נקודה צפה: יהי $\beta \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ בסיס יהי $t \in \mathbb{N}_+$ ויהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $a_1 \ldots a_t \in \mathbb{Z}$ באשר $a_1 \neq 0$ וכן $p \in \mathbb{Z}$ וכן $\sigma \in \{\pm 1\}$ עבורם $x = \sigma \cdot \left(\sum_{i=1}^{t} \frac{a_i}{\beta^i}\right) \cdot \beta^p$.

סימון: יהי $\beta \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ בסיס יהי $t \in \mathbb{N}_+$ ויהי $x \in \mathbb{R}$ עבורו $x = \sigma \cdot \left(\sum_{i=1}^{t} \frac{a_i}{\beta^i}\right) \cdot \beta^p$ ייצוג בנקודה צפה אזי σ.

מנטיסה/ספרות משמעותיות: יהי $\beta \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ בסיס יהי $t \in \mathbb{N}_+$ ויהי $x \in \mathbb{R}$ עבורו $x = \sigma \cdot \left(\sum_{i=1}^{t} \frac{a_i}{\beta^i}\right) \cdot \beta^p$ ייצוג בנקודה צפה אזי $(a_1 \ldots a_t)$.

הגבלה על החזקה בנקודה צפה: יהי $\beta \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ בסיס יהי $t \in \mathbb{N}_+$ ויהיו $L, U \in \mathbb{Z}$ עבורן בייצוג נקודה צפה $U < p < L$.

טענה: יהי $\beta \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ בסיס יהי $t \in \mathbb{N}_+$ יהיו $L, U \in \mathbb{Z}$ הגבלה על החזקה ויהי $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ מספר בעל ייצוג נקודה צפה אזי $\beta^{L-1} < |x| < \beta^U$.

גלישה: יהי $\beta \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ בסיס יהיו $L, U \in \mathbb{Z}$ הגבלה על החזקה ויהי $x \in \mathbb{R}$ אזי

- overflow: $|x| \geq \beta^U$.
- underflow: $|x| \leq \beta^{L-1}$.

קיצוץ נקודה צפה: יהי $\beta \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ בסיס יהי $t \in \mathbb{N}_+$ ויהי $x \in \mathbb{R}$ בעל הצגה $x = \sigma \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\beta^i}\right) \cdot \beta^p$ בבסיס β אזי $\mathrm{fl}(x) = \sigma \cdot \left(\sum_{i=1}^{t} \frac{a_i}{\beta^i}\right) \cdot \beta^p$.

עיגול נקודה צפה: יהי $\beta \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ בסיס יהי $t \in \mathbb{N}_+$ ויהי $x \in \mathbb{R}$ בעל הצגה $x = \sigma \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\beta^i}\right) \cdot \beta^p$ בבסיס β אזי

$$\mathrm{fl}(x) = \begin{cases} \sigma \cdot \left(\sum_{i=1}^{t} \frac{a_i}{\beta^i}\right) \cdot \beta^p & 0 \leq a_{t+1} < \frac{\beta}{2} \\ \sigma \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^{t} \frac{a_i}{\beta^i}\right) + \frac{1}{\beta^t}\right) \cdot \beta^p & \frac{\beta}{2} \leq a_{t+1} < \beta \end{cases}.$$

סימון: יהי $\beta \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ בסיס יהי $t \in \mathbb{N}_+$ ויהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $\tilde{x} = \mathrm{fl}(x)$.

שגיאה: יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $e(x) = x - \mathrm{fl}(x)$.

שגיאה מוחלטת: יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $|e(x)|$.

שגיאה יחסית: יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $\delta(x) = \frac{e(x)}{x}$.

מסקנה: יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $\mathrm{fl}(x) = x(1 - \delta(x))$.

טענה: יהי $\beta \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ בסיס יהי $t \in \mathbb{N}_+$ ויהי $x \in \mathbb{R}$ בעל ייצוג בקיצוץ נקודה צפה אזי $|\delta(x)| \leq \beta^{-t+1}$.

טענה: יהי $\beta \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ בסיס יהי $t \in \mathbb{N}_+$ ויהי $x \in \mathbb{R}$ בעל ייצוג בעיגול נקודה צפה אזי $|\delta(x)| \leq \frac{1}{2}\beta^{-t+1}$.

טענה: יהיו $x, y \in \mathbb{R}$ אזי $|e(x+y)| \leq |e(x)| + |e(y)|$.

מסקנה: יהיו $x, y \in \mathbb{R}$ בעלי סימן זהה אזי $|\delta(x+y)| \leq |\delta(x)| + |\delta(y)|$.

טענה: יהיו $x, y \in \mathbb{R}$ בעלי סימן זהה אזי $|\delta(x+y)| \leq \max\{|\delta(x)|, |\delta(y)|\}$.

טענה: יהיו $x, y \in \mathbb{R}$ אזי $|\delta(x-y)| \leq \left|\frac{e(x)}{x-y}\right| + \left|\frac{e(y)}{x-y}\right|$.

טענה: יהיו $x, y \in \mathbb{R}$ אזי $|\delta(xy)| \leq |\delta(x)| + |\delta(y)| + |\delta(x)\delta(y)|$.

טענה: יהיו $x, y \in \mathbb{R}$ אזי $\left|e\left(\frac{x}{y}\right)\right| \leq \frac{|x||e(y)|+|y||e(x)|}{|y \cdot \mathrm{fl}(y)|}$.

טענה: יהיו $x, y \in \mathbb{R}$ אזי $\left|\delta\left(\frac{x}{y}\right)\right| \leq \left|\frac{y}{\mathrm{fl}(y)}\right| (|\delta(x)| + |\delta(y)|)$.

אלגוריתם שיטת החצייה: יהי ε תהא $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה ויהיו $a_0 < b_0$ עבורם $f(a_0) f(b_0) < 0$ אזי

```
function BisectionMethod(a_0, b_0, ε):
    n ← 0
    while (b_0 − a_0)/2^(n+1) ≥ ε do
        m_n ← (a_n + b_n)/2
        if f(m_n) = 0 then
            return m_n
        else if f(a_n) f(m_n) < 0 then
            (a_{n+1}, b_{n+1}) ← (a_n, m_n)
            n ← n + 1
        else if f(m_n) f(b_n) < 0 then
            (a_{n+1}, b_{n+1}) ← (m_n, b_n)
            n ← n + 1
    end
```

טענה: יהי ε תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ויהיו $a<b$ עבורם $f(a)f(b)<0$ אזי קיים שורש $\alpha\in[a,b]$ של f עבורו $|\text{BisectionMethod}(a,b,\varepsilon)-q|<\varepsilon$.

סימון: תהא $\{x_n\}\subseteq\mathbb{R}$ עבורה $x_n\to\alpha$ אזי $e_n=\alpha-x_n$.

טענה: תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בעלת שורש יחיד α אזי באלגוריתם החצייה $m_n\to\alpha$ וכן $|\alpha-m_n|\le\frac{b-a}{2^{n+1}}$.

סדר התכנסות: תהא $\{x_n\}\subseteq\mathbb{R}$ עבורה $x_n\to\alpha$ אזי $p\in\mathbb{R}_+$ עבורו $0<\liminf_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p}<\infty$.

מסקנה: סדר ההתכנסות של שיטת החצייה היא לינארית.

טענה: תהא f גזירה ברציפות בעלת שורש פשוט α וכן $f(x_n)=f(\alpha)+f'(\zeta_n)e_n$ טור טיילור שלה אזי $e_n=\frac{f(x_n)}{f'(\zeta_n)}$.

מסקנה: יהי ε_M דיוק המכונה ותהא f גזירה ברציפות בעלת שורש פשוט α וכן $f(x_n)=f(\alpha)+f'(\zeta_n)e_n$ טור טיילור שלה וכן $|f(x_n)|\le\varepsilon_M$ אזי $|e_n|\le\left|\frac{2\varepsilon_M}{f'(\zeta_n)}\right|$.

מספר המצב: תהא f גזירה ברציפות בעלת שורש α מסדר שני אזי $\lim_{x\to\alpha}\left|\frac{f(x)}{xf'(x)}\right|$.

שיטת ניוטון: תהא $f\in C^1([a,b],\mathbb{R}\backslash\{0\})$ ויהי $x_0\in\mathbb{R}$ אזי $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

טענה: תהא $f\in C^1([a,b],\mathbb{R}\backslash\{0\})$ בעלת שורש פשוט יחיד α ויהי $x_0\in\mathbb{R}$ אזי שיטת ניוטון בעלת סדר התכנסות ריבועי.

שיטת המיתרים: תהא $f\in C([a,b],\mathbb{R}\backslash\{0\})$ ויהיו $x_0,x_1\in\mathbb{R}$ אזי $x_{n+1}=x_n-f(x_n)\cdot\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$.

אלגוריתם שיטת regula falsi: יהי ε תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ויהיו $a_0<b_0$ עבורם $f(a_0)f(b_0)<0$ אזי

```
function RegulaFalsi(a_0, b_0, ε):
    n ← 0
    while (b_0 − a_0)/2^(n+1) ≥ ε do
        m_n = a_n − f(a_n) · (a_n − b_n)/(f(a_n) − f(b_n))
        if f(m_n) = 0 then
            return m_n
        else if f(a_n) f(m_n) < 0 then
            (a_{n+1}, b_{n+1}) ← (a_n, m_n)
            n ← n + 1
        else if f(m_n) f(b_n) < 0 then
            (a_{n+1}, b_{n+1}) ← (m_n, b_n)
            n ← n + 1
    end
```

טענה: תהא $f\in C([a,b],\mathbb{R}\backslash\{0\})$ בעלת שורש פשוט יחיד α ויהיו $x_0,x_1\in\mathbb{R}$ אזי שיטת המיתרים בעלת סדר התכנסות $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

שיטת איטרציה: תהא $g:I\to\mathbb{R}$ ויהי $x_0\in\mathbb{R}$ אזי $x_n=g(x_{n-1})$.

איטרציה: תהא $g:I\to\mathbb{R}$ ויהי $x_0\in\mathbb{R}$ אזי x_n.

התכנסות שיטת איטרציה: שיטת איטרציה $g:I\to\mathbb{R}$ עבורה $x_n\to\alpha$.

נקודת שבת: תהא $g:I\to\mathbb{R}$ אזי $a\in\mathbb{R}$ עבורה $g(a)=a$.

טענה: תהא $g\in C(I,\mathbb{R})$ שיטת איטרציה מתכנסת עבורה $x_n\to\alpha$ אזי $g(\alpha)=\alpha$.

קונסיסטנטיות: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ ותהא $g\in C(I,\mathbb{R})$ שיטת איטרציה מתכנסת אזי $(g(\alpha)=\alpha)\Longleftarrow(f(\alpha)=0)$.

משפט: תהא $g\in C([a,b],[a,b])$ אזי קיימת $\alpha\in[a,b]$ עבורה $g(\alpha)=\alpha$.

משפט: תהא $g\in C^1([a,b],[a,b])$ ויהי $K<1$ עבורו $|g'|\le K$ אזי קיימת ויחידה $\alpha\in[a,b]$ עבורה $g(\alpha)=\alpha$.

מסקנה: תהא $g\in C^1([a,b],[a,b])$ ויהי $K<1$ עבורו $|g'|\le K$ אזי שיטת האיטרציה g מתכנסת לנקודת השבת.

מסקנה: תהא $g\in C^1([a,b],[a,b])$ ויהי $K<1$ עבורו $|g'|\le K$ אזי $|e_n|\le K|e_{n-1}|$.

תנאי ליפשיץ: פונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ וכן $K>0$ עבורם $|g(x)-g(y)|\le K|x-y|$.

תנאי כיווץ: פונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ וכן $0<K<1$ עבורם g ליפשיץ K.

תנאי מתיחה: פונקציה $g\in C^1(\mathbb{R})$ וכן $1<K\le|g'|$ עבורם g ליפשיץ K.

טענה: יהי X סגור תהא $g\in C(X)$ ויהי $K<1$ עבורו g ליפשיץ K אזי קיימת ויחידה $\alpha\in[a,b]$ עבורה $g(\alpha)=\alpha$.

מסקנה: יהי X סגור תהא $g\in C(X)$ ויהי $K<1$ עבורו g ליפשיץ K אזי שיטת האיטרציה g מתכנסת לנקודת השבת.

מסקנה: יהי X סגור תהא $g\in C(X)$ ויהי $K<1$ עבורו g ליפשיץ K אזי $|e_n|\le\frac{K^n}{1-K}|x_1-x_0|$.

משפט: תהא $g\in C^1(I,\mathbb{R})$ ותהא α נקודת שבת עבורה $|g'(\alpha)|<1$ אזי קיים $\varepsilon>0$ עבורו לכל $x\in(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ מתקיים כי g מתכנסת ל־α.

נקודה מושכת: תהא $g\in C^{1}\left(I,\mathbb{R}\right)$ אזי נקודת שבת α עבורה $\left|g'\left(\alpha\right)\right|<1$.

נקודה דוחה: תהא $g\in C^{1}\left(I,\mathbb{R}\right)$ אזי נקודת שבת α עבורה $\left|g'\left(\alpha\right)\right|>1$.

נקודה דו־פרצופית: תהא $g\in C^{1}\left(I,\mathbb{R}\right)$ אזי נקודת שבת α עבורה קיימים $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}$ תחומים באשר $\alpha\in\partial\mathcal{U},\partial\mathcal{V}$ וכן $\left|g'\left(\mathcal{U}\right)\right|<1$ וכן $\left|g'\left(\mathcal{V}\right)\right|>1$.

מסקנה: תהא $f\in C^{1}\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}\right)$ ויהי $\zeta\in\left[a,b\right]$ שורש פשוט אזי קיים $\varepsilon>0$ עבורו שיטת ניוטון מתכנסת בקטע $\left(\zeta-\varepsilon,\zeta+\varepsilon\right)$.

משפט: תהא $g\in C^{1}\left(I,\mathbb{R}\right)$ ותהא α נקודת שבת עבורה $0<\left|g'\left(\alpha\right)\right|<1$ אזי קיים $\varepsilon>0$ עבורו לכל $x\in\left(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon\right)$ מתקיים כי g מתכנסת ל־α בקצב התכנסות לינארי.

משפט: יהי $p>1$ תהא $g\in C^{p}\left(I,\mathbb{R}\right)$ ותהא α נקודת שבת עבורה $g^{(p)}\left(\alpha\right)\neq0$ וכן $g^{(n)}\left(\alpha\right)=0$ לכל $n\in\left[p-1\right]$ אזי קיים $\varepsilon>0$ עבורו לכל $x\in\left(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon\right)$ מתקיים כי g מתכנסת ל־α בקצב התכנסות p.

מסקנה: תהא $f\in C^{2}\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}\right)$ ויהי $\zeta\in\left[a,b\right]$ שורש פשוט עבורו $f''\left(\zeta\right)\neq0$ אזי קיים $\varepsilon>0$ עבורו שיטת ניוטון מתכנסת בקצב ריבועי בקטע $\left(\zeta-\varepsilon,\zeta+\varepsilon\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^{2}\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}\right)$ ויהי $\zeta\in\left[a,b\right]$ שורש עבורו $f'\left(\zeta\right)=0$ וכן $f''\left(\zeta\right)\neq0$ אזי קיים $\varepsilon>0$ עבורו שיטת ניוטון מתכנסת בקצב לינארי בקטע $\left(\zeta-\varepsilon,\zeta+\varepsilon\right)$.

שיטת ניוטון המתוקנת: תהא $f\in C^{1}\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}\right)$ יהי $m\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $g\left(x\right)=x-m\cdot\frac{f(x)}{f'(x)}$.

מסקנה: תהא $f\in C^{\eta}\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}\right)$ ויהי $\zeta\in\left[a,b\right]$ שורש מדרגה n אזי קיים $\varepsilon>0$ עבורו שיטת ניוטון המתוקנת מסדר n מתכנסת בקצב ריבועי בקטע $\left(\zeta-\varepsilon,\zeta+\varepsilon\right)$.

שיטת סטפנסן: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{R}\right)$ אזי $g\left(x\right)=x-\frac{f(x)^{2}}{f(x+f(x))-f(x)}$.

תחום ההתכנסות: תהא $g:I\to\mathbb{R}$ שיטה איטרטיבית ותהא $\alpha\in I$ נקודת שבת אזי קטע מקסימלי $J\subseteq I$ עבורו $\alpha\in J$ וכן לכל $x\in J$ שיטת האיטרציה g המתחילה ב־x מתכנסת ל־α.

תחום כיווץ: תהא $g\in C^{1}\left(I,\mathbb{R}\right)$ שיטה איטרטיבית תהא $\alpha\in I$ נקודת שבת עם תחום התכנסות J אזי קטע מקסימלי $K\subseteq J$ עבורו $\alpha\in K$ וכן לכל $x\in K$ מתקיים $\left|g'\left(x\right)\right|\leq1$.

שיטת ניוטון־רפסון: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $g\left(x\right)=x-D_{f}\left(x\right)^{-1}\cdot f\left(x\right)$.

טענה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}^{n}\right)$ ויהי $\zeta\in\mathbb{R}^{n}$ שורש פשוט אזי קיימת $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ סביבה של ζ בה שיטת ניוטון־רפסון מתכנסת בקצב ריבועי.

טענה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}\right)$ קמורה ומונוטונית באשר $f\left(a\right)f\left(b\right)<0$ אזי regula falsi בעלת סדר לינארי.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\Pi_{n}=\left\{f\in\mathbb{R}\left[x\right]\mid\deg\left(f\right)\leq n\right\}$.

פולינום טריגונומטרי: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהיו $a_{0}\ldots a_{n},b_{0}\ldots b_{n}\in\mathbb{R}$ אזי $f\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(a_{k}\cos\left(kx\right)+b_{k}\sin\left(kx\right)\right)$.

פולינום אקספוננטי: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהיו $a_{0}\ldots a_{n},b_{0}\ldots b_{n}\in\mathbb{R}$ אזי $f\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}a_{k}e^{b_{k}x}$.

פולינום אינטרפולציה (פ"א): תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהיינה $x_{0}\ldots x_{n}\in\mathbb{R}$ אזי $p\in\Pi_{n}$ עבורו $p\left(x_{i}\right)=f\left(x_{i}\right)$ לכל $i\in\left\{0\ldots n\right\}$.

משפט: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהיינה $x_{0}\ldots x_{n}\in\mathbb{R}$ נקודות שונות אזי קיים ויחיד $p\in\Pi_{n}$ פולינום אינטרפולציה.

פולינום לגראנז': תהיינה $x_{0}\ldots x_{n}\in\mathbb{R}$ נקודות שונות אזי $\ell_{i}\left(x\right)=\frac{\prod_{k\in\left\{0\ldots n\right\}\backslash\left\{i\right\}}\left(x-x_{k}\right)}{\prod_{k\in\left\{0\ldots n\right\}\backslash\left\{i\right\}}\left(x_{i}-x_{k}\right)}$.

טענה: תהיינה $x_{0}\ldots x_{n}\in\mathbb{R}$ נקודות שונות אזי $\ell_{i}\left(x_{j}\right)=\delta_{i,j}$.

טענה בסיס לגראנז': תהיינה $x_{0}\ldots x_{n}\in\mathbb{R}$ נקודות שונות אזי $\left\{\ell_{0}\ldots\ell_{n}\right\}$ בסיס של Π_{n}.

מסקנה צורת לגראנז': תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהיינה $x_{0}\ldots x_{n}\in\mathbb{R}$ נקודות שונות אזי $\sum_{i=0}^{n}f\left(x_{i}\right)\ell_{i}\left(x\right)$ פולינום אינטרפולציה.

טענה בסיס ניוטון: תהיינה $x_{0}\ldots x_{n-1}\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{\prod_{i=0}^{j}\left(x-x_{i}\right)\right\}_{j=-1}^{n-1}$ בסיס של Π_{n}.

טענה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תהיינה $x_{0}\ldots x_{n+1}\in\mathbb{R}$ ויהי $\sum_{j=-1}^{n}A_{j+1}\prod_{i=0}^{j}\left(x-x_{i}\right)$ פולינום אינטרפולציה של f בנקודות $x_{0}\ldots x_{n+1}$ אזי $\sum_{j=-1}^{n-1}A_{j+1}\prod_{i=0}^{j}\left(x-x_{i}\right)$ פולינום אינטרפולציה של f ב־$\left\{x_{0},\ldots,x_{n}\right\}$.

מסקנה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תהיינה $x_{0}\ldots x_{n+1}\in\mathbb{R}$ ויהי $\sum_{j=-1}^{n}A_{j+1}\prod_{i=0}^{j}\left(x-x_{i}\right)$ פולינום אינטרפולציה של f בנקודות $x_{0}\ldots x_{n+1}$ אזי $\sum_{j=-1}^{k-1}A_{j+1}\prod_{i=0}^{j}\left(x-x_{i}\right)$ פולינום אינטרפולציה של f ב־$\left\{x_{0},\ldots,x_{k}\right\}$.

מסקנה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תהיינה $x_{0}\ldots x_{n+1}\in\mathbb{R}$ יהי $\sum_{j=-1}^{n}A_{j+1}\prod_{i=0}^{j}\left(x-x_{i}\right)$ פולינום אינטרפולציה של f בנקודות $x_{0}\ldots x_{n+1}$ ויהי $\sum_{j=-1}^{n-1}B_{j+1}\prod_{i=0}^{j}\left(x-x_{i}\right)$ פולינום אינטרפולציה של f ב־$\left\{x_{0},\ldots,x_{n}\right\}$ אזי $\sum_{j=-1}^{n}A_{j+1}\prod_{i=0}^{j}\left(x-x_{i}\right)=\left(\sum_{j=-1}^{n-1}B_{j+1}\prod_{i=0}^{j}\left(x-x_{i}\right)\right)+A_{n+1}\prod_{i=0}^{n}\left(x-x_{i}\right)$.

הפרש מחולק: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תהיינה $x_{0}\ldots x_{k}\in\mathbb{R}$ ויהי $\sum_{j=-1}^{k-1}A_{j+1}\prod_{i=0}^{j}\left(x-x_{i}\right)$ פולינום אינטרפולציה של f ב־$\left\{x_{0}\ldots x_{k}\right\}$ אזי $f\left[x_{0}\ldots x_{k}\right]=A_{k}$.

מסקנה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תהיינה $x_{0}\ldots x_{k}\in\mathbb{R}$ שונות ותהא $\sigma\in S_{k+1}$ תמורה אזי $f\left[x_{0}\ldots x_{k}\right]=f\left[x_{\sigma(0)}\ldots x_{\sigma(k)}\right]$.

מסקנה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ אזי $\sum_{j=-1}^{n-1} f\left[x_0\dots x_{j+1}\right]\prod_{i=0}^{j}\left(x-x_i\right)$ פולינום אינטרפולציה של f ב־$\{x_0\dots x_n\}$.

טענה נוסחה רקורסיבית להפרשים המחולקים: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהיינה $x_0\dots x_k\in\mathbb{R}$ באשר $x_k\neq x_0$ אזי $f\left[x_0\dots x_k\right]=\frac{f[x_1\dots x_k]-f[x_0\dots x_{k-1}]}{x_k-x_0}$.

השגיאה באינטרפולציה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ ויהי $p\in\Pi_n$ פ"א אזי $e\left(x\right)=f\left(x\right)-p\left(x\right)$.

משפט ביטוי לשגיאה באינטרפולציה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תהיינה $x_0\dots x_n,x\in\mathbb{R}$ ויהי $p\in\Pi_n$ פ"א אזי $e\left(x\right)=f\left[x_0\dots x_n,x\right]\prod_{i=0}^{n}\left(x-x_i\right)$.

טענה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ באשר $f\in C^k\left(\left(a,b\right)\right)$ ותהיינה $x_0\dots x_k\in\left[a,b\right]$ אזי קיימת $c\in\left(a,b\right)$ עבורה $f\left[x_0\dots x_k\right]=\frac{f^{(k)}(c)}{k!}$.

מסקנה נוסחת השגיאה בפולינום האינטרפולציה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ באשר $f\in C^{n+1}\left(\left(a,b\right)\right)$ תהיינה $x_0\dots x_n,x\in\mathbb{R}$ ויהי $p\in\Pi_n$ פ"א אזי קיימת $c\in\left(a,b\right)$ עבורה $e\left(x\right)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}\left(x-x_i\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ באשר $f\in C^{n+1}\left(\left(a,b\right)\right)$ תהיינה $x_0\dots x_n,x\in\mathbb{R}$ ויהי $p\in\Pi_n$ פ"א אזי קיימת $c\in\left(a,b\right)$ עבורה $\left|e\left(x\right)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right|\left(b-a\right)^{n+1}$.

מסקנה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ באשר $f\in C^{n+1}\left(\left(a,b\right)\right)$ תהא $M\in\mathbb{R}$ עבורה $\sup\left|f^{(n+1)}\right|\leq M$ תהיינה $x_0\dots x_n,x\in\mathbb{R}$ ויהי $p\in\Pi_n$ פ"א אזי $\left|e\left(x\right)\right|\leq\frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

פונקציית ספליין: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ תהא $\{x_0\dots x_n\}$ חלוקה של $\left[a,b\right]$ ויהיו $k,m\in\mathbb{N}$ אזי $f\in C^m\left(\left[a,b\right]\right)$ באשר $f_{\restriction_{\left[x_{i-1},x_i\right]}}\in\Pi_k$ לכל $i\in\{1\dots n\}$.

הערה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ תהא $\{x_0\dots x_n\}$ חלוקה של $\left[a,b\right]$ אזי פונקציית ספליין ממעלה k הינה פונקציית ספליין ממעלה k וסדר חלקות $k-1$.

אינטרפולנט ליניארי למקוטעין: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ תהא $\{x_0\dots x_n\}$ חלוקה של $\left[a,b\right]$ אזי פונקציית ספליין ממעלה 1.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ותהא $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ אזי $f\left[\left\{a+\frac{b-a}{n}\cdot i\right\}_{i=0}^{n}\right]=\frac{1}{n!\left(\frac{b-a}{n}\right)^n}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^k\binom{n}{k}f\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot k\right)\right)$.

הפרש מחולק עם חזרה: תהא $f\in C^1\left(\mathbb{R}\right)$ אזי $f\left[x,x\right]=f'\left(x\right)$.

טענה: תהא $f\in C^1\left(\mathbb{R}\right)$ אזי $f\left[x,x\right]=\lim_{h\to0}f\left[x,x+h\right]$.

הפרש מחולק עם חזרות: תהא $f\in C^n\left(\mathbb{R}\right)$ ותהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ בסדר עולה אזי $f\left[x_0\dots x_n\right]=\begin{cases}\frac{f[x_1\dots x_n]-f[x_0\dots x_{n-1}]}{x_n-x_0} & x_0<x_n\\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} & x_0=x_n\end{cases}$.

פולינום אינטרפולציית הרמיט: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תהיינה $x_0\dots x_m\in\mathbb{R}$ ותהא $g:\{x_0\dots x_m\}\to\mathbb{N}_+$ באשר $\sum_{i=0}^{m}g\left(x_i\right)=n+1$ אזי $p\in\Pi_n$ עבורו $p^{(j)}\left(x_i\right)=f^{(j)}\left(x_i\right)$ לכל $i\in\{0\dots m\}$ ולכל $j\in\{0\dots g\left(x_i\right)-1\}$.

משפט: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תהיינה $x_0\dots x_m\in\mathbb{R}$ ותהא $g:\{x_0\dots x_m\}\to\mathbb{N}_+$ באשר $\sum_{i=0}^{m}g\left(x_i\right)=n+1$ אזי קיים ויחיד $p\in\Pi_n$ פולינום אינטרפולציית הרמיט.

פונקציית ספליין הרמיט: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ תהא $x_0\dots x_n$ חלוקה של $\left[a,b\right]$ ויהי $k\in\mathbb{N}$ אזי פונקציית ספליין ממעלה k וסדר חלקות 1.

טענה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ אזי $\sum_{j=-1}^{n-1}f\left[x_0\dots x_{j+1}\right]\prod_{i=0}^{j}\left(x-x_i\right)$ פולינום אינטרפולציית הרמיט.

פולינום ברשטיין: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $k\in\{0\dots n\}$ אזי $B_n^k:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$ המוגדר $B_n^k\left(x\right)=\binom{n}{k}x^k\left(1-x\right)^{n-k}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left\{B_n^k\right\}_{k=0}^{n}$ בסיס של Π_n.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $P_n^B:\left(\left[0,1\right]\to\mathbb{R}\right)\times\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$ המוגדרת $P_n^B\left(f,x\right)=\sum_{k=0}^{n}B_n^k\left(x\right)\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$.

למה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי

- תהיינה $f,g:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$ ויהיו $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ אזי $P_n^B\left(\lambda f+\mu g,x\right)=\lambda P_n^B\left(f,x\right)+\mu P_n^B\left(g,x\right)$.
- לכל $k\in\{0\dots n\}$ מתקיים $B_n^k\geq0$.
- תהא $f:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$ ויהי $c\in\mathbb{R}$ אזי $P_n^B\left(c,x\right)=c$.
- $P_n^B\left(x,x\right)=x$.
- $P_n^B\left(x^2,x\right)=x^2+\frac{1}{n}\left(x-x^2\right)$.
- $\sum_{k=0}^{n}B_n^k\left(x\right)\left(\frac{k}{n}-x\right)^2=\frac{x(1-x)}{n}$.
- $B_n^k\left(x\right)=xB_{n-1}^{k-1}\left(x\right)+\left(1-x\right)B_{n-1}^k\left(x\right)$.

טענה: תהא $f:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$ ותהא $x\in\left[0,1\right]$ אזי $f\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}P_n^B\left(f,x\right)$.

מסקנה: תהא $f:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$ ותהא $x\in\left[0,1\right]$ אזי $\sup\left|f\left(x\right)-P_n^B\left(x\right)\right|=\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

חצי־מכפלה פנימית: יהי V מ"ו נ"ס אזי $H:V^2\to\mathbb{C}$ המקיימת

- הרמיטיות: $\forall a,b\in V.H\left(a,b\right)=\overline{H\left(b,a\right)}$.

- לינאריות: $\forall a,b,c\in V.\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.H(\alpha a+\beta b,c)=\alpha H(a,c)+\beta H(b,c)$.
- חיוביות: $\forall a\in V.H(a,a)\in\mathbb{R}_+$.

חצי־נורמה מושרית: יהי V מ"ו נ"ס ותהא חצי־מכפלה פנימית H על V אזי $\|a\|=\sqrt{H(a,a)}$.

קירוב ריבועים מינימליים: יהי V מ"ו נ"ס תהא חצי־מכפלה פנימית H מעל V תהא $\{v_0\dots v_n\}\subseteq V$ בת"ל באשר H מכפלה פנימית מעל $\operatorname{span}\{v_0\dots v_n\}$ ויהי $u\in L$ אזי $\arg\min_{v\in\operatorname{span}\{v_0\dots v_n\}}(\operatorname{dist}(u,v))$.

משפט: יהי V מ"ו נ"ס תהא חצי־מכפלה פנימית H מעל V תהא $\{v_0\dots v_n\}\subseteq V$ בת"ל באשר H מכפלה פנימית מעל $\operatorname{span}\{v_0\dots v_n\}$ יהי $u\in L$ ויהיו $c_0\dots c_n\in\mathbb{R}$ אזי ($\sum_{i=0}^{n}c_iv_i$ הינו קירוב ריבועים מינימליים של u)$\Longleftrightarrow$(לכל $k\in\{0\dots n\}$ מתקיים $\sum_{i=0}^{n}c_i(v_i,v_k)=(u,v_k)$).

טענה: יהי V מ"ו נ"ס תהא חצי־מכפלה פנימית H מעל V תהא $\{v_0\dots v_n\}\subseteq V$ בת"ל באשר H מכפלה פנימית מעל $\operatorname{span}\{v_0\dots v_n\}$ יהי $u\in L$ ויהי $v\in\operatorname{span}\{v_0\dots v_n\}$ קירוב ריבועים מינימליים אזי $(v-u)\perp\operatorname{span}\{v_0\dots v_n\}$.

מערכת משוואות נורמלית: יהי V מ"ו נ"ס תהא חצי־מכפלה פנימית H מעל V תהא $\{v_0\dots v_n\}\subseteq V$ בת"ל באשר H מכפלה פנימית מעל $\operatorname{span}\{v_0\dots v_n\}$ יהי $u\in L$ ויהיו $c_0\dots c_n\in\mathbb{R}$ אזי $\sum_{i=0}^{n}c_i(v_i,v_k)=(u,v_k)$.

מסקנה: יהי V מ"ו נ"ס תהא חצי־מכפלה פנימית H מעל V תהא $\{v_0\dots v_n\}\subseteq V$ בת"ל ואורתוגונלית באשר H מכפלה פנימית מעל $\operatorname{span}\{v_0\dots v_n\}$ ויהי $u\in L$ אזי הקירוב ריבועים מינימליים הוא $\sum_{i=0}^{n}\frac{H(f,v_i)}{H(v_i,v_i)}\cdot v_i$.

מכפלה פנימית ממושקלת: תהא $w\in C^1([a,b])$ חיובית ממש עד כדי קבוצה זניחה אזי $H:C^1([a,b])^2\to\mathbb{R}$ כך $H(f,g)=\int_a^b(f\cdot g\cdot w)$.

טענה: תהא $w\in C^1([a,b])$ חיובית ממש עד כדי קבוצה זניחה אזי מכפלה פנימית ממושקלת w הינה מכפלה פנימית מעל $C^1([a,b])$.

סדרה אורתוגונלית של פולינומים: תהא H מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}[x]$ אזי $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}\subseteq\mathbb{R}[x]$ באשר $q_n\in\Pi_n$ וכן לכל $i\neq j$ מתקיים $H(q_i,q_j)=0$.

פולינומי לג'נדר: $P_0(x)=1$ וכן $P_1(x)=x$ וכן $P_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$.

טענה: תהא מכפלה פנימית ממושקלת 1 בקטע $[-1,1]$ אזי פולינומי לג'נדר מהווים סדרה אורתוגונלית של פולינומים.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ אזי $P_{n+1}(x)=x\cdot P_n(x)-\frac{(P_n,P_n)}{(P_{n-1},P_{n-1})}P_{n-1}(x)$.

פולינומי צ'בישב: $T_n(x)=\cos(n\cdot\arccos(x))$.

טענה: תהא מכפלה פנימית ממושקלת $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ בקטע $[-1,1]$ אזי פולינומי צ'בישב מהווים סדרה אורתוגונלית של פולינומים.

טענה: $T_0(x)=1$ וכן $T_1(x)=x$ וכן $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$.

פולינומי לגר: $L_0(x)=1$ וכן $L_1(x)=1-x$ וכן $L_{n+1}(x)=\left(\frac{2n+1}{n+1}-\frac{x}{n+1}\right)L_n(x)-\frac{n}{n+1}L_{n-1}(x)$.

טענה: תהא מכפלה פנימית ממושקלת e^{-x} בקטע $[0,\infty)$ אזי פולינומי לגר מהווים סדרה אורתוגונלית של פולינומים.

פולינומי הרמיט: $H_0(x)=1$ וכן $H_1(x)=2x$ וכן $H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)$.

טענה: תהא מכפלה פנימית ממושקלת e^{-x^2} בקטע $(-\infty,\infty)$ אזי פולינומי הרמיט מהווים סדרה אורתוגונלית של פולינומים.

טענה: תהא $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{R}$ ותהא $Q_{n+1}(x)=xQ_n(x)+\sum_{i=0}^{n}f(n+1,i)\cdot Q_i(x)$ סדרה אורתוגונלית של פולינומים אזי

- $f(n+1,i)=-\frac{(xQ_n,Q_i)}{(Q_j,Q_j)}$.
- לכל $i\in\{0\dots n-2\}$ מתקיים $f(n+1,i)=0$.

טענה: תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ באשר $m>n$ וכן עמודות A בת"ל יהי $b\in\mathbb{R}^m$ ויהי $b'\in\mathbb{R}^m$ קירוב ריבועיים מינימליים של b למרחב $\{Ax\mid x\in\mathbb{R}^n\}$ אזי קיים ויחיד פתרון למערכת $A^TAx=A^Tb$.

טענה: תהא $f\in C^1(\mathbb{R})$ תהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ ויהי p פ"א של f אזי $f'(x)=p'(x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f[x_0\dots x_n,x]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right)$.

שגיאה בנגזרת: תהא $f\in C^1(\mathbb{R})$ תהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ ויהי p פ"א של f אזי $e_{f'}(x)=e_f'(x)$.

סדר נקודות חוקי: נקודות $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ עבורן אם $x_i=x_j$ אזי $\{x_i\dots x_j\}=\{x_i\}$.

טענה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ בסדר חוקי ותהא $\sigma\in S_{n+1}$ תמורה בסדר חוקי אזי $f[x_0\dots x_n]=f\left[x_{\sigma(0)}\dots x_{\sigma(n)}\right]$.

טענה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ אזי $f[x_0\dots x_n,x]$ רציפה.

טענה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ אזי $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f[x_0\dots x_n,x]\right)(x)=f[x_0\dots x_n,x,x]$.

מסקנה: תהא $f\in C^1(\mathbb{R})$ ותהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ אזי $e_{f'}(x)=f[x_0\dots x_n,x,x]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)+f[x_0\dots x_n,x]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^1([a,b])$ תהיינה $x_0\dots x_n\in[a,b]$ ויהי p פ"א של f אזי קיימים $\zeta,\xi\in(a,b)$ עבורם $f'(x)=p'(x)+\frac{f^{(n+2)}(\zeta)}{(n+2)!}\cdot\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right)$.

מסקנה: תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ותהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ אזי
- אם $\prod_{i=0}^{n}(a-x_i)=0$ אזי $e_{f'}(a)=\mathcal{O}\left((b-a)^n\right)$.
- אם $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right)(a)=0$ אזי $e_{f'}(a)=\mathcal{O}\left((b-a)^{n+1}\right)$.

סדר הקירוב: תהא $f\in C^1(\mathbb{R})$ ותהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ אזי $p\in\mathbb{N}$ מקסימלי עבורו קיים $C\in\mathbb{R}$ וקיים $h\in\left[\min_{i\neq j}|x_i-x_j|,\max|x_i-x_j|\right]$ המקיימים $|e_{f'}(a)|\le Ch^p$.

הערה: תהא שיטת קירוב מעל הנקודות $x_1\dots x_n$ עם מרחק מקסימלי h בין הנקודות ועם שגיאה $e(x)$ סדר הקירוב של השיטה הוא $p\in\mathbb{N}$ מינימלי עבורו $|e(x)|=\mathcal{O}(h^p)$.

טענה: תהא $f\in C^1(\mathbb{R})$ תהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ ותהא $a\in\mathbb{R}\backslash\{x_0\dots x_n\}$ עבורה $\{x_0\dots x_n\}$ סימטריות סביב a אזי $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right)(a)=0$.

סדר דיוק אלגברי: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא $e:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שגיאה של נוסחת קירוב אזי $n\in\mathbb{N}$ מקסימלי עבורו לכל $p\in\Pi_n$ מתקיים $e_p=0$.

טענה: תהא $f\in C^m(\mathbb{R})$ תהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ ויהי p פ"א של f אזי $f''(x)=p''(x)+f[x_0\dots x_n,x,x,x]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)+2f[x_0\dots x_n,x,x]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right)+f[x_0\dots x_n,x]\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^2([a,b])$ תהיינה $x_0\dots x_n\in[a,b]$ ויהי p פ"א של f אזי קיימים $\zeta,\xi,\chi\in(a,b)$ עבורם $f''(x)=p''(x)+\frac{f^{(n+3)}(\zeta)}{(n+3)!}\cdot\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)+\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right)++\frac{f^{(n+1)}(\chi)}{(n+1)!}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right)$.

כלל הפרש קדמי לקירוב נגזרת: תהא $f\in C^2(\mathbb{R})$ יהי $a\in\mathbb{R}$ ויהי $h>0$ אזי $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

טענה: תהא $f\in C^2(\mathbb{R})$ ויהי $a\in\mathbb{R}$ באשר קיימת סביבה $\mathcal{U}$ של a בה f'' חסומה אזי סדר קירוב הפרש קדמי הינו $\mathcal{O}(h)$.

כלל הפרש מרכזי לקירוב נגזרת: תהא $f\in C^2(\mathbb{R})$ יהי $a\in\mathbb{R}$ ויהי $h>0$ אזי $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$.

מסקנה: תהא $f\in C^2(\mathbb{R})$ יהי $a\in\mathbb{R}$ יהי $h>0$ ויהי p פ"א של f בנקודות $\{a+h,a-h\}$ אזי $p'(a)=\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$.

טענה: תהא $f\in C^3(\mathbb{R})$ ויהי $a\in\mathbb{R}$ באשר קיימת סביבה $\mathcal{U}$ של a בה f''' חסומה אזי סדר קירוב הפרש מרכזי הינו $\mathcal{O}(h^2)$.

טענה: תהא $f\in C^3(\mathbb{R})$ ויהי $a\in\mathbb{R}$ באשר קיימת סביבה $\mathcal{U}$ של a בה f''' חסומה אזי הפרש מרכזי בעל סדר דיוק אלגברי 2.

משפט ריצ'רדסון: תהא $f\in C^1(\mathbb{R})$ יהי $a\in\mathbb{R}$ יהי $h>0$ ותהא D שיטת קירוב ל־$f'(a)$ מסדר $\mathcal{O}(h^{2k})$ בעלת הפרש h בין נקודותיה אזי $f'(a)=D(h)+\sum_{i=0}^{\infty}C_ih^{2k+2i}$.

מסקנה קירוב ריצ'רדסון: תהא $f\in C^1(\mathbb{R})$ יהי $a\in\mathbb{R}$ יהי $h>0$ ותהא $D(h)$ שיטת קירוב ל־$f'(a)$ מסדר $\mathcal{O}(h^{2k})$ בעלת הפרש h בין נקודותיה אזי $f'(a)=\frac{4^kD(h)-D(2h)}{4^k-1}+\mathcal{O}(h^{2k+2})$.

טענה: תהא $f\in R([a,b])$ תהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ ויהי p פ"א של f אזי $\int_a^bf=\int_a^bp+\int_a^bf[x_0\dots x_n,x]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,\mathrm{d}x$.

שגיאה באינטגרל: תהא $f\in R([a,b])$ ותהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ אזי $E\left(\int_a^bf\right)=\int_a^be_f(x)\,\mathrm{d}x$.

טענה: תהא $f\in C^{n+1}([a,b])$ ותהיינה $x_0\dots x_n,k\in\mathbb{R}$ באשר $\max_{i\in[n]}\max_{x\in[a,b]}|x-x_i|\le k(b-a)$ אזי $\left|E\left(\int_a^bf\right)\right|\le\max_{x\in[a,b]}\frac{\left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!}(b-a)(k(b-a))^{n+1}$.

מסקנה: תהא $f\in C^{n+1}([a,b])$ ותהיינה $x_0\dots x_n,k\in\mathbb{R}$ באשר $\max_{i\in[n]}\max_{x\in[a,b]}|x-x_i|\le k(b-a)$ אזי $\left|E\left(\int_a^bf\right)\right|=\mathcal{O}\left((b-a)^{n+2}\right)$.

טענה: תהא $f\in C^{n+1}([a,b])$ ותהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ באשר $\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ בעלת סימן קבוע בקטע $[a,b]$ אזי קיים $\xi\in(a,b)$ עבורו $\left|E\left(\int_a^bf\right)\right|=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_a^b\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,\mathrm{d}x$.

מסקנה: תהא $f\in C^{n+1}([a,b])$ ותהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ באשר $\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ בעלת סימן קבוע בקטע $[a,b]$ אזי $\left|E\left(\int_a^bf\right)\right|=\mathcal{O}\left((b-a)^{n+2}\right)$.

כלל המלבן לקירוב אינטגרל: תהא $f\in C^1([a,b])$ אזי $(b-a)f(a)$.

מסקנה: תהא $f\in C^1([a,b])$ אזי קיים $\xi\in(a,b)$ עבורו שגיאת כלל המלבן הינה $E\left(\int_a^bf\right)=\frac{(b-a)^2}{2}f'(\xi)$.

כלל הטרפז לקירוב אינטגרל: תהא $f\in C^2([a,b])$ אזי $\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$.

מסקנה: תהא $f\in C^2([a,b])$ אזי קיים $\xi\in(a,b)$ עבורו שגיאת כלל הטרפז הינה $E\left(\int_a^bf\right)=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$.

טענה: תהא $f\in C^{n+2}([a,b])$ ותהיינה $x_0\dots x_{n+1}\in\mathbb{R}$ באשר $\int_a^b\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,\mathrm{d}x=0$ וכן $\prod_{i=0}^{n+1}(x-x_i)$ בעלת סימן קבוע בקטע $[a,b]$ אזי קיים $\xi\in(a,b)$ עבורו $E\left(\int_a^bf\right)=\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\int_a^b\prod_{i=0}^{n+1}(x-x_i)\,\mathrm{d}x$.

מסקנה: תהא $f\in C^{n+2}([a,b])$ ותהיינה $x_0\dots x_{n+1}\in\mathbb{R}$ באשר $\int_a^b\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,\mathrm{d}x=0$ וכן $\prod_{i=0}^{n+1}(x-x_i)$ בעלת סימן קבוע בקטע $[a,b]$ אזי $\left|E\left(\int_a^bf\right)\right|=\mathcal{O}\left((b-a)^{n+3}\right)$.

כלל נקודת האמצע לקירוב אינטגרל: תהא $f\in C^2([a,b])$ אזי $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^{2}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $\xi\in\left(a,b\right)$ עבורו שגיאת כלל נקודת האמצע הינה $E\left(\int_{a}^{b}f\right)=\frac{\left(b-a\right)^{3}}{24}f''\left(\xi\right)$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ תהיינה $A_{0}\ldots A_{n}\in\mathbb{R}$ ותהיינה $x_{0}\ldots x_{n}\in\left[a,b\right]$ ויהי p פ"א של f אזי (הכלל $\sum_{i=0}^{n}A_{i}f\left(x_{i}\right)$ לקירוב אינטגרל בעל סדר דיוק אלגברי של לפחות n)$\Longleftrightarrow$($\int_{a}^{b}p\left(x\right)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}A_{i}p\left(x_{i}\right)$).

מסקנה: תהיינה $f,w\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ באשר $w\geq0$ תהיינה $A_{0}\ldots A_{n}\in\mathbb{R}$ ותהיינה $x_{0}\ldots x_{n}\in\left[a,b\right]$ אזי (הכלל $\sum_{i=0}^{n}A_{i}f\left(x_{i}\right)$ לקירוב $\int_{a}^{b}f\left(x\right)w\left(x\right)\mathrm{d}x$ בעל סדר דיוק אלגברי של לפחות n)$\Longleftrightarrow$(לכל $i\in\left\{ 0\ldots n\right\}$ מתקיים $A_{i}=\int_{a}^{b}\ell_{i}\left(x\right)w\left(x\right)\mathrm{d}x$).

כלל סימפסון לקירוב אינטגרל: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\frac{b-a}{6}\left(f\left(a\right)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(b\right)\right)$.

טענה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי כלל סימפסון בעל סדר דיוק אלגברי 3.

מסקנה: תהא $f\in C^{4}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $\xi\in\left(a,b\right)$ עבורו שגיאת כלל סימפסון הינה $E\left(\int_{a}^{b}f\right)=-\left(\frac{b-a}{2}\right)^{5}\cdot\frac{f^{\left(4\right)}\left(\xi\right)}{90}$.

כלל הטרפז המורכב לקירוב אינטגרל: תהא $f\in C^{2}\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $x_{0}\ldots x_{n}$ חלוקה בעלת הפרש קבוע h אזי $T_{h}\left(f\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left(f\left(x_{i}\right)+f\left(x_{i+1}\right)\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^{2}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $\xi\in\left(a,b\right)$ עבורו שגיאת כלל הטרפז המורכב הינה $E\left(\int_{a}^{b}f\right)=-\frac{\left(b-a\right)h^{2}}{12}f''\left(\xi\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ גזירה פעמיים באשר $\left|f^{\left(2\right)}\right|\leq M$ אזי שגיאת כלל הטרפז המורכב הינה $\left|E\left(\int_{a}^{b}f\right)\right|\leq\frac{\left(b-a\right)h^{2}}{12}M$.

כלל סימפסון המורכב לקירוב אינטגרל: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $x_{0}\ldots x_{2M}$ חלוקה בעלת הפרש קבוע h אזי $S_{h}\left(f\right)=\frac{h}{3}\left(f\left(x_{0}\right)+f\left(x_{2M}\right)+2\sum_{i=1}^{M-1}f\left(x_{2i}\right)+4\sum_{i=1}^{M-1}f\left(x_{2i-1}\right)\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^{4}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $\xi\in\left(a,b\right)$ עבורו שגיאת כלל סימפסון המורכב הינה $E\left(\int_{a}^{b}f\right)=-\frac{\left(b-a\right)h^{4}}{180}f^{\left(4\right)}\left(\xi\right)$.

טענה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $x_{0}\ldots x_{n}$ חלוקה בעלת הפרש קבוע h אזי $S_{h}\left(f\right)=\frac{4T_{h}\left(f\right)-T_{2h}\left(f\right)}{3}$.

כלל הטרפז המורכב עם שגיאה לקירוב אינטגרל: תהא $f\in C^{2}\left(\left[a,b\right]\right)$ תהא $x_{0}\ldots x_{n}$ חלוקה בעלת הפרש קבוע h ותהא $\varepsilon\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left(f\left(x_{i}\right)+\varepsilon_{i}+f\left(x_{i+1}\right)+\varepsilon_{i+1}\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^{2}\left(\left[a,b\right]\right)$ תהא $x_{0}\ldots x_{n}$ חלוקה בעלת הפרש קבוע h ותהא $\varepsilon\in\mathbb{R}^{n}$ אזי שגיאת כלל הטרפז המורכב עם שגיאה הינה $\left|E\left(\int_{a}^{b}f\right)\right|\leq\frac{\left(b-a\right)h^{2}}{12}\left|f''\left(\xi\right)\right|+\left(b-a\right)\cdot\max_{i\in\left[n\right]}\left(\varepsilon_{i}\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי המקדם הראשי של $T_{n}\left(x\right)$ הינו 2^{n-1}.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left\{ T_{n}=0\right\} =\left\{ \cos\left(\frac{2k+1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\mid k\in\left\{ 0,\ldots,n-1\right\} \right\}$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|\left\{ T_{n}=0\right\} \right|=n$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $-1\leq T_{n}\leq1$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי נקודות הקיצון של T_{n} בקטע $\left(-1,1\right)$ הינן $\left\{ \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mid k\in\left\{ 0,\ldots,n\right\} \right\}$.

כלל גאוס לקירוב אינטגרל: תהיינה $f,w\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ באשר $w\geq0$ יהי $n\in\mathbb{N}$ תהא $\left\{ q_{i}\right\} _{i=0}^{\infty}$ סדרה אורתוגונלית של פולינומים באשר $\mathrm{sols}\left(q_{n+1}\right)=\left\{ x_{0}\ldots x_{n}\right\}$ אזי $\sum_{i=0}^{n}\left(\left(\int_{a}^{b}\ell_{i}\left(x\right)w\left(x\right)\mathrm{d}x\right)\cdot f\left(x_{i}\right)\right)$.

משפט: תהא $w\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ באשר $w\geq0$ ותהא $f\in C^{2n+2}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $\xi\in\left(a,b\right)$ עבורו שגיאת כלל גאוס הינה $E\left(\int_{a}^{b}f\right)=\frac{f^{\left(2n+2\right)}\left(\xi\right)}{\left(2n+2\right)!}\cdot\int_{a}^{b}\left(\prod_{i=0}^{n}\left(x-x_{i}\right)\right)^{2}w\left(x\right)\mathrm{d}x$.

מסקנה: תהא $w\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ באשר $w\geq0$ ותהא $f\in C^{2n+2}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי כלל גאוס בעל סדר דיוק אלגברי $2n+1$.

טענה: יהי $f\in C^{n+1}\left(\left[a,b\right]\right)$ ויהי p פ"א של f אזי קיים $c\in\left(a,b\right)$ עבורו $\left\Vert e\left(x\right)\right\Vert _{\infty}=\left|\frac{f^{\left(n+1\right)}\left(c\right)}{\left(n+1\right)!}\right|\cdot\left\Vert \prod_{i=0}^{n}\left(x-x_{i}\right)\right\Vert _{\infty}$.

פולינום צ'בישב מתוקן: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\widehat{T}_{n}\left(x\right)=\frac{1}{2^{n-1}}T_{n}\left(x\right)$.

פולינום המינימקס: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $p\in\Pi_{n}$ מתוקן עבורו לכל $q\in\Pi_{n}$ מתקיים $\left\Vert f\left(x\right)-p\left(x\right)\right\Vert _{\infty}\leq\left\Vert f\left(x\right)-q\left(x\right)\right\Vert _{\infty}$.

משפט המינימקס לפולינומים: יהי $p\in\Pi_{n}$ מתוקן בקטע $\left[-1,1\right]$ אזי $\left\Vert \widehat{T}_{n}\right\Vert _{\infty}\leq\left\Vert p\right\Vert _{\infty}$.

מסקנה: פולינום המינימקס ממעלה n של x^{n+1} בקטע $\left[-1,1\right]$ הינו $x^{n+1}-\widehat{T}_{n+1}\left(x\right)$.

מסקנה: יהי $f\in R\left(\left[-1,1\right]\right)$ פולינום מדרגה $n+1$ ויהי $p\in\Pi_{n}$ פולינום המינימקס של f אזי p פ"א של f בשורשי $\widehat{T}_{n+1}$.

משפט איפיון כללי לפולינום המינימקס: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ויהי $p\in\Pi_{n}$ מתוקן אזי (p פולינום המינימקס של f)$\Longleftrightarrow$(קיימים $t_{0}\ldots t_{n+1}\in\left[a,b\right]$ עבורם $f\left(t_{i}\right)-p\left(t_{i}\right)=\mathrm{sign}\left(e\left(t_{0}\right)\right)\cdot\left(-1\right)^{i}\cdot\left\Vert f-p\right\Vert _{\infty}$ לכל $i\in\left\{ 0,\ldots,n+1\right\}$).

נורמה מושרית על מרחב המטריצות: תהא $\nu:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמה אזי $\nu_{\mathrm{M}}:M_{n}\left(\mathbb{R}\right)\to\mathbb{R}$ המוגדרת $\nu_{\mathrm{M}}\left(A\right)=\max_{x\in\mathbb{R}^{n}\backslash\left\{ 0\right\} }\left\{ \frac{\nu\left(Ax\right)}{\nu\left(x\right)}\right\}$.

הערה: תהא $\nu:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמה אזי נסמן $\nu=\nu_{\mathrm{M}}$.

טענה: תהא $\nu:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמה אזי ν נורמה מעל $M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$.

טענה: תהא $\nu:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמה ותהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ אזי $\nu\left(A\right)=\max_{v\in\mathbb{S}^{n-1}}\left\{ \nu\left(Av\right)\right\}$.

מסקנה: תהא $\nu:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמה תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ ותהא $x\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\nu\left(Ax\right)\leq\nu\left(A\right)\cdot\nu\left(x\right)$.

טענה: תהא $\nu:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה ותהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\nu(A\cdot B)\le\nu(A)\cdot\nu(B)$.

טענה: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\|A\|_\infty=\max_{i\in[n]}\sum_{j=1}^n|a_{i,j}|$.

טענה: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\|A\|_1=\max_{j\in[n]}\sum_{i=1}^n|a_{i,j}|$.

מסקנה: תהיינה $\nu,\eta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמות אזי קיימים $m,M>0$ עבורם $m\cdot\eta(A)\le\nu(A)\le M\cdot\eta(A)$.

ספקטרום של מטריצה: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\text{spec}(A)=\{\lambda\in\mathbb{R}\mid A \text{ ע"ע של } \lambda\}$.

רדיוס ספקטראלי: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\rho(A)=\max_{\lambda\in\text{spec}(A)}|\lambda|$.

משפט: תהא $\nu:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה ותהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\rho(A)\le\nu(A)$.

טענה: תהא $\nu:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה אזי $\nu(I)=1$.

מסקנה: הפונקציה $f:M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ המוגדרת $f(A)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{i,j}|$ אינה נורמה מושרית.

טענה: יהי $\varepsilon>0$ ותהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ אזי קיימת נורמה $\nu:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ עבורה $\nu(A)\le\rho(A)+\varepsilon$.

שגיאה של מערכת משוואות: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ ותהיינה $b,r,x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$ באשר $Ax=b$ וכן $A\tilde{x}=b+r$ אזי $e=\tilde{x}-x$.

מסקנה: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ ותהיינה $b,r,x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$ באשר $Ax=b$ וכן $A\tilde{x}=b+r$ אזי $Ae=r$.

מסקנה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ותהיינה $b,r,x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$ באשר $Ax=b$ וכן $A\tilde{x}=b+r$ אזי

- $\|b\|\le\|A\|\|x\|$.
- $\|x\|\le\left\|A^{-1}\right\|\|b\|$.
- $\|r\|\le\|A\|\|e\|$.
- $\|e\|\le\left\|A^{-1}\right\|\|r\|$.

טענה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ותהיינה $b,r,x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$ באשר $Ax=b$ וכן $A\tilde{x}=b+r$ אזי

- $\frac{1}{\|A\|}\le\frac{\|e\|}{\|r\|}\le\left\|A^{-1}\right\|$.
- $\frac{1}{\|A^{-1}\|}\le\frac{\|b\|}{\|x\|}\le\|A\|$.

מסקנה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ותהיינה $b,r,x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$ באשר $Ax=b$ וכן $A\tilde{x}=b+r$ אזי $\frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|}\le\frac{\|e\|}{\|r\|}\cdot\frac{\|b\|}{\|x\|}\le\|A\|\left\|A^{-1}\right\|$.

מספר המצב של מטריצה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית ותהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\text{cond}(A)=\|A\|\left\|A^{-1}\right\|$.

שגיאה יחסית של מערכת משוואות: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ותהיינה $b,r,x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$ באשר $Ax=b$ וכן $A\tilde{x}=b+r$ אזי

- $\delta(x)=\frac{\|e\|}{\|x\|}$.
- $\delta(b)=\frac{\|r\|}{\|b\|}$.

טענה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ותהיינה $b,r,x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$ באשר $Ax=b$ וכן $A\tilde{x}=b+r$ אזי $\delta(x)\in\left[\frac{\delta(b)}{\text{cond}(A)},\text{cond}(A)\,\delta(b)\right]$.

טענה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית ותהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי $\text{cond}(A)\ge\left|\frac{\max\text{spec}(A)}{\min\text{spec}(A)}\right|$.

מסקנה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית ותהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\text{cond}(A)\ge1$.

טענה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית ותהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ באשר B אינה הפיכה וכן $A\ne B$ אזי $\text{cond}(A)\ge\frac{\|A\|}{\|A-B\|}$.

טענה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית ותהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\text{cond}(A)=\max\left\{\frac{\|A\|}{\|A-B\|}\;\middle|\;\det(B)=0\right\}$.

מסקנה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית ותהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\text{cond}(A)=\frac{\|A\|}{\min\{\|A-B\|\mid\det(B)=0\}}$.

טענה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ותהיינה $b,r,x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$ באשר $Ax=b$ וכן $A\tilde{x}=b+r$ וכן b ו"ע של $\max\text{spec}(A)$ וכן r ו"ע של $\min\text{spec}(A)$ אזי $\delta(x)=\left|\frac{\max\text{spec}(A)}{\min\text{spec}(A)}\right|\cdot\delta(b)$.

טענה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית ותהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\text{cond}(AB)\le\text{cond}(A)\cdot\text{cond}(B)$.

שגיאה של מערכת משוואות: תהיינה $A,R\in M_n(\mathbb{R})$ ותהיינה $b,x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$ באשר $Ax=b$ וכן $(A+R)\tilde{x}=b$ אזי $e=\tilde{x}-x$.

מסקנה: תהיינה $A,R\in M_n(\mathbb{R})$ ותהיינה $b,x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$ באשר $Ax=b$ וכן $(A+R)\tilde{x}=b$ אזי $Ae=-R\tilde{x}$.

מסקנה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהיינה $A,R\in M_n(\mathbb{R})$ באשר A הפיכה ותהיינה $b,x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$ באשר $Ax=b$ וכן $(A+R)\tilde{x}=b$ אזי $\|e\|\le\left\|A^{-1}\right\|\|R\|\|\tilde{x}\|$.

מסקנה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהיינה $A,R\in M_n(\mathbb{R})$ באשר A הפיכה ותהיינה $b,x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$ באשר $Ax=b$ וכן $(A+R)\tilde{x}=b$ אזי $\text{cond}(A)\le\frac{\|e\|}{\|B\|}\cdot\frac{\|A\|}{\|\tilde{x}\|}$.

שגיאה של מערכת משוואות: תהיינה $A,R\in M_n(\mathbb{R})$ ותהיינה $b,r,x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$ באשר $Ax=b$ וכן $(A+R)\tilde{x}=b+r$ אזי $e=\tilde{x}-x$.

משפט: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהיינה $A,R\in M_n(\mathbb{R})$ באשר A הפיכה ותהיינה $b,r,x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$ באשר $Ax=b$ וכן $(A+R)\tilde{x}=b+r$ וכן $\|B\|\le\frac{1}{\|A^{-1}\|}$ אזי $\frac{\|e\|}{\|x\|}\le\frac{\text{cond}(A)}{1-\text{cond}(A)\left(\frac{\|B\|}{\|A\|}\right)}\left(\frac{\|B\|}{\|A\|}+\frac{\|r\|}{\|b\|}\right)$.

טענה: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ משולשית עליונה והפיכה אזי אלגוריתם גאוס לדירוג בעל סיבוכיות זמן $\mathcal{O}\left(n^2\right)$.

טענה: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי אלגוריתם גאוס לדירוג בעל סיבוכיות זמן $\mathcal{O}\left(n^3\right)$.

משפט פירוק LU: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי קיימות $L,U\in M_n(\mathbb{R})$ באשר U משולשית עליונה וכן L משולשית תחתונה עם 1 על האלכסון הראשי עבורן $A=LU$.

סימון: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי $U_A\in M_n(\mathbb{R})$ המטריצה המשולשית העליונה הראשונה המתקבלת באלגוריתם גאוס.

סימון: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי $L_A\in M_n(\mathbb{R})$ המוגדרת $(L_A)_{i,j}=\frac{(U_A)_{i,j}}{(U_A)_{j,j}}$ באשר $i>j$.

טענה: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי L_A,U_A פירוק LU של A.

אלגוריתם גאוס עם הצרה חלקית: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ויהי $b\in\mathbb{R}^n$ אזי

```
function GaussPartialPivoting(A, b):
    B ← (A|b)
    for i ← [1, ..., n] do
        m ← arg max{(A)_{i,j} | j ∈ [n]}
        [R_1(B), R_m(B)] ← [R_m(B), R_1(B)]
        for j ← [i+1, ..., n] do
            R_j(B) ← R_i(B) − ((A)_{i,j} / (A)_{i,i}) · R_i(B)
        end
        R_i(B) ← (1 / (A)_{i,i}) · R_i(B)
    end
    return (C_1(B) ... C_n(B)), C_{n+1}(B)
```

טענה: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ויהי $b\in\mathbb{R}^n$ באשר A,b מיוצגים בעזרת נקודה צפה אזי $e(\text{GaussPartialPivoting}(A,b))\le e(\text{GaussElimination}(A,b))$ במציאת פתרון למשוואה $Ax=b$.

משפט פירוק QR: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי קיימות $Q,R\in M_n(\mathbb{R})$ באשר Q אורתוגונלית וכן R משולשית עליונה עבורן $A=QR$.

סימון: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ותהא $v_1\dots v_n\in\mathbb{R}^n$ תוצאת גרם־שמידט על $C_1(A),\dots,C_n(A)$ אזי $Q_A=\begin{pmatrix}| & & |\\ v_1 & \cdots & v_n\\ | & & |\end{pmatrix}$.

סימון: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי $R_A\in M_n(\mathbb{R})$ המוגדרת $(R_A)_{i,j}=\langle C_j(A),C_i(Q_A)\rangle$ באשר $i\le j$.

טענה: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי Q_A,R_A פירוק QR של A.

טענה: תהא $Q\in M_n(\mathbb{R})$ אורתוגונלית אזי $\text{cond}(Q)=1$ בנורמה המושרית הסטנדרטית.

סימון: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $i\in[n]$ אזי $r_i=\sum_{j\in[n]\setminus\{i\}}\left|(A)_{i,j}\right|$.

משפט העיגולים של גרשגורין: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ אזי לכל $\lambda\in\text{spec}(A)$ קיים $i\in[n]$ עבורו $\left|\lambda-(A)_{i,i}\right|\le r_i$.

מסקנה: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $\lambda\in\text{spec}(A)$ אזי
$\min_{i\in[n]}\left(\left|(A)_{i,i}-r_i\right|\right)\le|\lambda|\le\rho(A)\le\max_{i\in[n]}\left(\left|(A)_{i,i}-r_i\right|\right)=\|A\|_\infty$.

מטריצה בעלת אלכסון דומיננטי בשורות: מטריצה $A\in M_n(\mathbb{R})$ עבורה לכל $i\in[n]$ מתקיים $\left|(A)_{i,i}\right|>r_i$.

מסקנה: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ בעלת אלכסון דומיננטי בשורות אזי A הפיכה.

טענה: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ באשר $\rho(A)<1$ ויהי $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ אזי $c(A-I)$ הפיכה.

מנת רליי: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\sigma:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $\sigma(x)=\frac{x^TAx}{x^Tx}$.

טענה: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ יהי $\lambda\in\text{spec}(A)$ ויהי $v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ ו"ע של λ אזי $\sigma(v)=\lambda$.

טענה: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ אזי $\sigma(v)=v^TAv$.

משפט שיטת החזקה: יהיו $\lambda_2,\dots,\lambda_m\in\mathbb{C}$ באשר $|\lambda_i|\ge|\lambda_j|$ לכל $i<j$ יהי $\lambda_1\in\mathbb{R}$ באשר $|\lambda_1|>|\lambda_2|$ יהיו $v_1\dots v_m\in\mathbb{R}^n$ יהיו $C_1\dots C_m\in\mathbb{R}$ באשר $C_1\neq0$ ותהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ עבורה $v_1\dots v_m$ קבוצת ו"ע בת"ל מקסימלית וכן v_i ו"ע של λ_i לכל $i\in[m]$

אזי

- $\lim_{k\to\infty}\sigma\left(A^k\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}C_iv_i\right)\right)=\lambda_1$.
- קיים $\alpha\in\mathbb{R}$ עבורו $\left|\sigma\left(A^k\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}C_iv_i\right)\right)-\lambda_1\right|\le\alpha\cdot\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$ לכל $k\in\mathbb{N}$.
- אם A סימטרית אזי קיים $\alpha\in\mathbb{R}$ עבורו $\left|\sigma\left(A^k\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}C_iv_i\right)\right)-\lambda_1\right|\le\alpha\cdot\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}$ לכל $k\in\mathbb{N}$.
- $\lim_{k\to\infty}\frac{A^k\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}C_iv_i\right)}{\lambda_1^k}=C_1v_1$.

טענה: יהיו $\lambda_2,\ldots,\lambda_m\in\mathbb{C}$ באשר $|\lambda_i|\ge|\lambda_j|$ לכל $i<j$ יהי $\lambda_1\in\mathbb{R}$ באשר $|\lambda_1|>|\lambda_2|$ יהיו $v_1\ldots v_m\in\mathbb{R}^n$ יהיו $C_1\ldots C_m\in\mathbb{R}$ באשר $C_1\neq 0$ ותהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ עבורה $v_1\ldots v_m$ קבוצת ו"ע בת"ל מקסימלית וכן v_i ו"ע של λ_i לכל $i\in[m]$ אזי $\lim_{k\to\infty}\frac{\left\|A^{k+1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}C_iv_i\right)\right\|_2}{\left\|A^{k}\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}C_iv_i\right)\right\|_2}=|\lambda_1|$.

משפט שיטת החזקה ההפוכה: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ יהי $\mu\in\mathbb{R}\backslash\mathrm{spec}(A)$ ויהי $\lambda\in\mathrm{spec}(A)$ עם ו"ע $v\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ אזי $(A-\mu I)^{-1}v=\frac{1}{\lambda-\mu}v$.

פירוק SVD: תהא $A\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ אזי $A=U\Sigma V^T$ באשר $V\in M_n(\mathbb{R})$ אורתוגונלית וכן $U\in M_m(\mathbb{R})$ אורתוגונלית וכן $\Sigma\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ אלכסונית אי־שלילית עבורה $(\Sigma)_{i,i}\le(\Sigma)_{j,j}$ לכל $i\ge j$.

ערכים סינגולריים: תהא $A\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ ויהי $A=U\Sigma V^T$ פירוק SVD אזי $\mathrm{Sing}(A)=\left\{(\Sigma)_{i,i}\mid i\in[\min\{n,m\}]\right\}$.

וקטורים סינגולריים ימניים: תהא $A\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ ויהי $A=U\Sigma V^T$ פירוק SVD אזי $\{C_i(V)\mid i\in[n]\}$.

וקטורים סינגולריים שמאליים: תהא $A\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ ויהי $A=U\Sigma V^T$ פירוק SVD אזי $\{C_i(U)\mid i\in[m]\}$.

טענה: תהא $A\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ אזי $\mathrm{spec}\left(AA^T\right)\cup\{0\}=\mathrm{spec}\left(A^TA\right)\cup\{0\}$.

טענה: תהא $A\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ בעלת פירוק SVD אזי $\mathrm{spec}\left(A^TA\right)\cup\{0\}=\left\{\sigma^2\mid\sigma\in\mathrm{Sing}(A)\right\}\cup\{0\}$.

טענה: תהא $A\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ בעלת פירוק SVD אזי הוקטורים הסינגולריים הימניים של A הם ו"ע של A^TA.

טענה: תהא $A\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ בעלת פירוק SVD אזי הוקטורים הסינגולריים השמאליים של A הם ו"ע של AA^T.

סימון: תהא $A\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ יהי $A=U\Sigma V^T$ פירוק SVD ויהי $i\in[\min\{n,m\}]$ עבורו הע"ע של $C_i(V)$ בתור ו"ע של A^TA שווה לע"ע של $C_i(U)$ בתור ו"ע של AA^T אזי $C_i(V)\sim C_i(U)$.

טענה: תהא $A\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ ויהי $A=U\Sigma V^T$ פירוק SVD אזי $\{A\cdot C_i(V)\mid(i\in[\min\{n,m\}])\wedge(C_i(V)\sim C_i(U))\}$ אורתוגונליים וכן הינם ו"ע של AA^T.

אלגוריתם למציאת פירוק SVD: יהיו $m,n\in\mathbb{N}_+$ באשר $n\ge m$ ותהא $A\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ אזי

function SVD(A):
- $(V,D)\leftarrow\mathrm{OrthogonalDiagonalization}(A^TA)$ // such that $\forall i\le j\in[n].(D)_{i,i}\ge(D)_{j,j}$
- $S\leftarrow\sqrt{D}$
- $\Sigma\leftarrow M_{m\times n}(\mathbb{R})$
- **for** $i\in[m]$ **do**
  - **for** $j\in[n]$ **do**
    - $(\Sigma)_{i,j}\leftarrow(S)_{i,j}$
  - **end**
- **end**
- $U\leftarrow M_m(\mathbb{R})$
- $U\leftarrow\mathrm{GrahamSchmidt}\left(\frac{1}{(S)_{1,1}}A\cdot C_1(V),\ldots,\frac{1}{(S)_{\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(A)}}A\cdot C_{\mathrm{rank}(A)}(V)\right)$
- **return** (U,Σ,V^T)

משפט: תהא $A\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ אזי A בעלת פירוק SVD.

משפט יחידות פירוק SVD: תהא $A\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ ויהי $A=U\Sigma V^T$ פירוק SVD באשר $(\Sigma)_{i,i}\neq(\Sigma)_{j,j}$ לכל $i\neq j$ אזי קיים ויחיד פירוק SVD עד כדי סימן הוקטורים הסנגולריים.

משפט יחידות פירוק SVD: תהא $A\in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ ויהי $A=U\Sigma V^T$ פירוק SVD באשר $(\Sigma)_{i,i}\neq(\Sigma)_{j,j}$ לכל $i\neq j$ אזי קיים ויחיד פירוק SVD עד כדי הכפלת הוקטורים הסנגולריים ב־$\{1,-1,i,-i\}$.

מסקנה: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית אזי $\mathrm{Sing}(A)=\{|\lambda|\mid\lambda\in\mathrm{spec}(A)\}$.