R}^I$ אזי $\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n,m>N.\forall x\in I.\left|f_n\left(x\right)-f_m\left(x\right)\right|<\varepsilon\right)\iff\left(\exists f\in\mathbb{R}^I.f_n\xrightarrow{u}f\right)$.

משפט: תהיינה $f_n\in C\left(I\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{u}f$ אזי $f\in C\left(I\right)$.

קבוצה קומפקטית: $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $\{I_n\}_{n\in\Lambda}$ קטעים פתוחים עבורם $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}\left(\Lambda\right).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n$.

הלמה של היינה־בורל: יהי $a<b$ אזי $[a,b]$ קומפקטית.

משפט דיני: תהיינה $f_n\in C\left([a,b]\right)$ ותהא $f\in C\left([a,b]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{p.w.}f$ וכן $\forall n<m.f_m<f_n$ אזי $f_n\xrightarrow{u}f$.

מסקנה: תהיינה $f_n\in C\left([a,b]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{p.w.}f$ באשר $f\in C\left([a,b]\right)$ וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ מונוטונית אזי $f_n\xrightarrow{u}f$.

טענה: תהיינה $f_n\in R\left([a,b]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{u}f$ אזי $f\in R\left([a,b]\right)$.

משפט: תהיינה $f_n\in R\left([a,b]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{u}f$ אזי $\int_a^b f=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n$.

פונקציית ויירשטראס: יהי $a\in\left(0,1\right)$ ויהי $b\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ עבורם $ab>1+\frac{3\pi}{2}$ אזי $W\left(x\right)=\sum_{k=0}^\infty a^k\cos\left(b^k\pi x\right)$.

הגדרה: נגדיר $\triangle_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כך $\left(\triangle_0\left(x\right)=\begin{cases}x & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 1-x & \frac{1}{2}\le x\le1\end{cases}\right)\wedge\left(\forall x\in\mathbb{R}.\triangle_0\left(x+1\right)=\triangle_0\left(x\right)\right)\wedge\left(\triangle_k=\frac{\triangle_0\left(4^kx\right)}{4^k}\right)$.

טענה: $\triangle_n \xrightarrow{u} \triangle$.

מסקנה: $\triangle$ רציפה בכל נקודה.

משפט: $\triangle$ אינה גזירה באף נקודה.

משפט: תהיינה $f_n \in C^1([a,b])$ עבורה $f_n' \xrightarrow{u} g$ ותהא $x_0 \in [a,b]$ עבורה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אזי $f_n \xrightarrow{u} f$ וכן $f' = g$.

סימון: תהיינה $f_n \in \mathbb{R}^I$ עבורה $\sum_{i=0}^{n} f_n \xrightarrow{u} f$ אזי $\sum_{i=0}^{\infty} f_n = f$ במ"ש.

משפט אינטגרציה איבר איבר: תהיינה $u_n \in C([a,b])$ עבורה $\sum_{i=0}^{\infty} u_n$ במ"ש אזי $\int_a^b \sum_{i=0}^{\infty} u_n = \sum_{i=0}^{\infty} \int_a^b u_i$.

משפט גזירה איבר איבר: תהיינה $u_n \in C^1([a,b])$ עבורה $\sum u_i'$ במ"ש ותהא $x_0 \in [a,b]$ עבורה $\sum u_i(x_0)$ מתכנס אזי $\sum u_i$ במ"ש וכן $\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{dx} u_i$.

משפט בוחן M של ויירשטראס: תהיינה $u_n \in \mathbb{R}^I$ ותהא $M \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ וכן $\forall x \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. |u_n(x)| \le M_n$ אזי $\sum u_n$ מתכנס בהחלט ובמ"ש.

למה התמרת אבל: תהיינה $a,b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{k} a_m (b_k - b_{k+1})$.

משפט קריטריון אבל: תהיינה $f_n, g_n \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^{n} f_i$ מתכנסת במ"ש וכן לכל $x \in [a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית וחסומה במידה אחידה אזי $\sum_{i=0}^{n} f_i g_i$ מתכנס במ"ש.

משפט קריטריון דיריכלה: תהיינה $f_n, g_n \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^{n} f_i$ חסומה במידה אחידה וכן $g_n \xrightarrow{u} 0$ וכן לכל $x \in [a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית אזי $\sum_{i=0}^{n} f_i g_i$ מתכנס במ"ש.

למה: תהא $f \in C([0,1])$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי קיימת $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ רציפה למקוטעין ולינארית למקוטעין עבורה $\max |f - \varphi| < \varepsilon$.

למה: תהא $f \in C([0,1])$ ויהי $N \in \mathbb{N}$ נגדיר $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ רציפה למקוטעין ולינארית למקוטעין כך $\forall m \in \{0 \dots N\}. \varphi(a_m) = f(a_m)$ אזי $\varphi(x) = f(0) + N \sum_{k=0}^{N-1} (f(a_{k+1}) - 2f(a_k) + f(a_{k-1})) \max\{x - a_k, 0\}$.

למה: קיימות $p_n \in \mathbb{R}[x]$ עבורן $\lim_{n\to\infty} \max_{[-1,1]} |p_n(x) - |x|| = 0$.

משפט ויירשטראס: תהא $f \in C([a,b])$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי $\exists p \in \mathbb{R}[x]. \max_{[a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$.

משפט ויירשטראס: תהא $f \in C([a,b])$ אזי קיימות $p_n \in \mathbb{R}[x]$ עבורן $p_n \xrightarrow{u} f$.

הגדרה: תהא $f \in C([0,1])$ אזי $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

משפט: תהא $f \in C([0,1])$ אזי $B_n \xrightarrow{u} f$.

משפט מז'ורנטה: תהיינה $f_n \in R([a,\omega))$ עבורן $f_n \xrightarrow{u} f$ על $[a,b]$ ותהא $\Psi \in R([a,\omega))$ עבורה $\forall n \in \mathbb{N}. |f_n| \le \Psi$ אזי $\left(\int_a^\omega f = \lim_{n\to\infty} \int_a^\omega f_n\right) \wedge \left(\int_a^\omega f \text{ מתכנסת בהחלט}\right) \wedge \left(\forall b \in [a,\omega). f \in R([a,b])\right)$.

טענה: $\int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

משפט: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q \in \mathbb{R}$ ויהי $r < |q|$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על $[-|r|, |r|]$.

משפט אבל: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי קיים $R \in [0,\infty]$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\begin{cases} \text{מתכנס} & x \in (-R,R) \\ \text{מתבדר} & x \notin [-R,R] \end{cases}$.

רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי $R \in [0,\infty]$ המקיים את משפט אבל.

משפט קושי הדמר: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$.

הערה: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי $\left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)=0\right) \Longrightarrow (R=\infty)\right) \wedge \left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)=\infty\right) \Longrightarrow (R=0)\right)$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי (רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ הינו R)$\Longleftrightarrow$(רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ הינו R).

מסקנה: יהי $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ עם רדיוס R אזי $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ על $(-R,R)$.

משפט: יהי $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ עם רדיוס R ויהי $m \in \mathbb{N}$ אזי $f^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} a_{k+m} x^k$ על $(-R,R)$.

מסקנה טור טיילור של טור חזקות: יהי $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ עם רדיוס R אזי $P(f,0)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ על $(-R,R)$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־R אזי $\sum a_k x^k$ אינו מתכנס במ"ש על $[0,R)$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_k x^k$ אינו מתכנס במ"ש על $(-R,0]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות מתכנס ב־R אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס במ"ש על $[0,R]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס במ"ש על $[-R,0]$.

מסקנה: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < 0$ אזי $\lim_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי ($\sum k a_k x^{k-1}$ מתכנס ב־R)$\Longleftarrow$($\sum a_k x^k$ מתכנס ב־R).

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי ($\sum k a_k x^{k-1}$ מתכנס ב־$-R$)$\Longleftarrow$($\sum a_k x^k$ מתכנס ב־$-R$).

משפט: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{i=0}^{\infty}a_i$ מתכנס בהחלט ותהא $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חח"ע ועל אזי $\sum_{i=0}^{\infty}a_i=\sum_{i=0}^{\infty}a_{p(i)}$.

טענה מכפלות קושי: יהיו $p,q\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ תמורות ויהיו $\sum a_nx^n,\sum b_nx^n$ טורי חזקות מתכנסים בהחלט על I אזי $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)$.

סכים לפי אבל: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $(A)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\lim\limits_{r\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k$.

התכנסות צ'זארו: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $(C)\lim_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}a_i}{n}$.

סכים לפי צ'זארו: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $(C)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}a_i$.

סימון: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sigma_n\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\right)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}a_i$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ell$ אזי $(C)\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ell$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$ אזי $(C)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$.

משפט: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $(C)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$ אזי $(A)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$.

משפט טאובר: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $(A)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\rho$ וכן $a_k=o\left(\frac{1}{k}\right)$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\rho$.

משפט: יהי $\sum a_kz^k$ טור טור חזקות מרוכב המתכנס עבור $w\in\mathbb{C}$ ויהי $r<|w|$ אזי $\sum a_kz^k$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על $\overline{B}_r(0)$.

משפט אוילר: יהי $\theta\in\mathbb{R}$ אזי $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.

מסקנה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי

- $\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$.
- $\sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{C}^{[a,b]}$ אזי $\exists!u,v\in\mathbb{R}^{[a,b]}.f=u+iv$.

סימון: יהיו $u,v\in R([a,b])$ אזי $u+iv\in R([a,b])$.

אינטגרל: יהיו $u,v\in R_{\mathbb{R}}([a,b])$ אזי $\int_a^b(u+iv)=\int_a^bu+i\int_a^bv$.

טענה: תהיינה $f,g\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי

- $\int_a^b(f+g)=\int_a^bf+\int_a^bg$.
- $\int_a^bf=\int_a^cf+\int_c^bf$.
- $\int_a^bcf=c\int_a^bf$.
- $\int_a^b\overline{f}=\overline{\int_a^bf}$.

נגזרת: יהיו $u,v\in R_{\mathbb{R}}([a,b])$ אזי $\frac{d}{dx}(u+iv)=\frac{du}{dx}+i\cdot\frac{dv}{dx}$.

למה: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי $|f|\in R([a,b])$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ ותהא $x_0\in[a,b]$ נקודת רציפות של f אזי $\left(\int_a^xf(t)\,\mathrm{d}t\right)'(x_0)=f(x_0)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]$ אזי $\int_a^bf(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{C}^{[a,b]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי $\int_a^bf'g=[f\cdot g]|_a^b-\int_a^bfg'$.

מסקנה: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי $\left|\int_a^bf\right|\le\int_a^b|f|$.

פונקציה מחזורית: $f\in\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ עבורה $\exists T\in\mathbb{R}.\forall x\in\mathbb{R}.f(x+T)=f(x)$.

טורוס חד מימדי/מעגל: $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

סימון: $R(\mathbb{T})=\{f\in R([0,2\pi])\mid\forall x\in\mathbb{R}.f(x+2\pi)=f(x)\}$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $e_n(t)=e^{int}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $e_n(t)\in R(\mathbb{T})$.

פולינום טריגונומטרי: יהי $m\in\mathbb{N}$ ויהיו $\{c_n\}_{n=-m}^{m}\in\mathbb{C}$ אזי $\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n(t)$.

דרגה של פולינום טריגונומטרי: יהי $\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n(t)$ פולינום טריגומוטרי עבורו $(c_m\ne0)\vee(c_{-m}\ne0)$ אזי m.

טענה: $R(\mathbb{T})$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$.

הגדרה: יהיו $f,g\in R(\mathbb{T})$ אזי $\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$.

טענה: $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מכפלה פנימית על $C(\mathbb{T})$.

טענה: $\langle e_n,e_m\rangle=\begin{cases}0 & n\ne m\\ 1 & n=m\end{cases}$.

מקדם פורייה ה־m: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}(m)=\langle f,e_m\rangle$.

טענה: יהי $f\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}c_{n}e_{n}\left(t\right)$ פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}\left(k\right)=c_{k}$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $f\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)e_{n}\left(t\right)$.

מסקנה: יהיו f,g פולינומים טריגונומטריים אזי $\langle f,g\rangle=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)\overline{\hat{g}\left(n\right)}$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\|f\|^{2}=\sum_{n=-m}^{m}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^{2}$.

מקדם פורייה ה־m: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\hat{f}\left(m\right)=\langle f,e_{m}\rangle$.

פולינום פורייה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $\left(S_{m}f\right)\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)e_{n}\left(t\right)$.

טענה: תהא $f\in R_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\hat{f}\left(-n\right)=\overline{\hat{f}\left(n\right)}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי (f ממשית)$\Longleftarrow$($S_{m}f$ ממשית).

טענה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $|k|\le m$ אזי $\left(f-S_{m}f\right)\perp e_{k}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left(f-S_{m}f\right)\perp S_{m}f$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\|f\|^{2}=\|S_{m}f\|^{2}+\|f-S_{m}f\|^{2}$.

טענה אי־שיוויון בסל: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^{2}\le\|f\|^{2}$.

מסקנה הלמה של רימן ולבג: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\lim_{n\to\pm\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|=0$.

התכנסות בנורמת L_{2}: תהיינה $f_{n},g\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left(f_{n}\xrightarrow{L_{2}}g\right)\iff\left(\lim_{n\to\infty}\|f_{n}-g\|=0\right)$.

הערה: התכנסות בנורמת L_{2} איננה יחידה.

למה: תהא $g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\|g\|\le\sup|g|$.

מסקנה: תהיינה $f_{n}\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left(f_{n}\xrightarrow{u}f\right)\Longrightarrow\left(f_{n}\xrightarrow{L_{2}}f\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C_{\mathbb{C}}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיימת $p_{n}\in\mathbb{C}\left[x\right]$ עבורה $p_{n}\xrightarrow{L_{2}}f$.

משפט: תהא $f\in C_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{T}\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\sup_{t\in\left[0,2\pi\right]}\left|p\left(t\right)-f\left(t\right)\right|<\varepsilon$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\|p-f\|<\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי קיימיים p_{n} פולינומים טריגונומטריים עבורם $p_{n}\xrightarrow{L_{2}}f$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\lim_{m\to\infty}\|S_{m}f-f\|=0$.

שיוויון פרסבל: $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ עבורה $\|f\|^{2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^{2}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי מתקיים שיוויון פרסבל.

מסקנה: תהיינה $f,g\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ המקיימות $\forall n\in\mathbb{Z}.\hat{f}\left(n\right)=\hat{g}\left(n\right)$ אזי בכל נקודת רציפות של f,g מתקיים $f=g$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ יהי $m\in\mathbb{N}$ ויהיו $\left\{ c_{n}\right\} _{n=-m}^{m}\in\mathbb{C}$ אזי $\left\Vert f-\sum_{n=-m}^{m}c_{n}e_{n}\right\Vert ^{2}\ge\|f-S_{m}f\|^{2}$.

מסקנה: תהיינה $f_{m},g\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ עבורן $\|f_{m}-g\|\xrightarrow[m\to\infty]{}0$ אזי $\forall n\in\mathbb{Z}.\hat{f}_{m}\left(n\right)\xrightarrow[m\to\infty]{}\hat{g}\left(n\right)$.

טור פורייה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ עבורה $S_{N}f\xrightarrow{p.w.}g$ באשר $g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(n\right)e^{int}$.

מסקנה: תהא $f\in C\left(\mathbb{T}\right)$ עבורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|<\infty$ אזי $S_{N}f\xrightarrow{u}f$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[-\pi,\pi\right)}$ המוגדרת $f\left(t\right)=t$ נמשיכה מחזורית על $\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\forall n\in\mathbb{N}_{+}.\hat{f}\left(n\right)=\frac{\left(-1\right)^{n}i}{n}\right)\wedge\left(\hat{f}\left(0\right)=0\right)$.
- $S_{m}f\left(t\right)=\sum_{n=1}^{m}\frac{2\left(-1\right)^{n+1}\sin\left(nt\right)}{n}$.
- יהי $r\in\left[0,\pi\right)$ אזי $S_{m}f\xrightarrow{u}f$ על $\left[-r,r\right]$.
- $f\xrightarrow{p.w.}S_{m}f$ על $\left(-\pi,\pi\right)$.

מסקנה: $\frac{\pi^{2}}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$.

מסקנה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[0,2\pi\right]}$ המוגדרת $f\left(t\right)=\frac{\left(\pi-t\right)^{2}}{4}$ נמשיכה מחזורית על $\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\forall n\in\mathbb{N}_{+}.\hat{f}\left(n\right)=\frac{1}{2n^{2}}\right)\wedge\left(\hat{f}\left(0\right)=\frac{\pi^{2}}{12}\right)$.
- $S_{m}f\left(t\right)=\frac{\pi^{2}}{12}+\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos\left(nt\right)}{n^{2}}$.
- $f\xrightarrow{u}S_{m}f$ על $\left[0,2\pi\right]$.

מסקנה: $\frac{\pi^{4}}{90}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4}}$.

מסקנה: $\frac{\pi^{2}}{12}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}}{k^{2}}$.

טענה: יהי $\alpha \notin \mathbb{Z}$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}$.

למה: תהא $f \in C^1(\mathbb{T})$ אזי $\widehat{f'}(n) = in\hat{f}(n)$.

מסקנה: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ אזי $S_m(f') = (S_m f)'$.

למה: תהא $f \in C^k(\mathbb{T})$ אזי $\widehat{f^{(k)}}(n) = i^k n^k \hat{f}(n)$.

מסקנה: תהא $f \in C^k(\mathbb{T})$ אזי $\lim_{n\to\infty} n^k \hat{f}(n) = 0$.

משפט: תהא $f \in C(\mathbb{T})$ המקיימת $\lim_{n\to\infty} n^k \hat{f}(n) = 0$ אזי $f \in C^{k-2}(\mathbb{T})$.

מסקנה: תהא $f \in C^1(\mathbb{T})$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right| < \infty$.

מסקנה: תהא $f \in C^1(\mathbb{T})$ אזי $S_m f \xrightarrow{u} f$.

תנאי ליפשיץ מקומי: תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אזי $a \in \mathbb{R}$ עבורה $\exists\delta > 0.\exists M > 0.\forall x \in (a-\delta, a+\delta).|f(x) - f(a)| < M|x-a|$.

הערה: יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהא $f \in C^1((a-\delta, a+\delta))$ אזי f מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי ב־a.

משפט: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ ותהא $a \in \mathbb{T}$ עבורן f מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי ב־a אזי $S_N f(a) \xrightarrow[N\to\infty]{} f(a)$.

קונבולוציה: תהיינה $f, g \in R(\mathbb{T})$ אזי $(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) g(x-t)\,\mathrm{d}t$.

טענה: תהיינה $f, g \in R(\mathbb{T})$ אזי

- $f * g = g * f$.
- $f * (g + h) = f * g + f * h$.
- $(cf) * g = c(f * g)$.
- $(f * g) * h = f * (g * h)$.
- $f * g \in C(\mathbb{T})$.
- $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n) \cdot \widehat{g}(n)$.

גרעין דיריכלה: נגדיר $D_N \in R(\mathbb{T})$ כך $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$.

למה: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ אזי $D_N * f = S_N f$.

למה: יהי $n \in \mathbb{Z}$ אזי $\widehat{D_N}(n) = \begin{cases} 1 & |n| \le N \\ 0 & |n| > N \end{cases}$.

למה: יהי $y \in [-\pi, \pi]$ אזי $|D_N(y)| \le 2N + 1$.

למה: יהי $y \in [-\pi, \pi]$ אזי $D_N(y) = \begin{cases} 2N+1 & y=0 \\ \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)y\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} & y \ne 0 \end{cases}$.

מסקנה: D_N זוגית ממשית וכן מתקיים $(D_N(y) = 0) \iff \left(y \in \left\{\frac{2\pi k}{2N+1} \mid k \in \{-N, \dots, N\}\right\}\right)$.

למה: D_N בעלת N מינימום מקומיים וכן $N+1$ מקסימום מקומיים.

למה: יהי $y \in [-\pi, \pi]$ אזי $|D_N(y)| \le \left|\frac{1}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}\right|$.

מסקנה: יהי $y \in [-\pi, \pi]$ אזי $|D_N(y)| \le \frac{\pi}{|y|}$.

טענה: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(y)\,\mathrm{d}y = 1$.

טענה: $\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(y)|\,\mathrm{d}y \ggg 1$.

סכומי פייר: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ אזי $(\sigma_N f)(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n f(x)$.

גרעין פייר: נגדיר $F_N \in R(\mathbb{T})$ כך $F_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(x)$.

למה: יהי $y \in [-\pi, \pi]$ אזי $F_N(y) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)y\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}\right)^2$.

למה: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(y)\,\mathrm{d}y = 1$.

למה: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ אזי $\sigma_N f = f * F_N$.

למה: יהי $n \in \mathbb{Z}$ אזי $\widehat{F_N}(n) = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N+1} & |n| \le N \\ 0 & |n| > N \end{cases}$.

למה: יהי $\delta > 0$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי קיים $N_0 \in \mathbb{N}$ עבורו לכל $N \ge N_0$ מתקיים $\int_{-\pi}^{-\delta} F_N(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\delta}^{\pi} F_N(x)\,\mathrm{d}x \le \varepsilon$.

משפט פייר: תהא $f \in C(\mathbb{T})$ אזי $\sigma_N f \xrightarrow{u} f$.

משפט פייר: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ ותהא $a \in [-\pi, \pi]$ בה f רציפה מימין ומשמאל אזי $\sigma_N f(a) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{\lim_{x\to a^+} f(x) + \lim_{x\to a^-} f(x)}{2}$.

מסקנה: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ ותהא $a \in [-\pi, \pi]$ בה f רציפה מימין ומשמאל וכן $S_N f(a) \to \ell$ אזי $\ell = \frac{\lim_{x\to a^+} f(x) + \lim_{x\to a^-} f(x)}{2}$.

מסקנה: $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ צפופים במ״ש ב־$C(\mathbb{T})$.

טענה: $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

מטריקה/מרחק: תהא A קבוצה אזי $d:A^{2}\to[0,\infty)$ המקיימת
- חיוביות: $\forall x,y\in A.d\left(x,y\right)\ge0$.
- חיוביות ממש: $\forall x,y\in A.\left(d\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(x=y\right)$.
- סימטריות: $\forall x,y\in A.d\left(x,y\right)=d\left(y,x\right)$.
- אי־שיוויון המשולש: $\forall x,y,z\in A.d\left(x,y\right)\le d\left(x,z\right)+d\left(z,y\right)$.

מרחב מטרי: תהא X קבוצה ותהא $d:X^{2}\to[0,\infty)$ מטריצה אזי $\left(X,d\right)$.

גבול: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי תהא $a\in X^{\mathbb{N}}$ ותהא $L\in X$ עבורן $d\left(a_{n},L\right)\to0$ אזי $a_{n}\to L$.

טענה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי תהא $a\in X^{\mathbb{N}}$ ויהיו $L_{1},L_{2}\in X$ עבורם $\left(a_{n}\to L_{1}\right)\wedge\left(a_{n}\to L_{2}\right)$ אזי $L_{1}=L_{2}$.

מרחק מנהטן: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $d_{1}\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}-y_{i}\right|$.

סימון: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^{n}$ נגדיר $d_{p}\left(x,y\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}-y_{i}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$ אזי $\ell_{p}^{n}=\left(\mathbb{R}^{n},d_{p}\right)$.

טענה: ℓ_{p}^{n} מרחב מטרי.

מרחק יוניפורמי: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $d_{\infty}\left(x,y\right)=\max_{i=1}^{n}\left|x_{i}-y_{i}\right|$.

סימון: $\ell_{\infty}^{n}=\left(\mathbb{R}^{n},d_{\infty}\right)$.

טענה: ℓ_{∞}^{n} מרחב מטרי.

סימון: יהיו $f,g\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ נגדיר $d\left(f,g\right)=\sup\left|f-g\right|$ אזי $C\left(\left[a,b\right]\right)=\left(C\left(\left[a,b\right]\right),d\right)$.

טענה: $C\left(\left[a,b\right]\right)$ מרחב מטרי.

סימון: יהיו $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ נגדיר $d\left(f,g\right)=\sqrt{\int_{a}^{b}\left|f-g\right|^{2}}$ ונגדיר יחס שקילות $\left(f\sim g\right)\iff\left(d\left(f,g\right)=0\right)$ אזי $L_{2}\left(\left[a,b\right]\right)=\left(\nicefrac{R\left(\left[a,b\right]\right)}{\sim},d\right)$.

טענה: $L_{2}\left(\left[a,b\right]\right)$ מרחב מטרי.

טענה: יהי V מ"ו ותהא $\nu:V\to[0,\infty)$ נורמה על V נגדיר $d\left(x,y\right)=\nu\left(x-y\right)$ אזי $\left(V,d\right)$ מרחב מטרי.

נורמת ℓ_{p}^{n}: יהי $x\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left\Vert x\right\Vert _{p}=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$.

נורמת ℓ_{∞}^{n}: יהי $x\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left\Vert x\right\Vert _{\infty}=\max_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|$.

למה: יהי $x\in\mathbb{R}^{n}$ אזי
- $\left\Vert x\right\Vert _{\infty}\le\left\Vert x\right\Vert _{2}\le\sqrt{n}\left\Vert x\right\Vert _{\infty}$.
- $\left\Vert x\right\Vert _{2}\le\left\Vert x\right\Vert _{1}\le\sqrt{n}\left\Vert x\right\Vert _{2}$.

מסקנה: תהא $\left\{ x^{(m)}\right\} \subseteq\mathbb{R}^{n}$ סדרה ותהא $y\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left(\lim_{m\to\infty}\left\Vert x^{(m)}-y\right\Vert _{2}=0\right)\iff\left(\forall i\in\left[n\right].\lim_{m\to\infty}x_{i}^{(m)}=y_{i}\right)$.

כדור פתוח: יהי $a\in X$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_{r}\left(a\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}\mid d\left(x,a\right)<r\right\}$.

כדור סגור: יהי $a\in X$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_{r}\left(a\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}\mid d\left(x,a\right)\le r\right\}$.

ספירה: יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $S_{r}\left(a\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}\mid d\left(x,a\right)=r\right\}$.

נקודה פנימית: תהא $A\subseteq X$ אזי $x\in A$ המקיימת $\exists r>0.B_{r}\left(x\right)\subseteq A$.

פנים של קבוצה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\text{int}\left(A\right)=\mathring{A}=\left\{ x\in A\mid A\text{ נקודה פנימית של }x\right\}$.

קבוצה פתוחה: קבוצה $A\subseteq X$ עבורה $A=\text{int}\left(A\right)$.

למה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\text{int}\left(\text{int}\left(A\right)\right)=\text{int}\left(A\right)$.

משפט: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי אזי
- יהיו $\left\{ A_{i}\right\}$ פתוחות אזי $\bigcup A_{i}$ פתוחה.
- יהיו $\left\{ A_{i}\right\} _{i=0}^{n}$ פתוחות אזי $\bigcap A_{i}$ פתוחה.
- $\varnothing,X$ פתוחות.

סביבה: יהי $a\in X$ אזי $A\subseteq X$ פתוחה עבורה $a\in A$.

טענה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\text{int}\left(A\right)=\bigcup\left\{ B\subseteq A\mid\text{פתוחה }B\right\}$.

קבוצה סגורה: קבוצה $A\subseteq X$ עבורה $X\backslash A$ פתוחה.

נקודת סגור: תהא $A\subseteq X$ אזי $a\in X$ עבורה $\forall r>0.B_{r}\left(a\right)\cap A\neq\varnothing$.

סגור של קבוצה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\text{cl}\left(A\right)=\overline{A}=\left\{ a\in X\mid A\text{ נקודת סגור של }a\right\}$.

משפט: תהא $A\subseteq X$ אזי $\left(\text{סגורה }A\right)\iff\left(A=\overline{A}\right)$.

למה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\overline{A}=X\backslash\text{int}\left(X\backslash A\right)$ וכן $\text{int}\left(A\right)=X\backslash\overline{\left(X\backslash A\right)}$.

טענה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\overline{A}=\bigcap\left\{ A\subseteq B\mid\text{סגורה }B\right\}$.

משפט: תהא $X \supseteq A$ ותהא $a \in X$ אזי ($a \in \overline{A}$)$\Longleftrightarrow$(קיימת סדרה $x_n \in A$ עבורה $x_n \to a$).

נקודת הצטברות: תהא $A \subseteq X$ אזי $a \in X$ המקיימת $\forall r > 0. \left(B_r\left(a\right) \setminus \left\{a\right\}\right) \cap A \neq \varnothing$.

טענה: תהא $A \subseteq X$ ותהא $a \in X$ אזי (a הצטברות של A)$\Longleftrightarrow$(קיימת סדרה $x_n \in A \setminus \left\{a\right\}$ עבורה $x_n \to a$).

שפה של קבוצה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus \mathrm{int}\left(A\right)$.

קבוצה צפופה: קבוצה $Y \subseteq X$ עבורה $\overline{Y} = X$.

טענה: תהא $Y \subseteq X$ אזי (Y צפופה)$\Longleftrightarrow$(לכל $A \subseteq X$ פתוחה באשר $A \neq \varnothing$ מתקיים $Y \cap A \neq \varnothing$).

מרחב מטרי ספרבילי: מרחב מטרי $\left(X, d\right)$ עבורו קיימת $Y \subseteq X$ צפופה לכל היותר בת מנייה.

קבוצה חסומה: קבוצה $A \subseteq X$ עבורה $\exists r > 0. \exists a \in X. A \subseteq B_r\left(a\right)$.

קוטר של קבוצה: תהא $A \subseteq X$ חסומה אזי $\mathrm{diam}\left(A\right) = \sup\left\{d\left(x, y\right) \mid x, y \in A\right\}$.

טענה: תהא $\left\{x^{(m)}\right\} \subseteq \mathbb{R}^n$ סדרה חסומה אזי קיימת תת סדרה $x^{(m_j)}$ מתכנסת.

מסקנה: לכל קבוצה חסומה ואינסופית קיימת נקודת הצטברות.

סדרת קושי: סדרה $\left\{x_n\right\} \subseteq X$ המקיימת $\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall k, m \geq N. d\left(x_k, x_m\right) < \varepsilon$.

למה: סדרת קושי הינה חסומה.

טענה: סדרה מתכנסת הינה סדרת קושי.

מרחב מטרי שלם: מרחב מטרי $\left(X, d\right)$ עבורו כל סדרת קושי מתכנסת.

משפט: $\mathbb{R}^n$ סטנדרטי שלם, $C\left(\left[a, b\right]\right)$ שלם, ℓ_2 שלם.

טענה: יהי $\left(X, d\right)$ מרחב מטרי שלם ותהא $Y \subseteq X$ אזי ($\left(Y, d\right)$ שלם)$\Longleftrightarrow$(Y סגורה).

מרחבים מטריים איזומטריים: מרחבים מטריים $\left(X, d\right), \left(Y, \rho\right)$ עבורם קיימת $f : X \to Y$ חח"ע ועל המקיימת $\forall x, y \in X. d\left(x, y\right) = d\left(\left(x\right), f\left(y\right)\right)$.

השלמה של מרחב מטרי: יהי $\left(X, d\right)$ מרחב מטרי אזי $\left(Y, \rho\right)$ מרחב מטרי שלם עבורו $Y \subseteq X$ צפופה וכן $\rho_{\restriction_{X^2}} = d$.

משפט: לכל מרחב מטרי קיימת השלמה.

טענה: יהי $\left(X, d\right)$ מרחב מטרי בעל השלמות $\left(Y, \rho\right), \left(Z, \zeta\right)$ אזי $\left(Y, \rho\right), \left(Z, \zeta\right)$ איזומטריים.

נקודת שבת: תהא $f : X \to X$ אזי $a \in X$ עבורה $f\left(x\right) = x$.

העתקה מכווצת: יהי $\left(X, d\right)$ מרחב מטרי אזי $A \in \mathrm{Hom}\left(X\right)$ עבורה קיים $1 > \lambda$ המקיים $\forall x, y \in X. d\left(Ax, y\right) \leq \lambda d\left(x, y\right)$.

משפט נקודת השבת של בנך: יהי $\left(X, d\right)$ מרחב מטרי ותהא $A \in \mathrm{Hom}\left(X\right)$ העתקה מכווצת אזי קיים ויחיד $x \in X$ עבורו $Ax = x$.

מסקנה: יהי $\left(X, d\right)$ מרחב מטרי תהא $A \in \mathrm{Hom}\left(X\right)$ העתקה מכווצת ותהא $x \in X$ עבורה $Ax = x$ אזי לכל $y \in X$ מתקיים $x = \lim_{n \to \infty} A^n z$.

מסקנה: יהי $\left(X, d\right)$ מרחב מטרי תהא $A \in \mathrm{Hom}\left(X\right)$ העתקה מכווצת ותהא $x \in X$ עבורה $Ax = x$ אזי לכל $y \in X$ מתקיים $d\left(A^n y, x\right) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d\left(y, Ay\right)$.

כיסוי פתוח: יהי $\left(X, d\right)$ מרחב מטרי ותהא $A \subseteq X$ אזי קבוצות $\left\{A_\alpha\right\}_{\alpha \in I}$ עבורן $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$.

מרחב קומפקטי: מרחב מטרי $\left(X, d\right)$ עבורו לכל $\left\{A_\alpha\right\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של X קיימות $\left\{\beta_i\right\}_{i=1}^m \in I$ עבורן $X = \bigcup_{i=1}^m A_{\beta_i}$.

קבוצה קומפקטית: יהי $\left(X, d\right)$ מרחב מטרי אזי $B \subseteq X$ עבורו $\left(B, d\right)$ מרחב קומפקטי.

טענה קבוצה פתוחה יחסית: יהי $\left(X, d\right)$ מרחב מטרי ותהא $Y \subseteq X$ אזי ($U \subseteq Y$ פתוחה ב־$\left(Y, d\right)$)$\Longleftrightarrow$(קיימת $V \subseteq X$ פתוחה עבורה $U = V \cap Y$).

טענה קבוצה סגורה יחסית: יהי $\left(X, d\right)$ מרחב מטרי ותהא $Y \subseteq X$ אזי ($U \subseteq Y$ סגורה ב־$\left(Y, d\right)$)$\Longleftrightarrow$(קיימת $V \subseteq X$ סגורה עבורה $U = V \cap Y$).

טענה: תהא $K \subseteq X$ קומפקטית אזי K חסומה וכן K סגורה.

טענה: יהי $\left(X, d\right)$ מרחב מטרי אזי ($\left(X, d\right)$ קומפקטי)$\Longleftrightarrow$(לכל סדרה יורדת $\left\{K_i\right\}_{i=1}^\infty \subseteq X$ סגורות לא ריקות אזי $\bigcap_{i=1}^\infty K_i \neq \varnothing$).

קומפקטיות סדרתית: מרחב מטרי $\left(X, d\right)$ עבורו לכל סדרה קיימת תת סדרה מתכנסת.

משפט: יהי $\left(X, d\right)$ מרחב מטרי אזי ($\left(X, d\right)$ קומפקטי)$\Longleftrightarrow$($\left(X, d\right)$ קומפקטי סדרתית).

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי (A קומפקטית)$\Longleftrightarrow$(A סגורה וחסומה).

מרחב פרה־קומפקטי: מרחב מטרי $\left(X, d\right)$ עבורו לכל סדרה יש תת סדרה קושי.

אוסף פונקציות רציף במידה אחידה: סדרה $\left\{f_n\right\} \subseteq C\left(\left[a, b\right]\right)$ המקיימת $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall n \in \mathbb{N}. \forall s, t \in \left[a, b\right]. \left|s - t\right| < \delta \Longrightarrow \left|f_n\left(s\right) - f_n\left(t\right)\right| < t$.

משפט: תהא $\left\{f_n\right\} \subseteq C\left(\left[a, b\right]\right)$ סדרה אזי ($\left\{f_n\right\}$ פרה־קומפקטית)$\Longleftrightarrow$($\left\{f_n\right\}$ חסומה במ"ש ורציפה במידה אחידה).

גבול: יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים תהא $f:X\to Y$ תהא $a\in X$ ותהא $L\in Y$ אזי
- קושי: $\left(\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in B\left(a,\delta\right).f\left(x\right)\in B\left(L,\varepsilon\right)\right)\Longleftrightarrow\left(\lim_{x\to a}f\left(x\right)=L\right)$.
- היינה: $\left(\forall x\in\left(X\backslash\left\{a\right\}\right)^{\mathbb{N}}.\left(x_{k}\to a\right)\Longrightarrow\left(f\left(x_{k}\right)\to L\right)\right)\Longleftrightarrow\left(\lim_{x\to a}f\left(x\right)=L\right)$.

רציפות בנקודה: יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים ותהא $f:X\to Y$ אזי $a\in X$ עבורה $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=f\left(a\right)$.

משפט: יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים ותהא $f:X\to Y$ אזי (f רציפה)$\Longleftrightarrow$(לכל $U\subseteq Y$ פתוחה מתקיים $f^{-1}\left(U\right)$ פתוחה).

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $f:X\to\mathbb{R}^{m}$ אזי (f רציפה)$\Longleftrightarrow$(לכל $i\in[m]$ מתקיים כי f_{i} רציפה).

רציפות במידה שווה: יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים ותהא $A\subseteq X$ אזי $f:A\to Y$ עבורה $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x,y\in A.\left(d\left(x,y\right)<\delta\right)\Longrightarrow\left(\rho\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)<\varepsilon\right)$.

משפט: תהיינה $f,g:X\to\mathbb{R}^{n}$ רציפות ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\alpha f+\beta g$ רציפה וכן $\langle f,g\rangle$ רציפה.

משפט רציפות ההרכבה: יהיו $(X,d),(Y,\rho),(Z,\eta)$ מרחבים מטריים תהא $a\in X$ תהא $f:X\to Y$ רציפה על a ותהא $g:f\left(X\right)\to Z$ רציפה על $f\left(a\right)$ אזי $g\circ f$ רציפה על a.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי יהי (Y,ρ) מרחב מטרי ותהא $f:X\to Y$ רציפה אזי $f\left(X\right)$ קומפקטית.

משפט: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי ((X,d) קומפקטי)$\Longleftrightarrow$(כל $f\in C\left(X,\mathbb{R}\right)$ הינה חסומה).

משפט קנטור: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי יהי (Y,ρ) מרחב מטרי ותהא $f:X\to Y$ רציפה אזי f רציפה במ"ש.

משפט ווירשטראס: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי ותהא $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה אזי קיימים $a,b\in X$ עבורם $f\left(X\right)=\left[f\left(a\right),f\left(b\right)\right]$.

מסקנה: תהיו $\nu,\eta:X\to\mathbb{R}$ נורמות אזי קיימים $c,C\in\mathbb{R}$ עבורם $c\nu\le\eta\le C\nu$.

מסילה: פונקציה $\gamma\in C\left(\left[a,b\right],X\right)$.

מסילה סגורה: מסילה $\gamma:\left[a,b\right]\to X$ עבורה $\gamma\left(a\right)=\gamma\left(b\right)$.

מסילה פשוטה: מסילה $\gamma:\left[a,b\right]\to X$ עבורה $\gamma_{\restriction_{\left(a,b\right]}},\gamma_{\restriction_{\left[a,b\right)}}$ חח"ע.

המסילה ההפוכה: תהא $\gamma:\left[0,1\right]\to X$ מסילה אזי $-\gamma:\left[0,1\right]\to X$ המוגדרת $-\gamma\left(t\right)=\gamma\left(1-t\right)$.

מרחב מטרי קשיר מסילתית: מרחב מטרי (X,d) עבורו לכל $x,y\in X$ קיימת עקומה $\gamma:\left[0,1\right]\to X$ המקיימת $\gamma\left(0\right)=x$ וכן $\gamma\left(1\right)=y$.

משפט תכונת דרבו: יהי (X,d) מרחב מטרי קשיר מסילתית תהא $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה יהיו $x,y\in X$ ותהא $c\in\mathbb{R}$ עבורה $f\left(x\right)<c<f\left(y\right)$ אזי קיים $z\in X$ עבורו $f\left(z\right)=c$.

תחום: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה וקשירה מסילתית.

מרחב מטרי קשיר: מרחב מטרי (X,d) עבורו הקבוצות היחידות שפתוחות וסגורות במקביל הן $X,\varnothing$.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי ((X,d) קשיר מסילתית)$\Longrightarrow$((X,d) קשיר).

טענה: תהא $A\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}^{m}\right)$ אזי A רציפה.

טענה: תהיינה $A,B\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $\left\Vert AB\right\Vert\le\left\Vert A\right\Vert\cdot\left\Vert B\right\Vert$.

מסקנה: תהא $A\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left\Vert A^{k}\right\Vert\le\left\Vert A\right\Vert^{k}$.

משפט: תהא $A\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ונגדיר $f\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ כך $f\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{k}}{k!}x$ אזי f רציפה.

אקספוננט: תהא $A\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ נגדיר $e^{A}\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ כך $e^{A}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{k}}{k!}$.

מסקנה: תהא $A\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי e^{A} מתכנסת וכן $\left\Vert e^{A}\right\Vert\le e^{\left\Vert A\right\Vert}$.

הגדרה: תהא $\eta:[0,1]\to[0,1]^{2}$ מסילה אזי נגדיר מסילה $\Phi\eta:[0,1]\to[0,1]^{2}$ כך $\Phi\eta=\begin{cases}\frac{1}{2}(\eta_{2}(4t),\eta_{1}(4t)) & 0\le t\le\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}(\eta_{1}(4t-1),\eta_{2}(4t-1))+\left(0,\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{4}\le t\le\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}(\eta_{1}(4t-2),\eta_{2}(4t-2))+\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2}\le t\le\frac{3}{4}\\ \frac{1}{2}(-\eta_{2}(4t-3),-\eta_{1}(4t-3))+\left(1,\frac{1}{2}\right) & \frac{3}{4}\le t\le1\end{cases}$.

נורמה של עקומה: תהא $\gamma:\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]^{2}$ עקומה אזי $\left\Vert\gamma\right\Vert_{\infty}=\max_{t\in[0,1]}\left\Vert\gamma\left(t\right)\right\Vert$.

מרחק של עקומות: תהיינה $\gamma,\eta:\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]^{2}$ עקומות אזי $d\left(\gamma,\eta\right)=\left\Vert\gamma-\eta\right\Vert_{\infty}$.

טענה: תהיינה $\gamma,\eta:\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]^{2}$ עקומות אזי $d\left(\Phi\gamma,\Phi\eta\right)=\frac{1}{2}d\left(\gamma,\eta\right)$.

עקום פביאנו: תהא $\gamma:\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]^{2}$ עקומה אזי $\gamma_{\infty}=\lim_{n\to\infty}\Phi^{n}\gamma$.

טענה: תהא $\gamma:\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]^{2}$ עקומה אזי γ_{∞} רציפה וכן $\gamma_{\infty}\left(\left[0,1\right]\right)$ קומפקטית.

משפט: תהא $\gamma:\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]^{2}$ עקומה אזי $\gamma_{\infty}\left(\left[0,1\right]\right)$ צפופה ב־$\left[0,1\right]^{2}$.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי יהי (Y,ρ) מרחב מטרי ותהא $f:X\to Y$ רציפה חח"ע ועל אזי (Y,ρ) קומפקטי וכן f^{-1} רציפה.

טענה: לא קיימת פונקציה רציפה חח"ע ועל ב־$\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]^{2}$.

עקומה פוליגונלית: עקומה לינארית למקוטעין.

אורך עקומה פוליגונלית: תהא γ עקומה פוליגונלית בעלת חלקים לינאריים בקטעים $[\gamma(t_{i-1}),\gamma(t_i)]$ אזי $L(\gamma)=\sum_{i=1}^{M}\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|$.

מסקנה: תהא γ עקומה פוליגונלית אזי $L(\gamma)=\int_0^1\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$.

עקומה בעלת אורך ביחס לחלוקה: תהא Π חלוקה של $[a,b]$ אזי עקומה γ עבורה קיים חסם עליון לאורך של עקומה פוליגונלית בין הנקודות $\{\gamma(t_i)\}$.

טענה: תהא $\gamma\in C^1([a,b],\mathbb{R}^m)$ עקומה אזי $L(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$.