רישום קבוצה בעזרת רשימת איברים: $\{a_1,\dots,a_n\}$ מתקיים $((a=a_1)\vee\dots\vee(a=a_n))\Longleftrightarrow(a\in\{a_1,\dots,a_n\})$.

סימון: תהא Σ קבוצה אזי $\Sigma^*=\bigcup_{i=0}^{\infty}\Sigma^i$.

טענה: תהא Σ קבוצה תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי קיימת ויחידה $S\subseteq\Sigma^*$ המקיימת

- $B\subseteq S$.
- S סגורה להפעלת F.
- מינימליות: תהא $A\subseteq\Sigma^*$ עבורה $B\subseteq A$ וכן A סגורה להפעלת F אזי $S\subseteq A$.

אינדוקציה מבנית: תהא Σ קבוצה תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי $X_{B,F}\subseteq\Sigma^*$ מינימלית סגורה להפעלת F עבורה $B\subseteq X_{B,F}$.

עולם באינדוקציה מבנית: תהא Σ קבוצה תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי Σ.

בסיס באינדוקציה מבנית: תהא Σ קבוצה תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי B.

טענה: תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי $X_{B,F}=\bigcap\{Y\subseteq\Sigma^*\mid(B\subseteq Y)\wedge(F\text{ סגורה להפעלת }Y)\}$.

אינווריאנטה: יהי עולם Σ תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי $Y\subseteq\Sigma^*$ סגורה להפעלת F עבורה $B\subseteq Y$.

מסקנה הוכחה באינדוקציה מבנית: יהי עולם Σ ותהא $Y\subseteq\Sigma^*$ אינווריאנטה אזי $X_{B,F}\subseteq Y$.

מסקנה משפט האינדוקציה: תהא p טענה על $\mathbb{N}$ אזי $(p(0)\wedge(\forall n\in\mathbb{N}.p(n)\Longrightarrow p(n+1)))\Longrightarrow(\forall n\in\mathbb{N}.p(n))$.

סדרת יצירה: יהי $a\in X_{B,F}$ אזי $(a_1,\dots,a_n)$ עבורה $a_n=a$ וכן לכל $i\in[n]$ מתקיים $(a_i\in B)\vee(a_i$ מתקבל על ידי הפעלת F על חלק מ־$\{a_1,\dots,a_{i-1}\})$.

טענה: יהי $a\in\Sigma^*$ אזי $(a\in X_{B,F})\Longleftrightarrow($קיימת סדרת יצירה ל־$a)$.

מסקנה: $X_{B,F}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{a\in\Sigma^*\mid n$ בעלת סדרת יצירה באורך $a\}$.

עולם תחשיב הפסוקים: $\Sigma=\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow,(,)\}\cup\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$.

ביטוי: יהי Σ תחשיב הפסוקים אזי $a\in\Sigma^*$.

הגדרה: יהיו $\omega_1,\omega_2\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$ אזי

- $\wedge(\omega_1,\omega_2)="(\omega_1\wedge\omega_2)"$.
- $\vee(\omega_1,\omega_2)="(\omega_1\vee\omega_2)"$.
- $\Longrightarrow(\omega_1,\omega_2)="(\omega_1\Longrightarrow\omega_2)"$.
- $\neg(\omega_1)="(\neg\omega_1)"$.

קבוצת הנוסחאות המוגדרות היטב/ביטוי חוקי/פסוק: $\text{WFF}=X_{\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}}$.

פסוק אטומי/יסודי: $p\in\text{WFF}$ עבורו $p\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$.

טענה: יהי $p\in\text{WFF}$ אזי $(p$ פסוק אטומי$)\vee($הפסוק p מתחיל עם "(" ונגמר עם "$)$").

מסקנה: יהיו $q_1,q_2\in\text{WFF}$ אזי $q_1(q_2\notin\text{WFF}$.

משפט הקריאה היחידה: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- α פסוק אטומי.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\wedge\gamma)$.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\vee\gamma)$.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\Longrightarrow\gamma)$.
- קיים ויחיד $\beta\in\text{WFF}$ עבורו $\alpha=(\neg\beta)$.

מסקנה אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי Σ תחשיב הפסוקים ויהי $\alpha\in\Sigma^*$ אזי

```
function wffValidity(α):
    if length(α) ≤ 3 then
        if α ∈ {p_i | i ∈ ℕ} then  return True
        else  return False
    if (α_1 ≠ "(") ∨ (α_length(α) ≠ ")") then  return False
    if α_2 = "¬" then  return wffValidity((α_3 ... α_length(α)−1))
    parenthesisCount ← 0
    for i ← [2, ..., length(α) − 1] do
        if α_i = "(" then  parenthesisCount ← parenthesisCount + 1
        if α_i = ")" then  parenthesisCount ← parenthesisCount − 1
        if parenthesisCount = 0 then
            if α_{i+1} ∈ {¬, ∧, ∨, ⟹} then
                return (wffValidity((α_2 ... α_i))) ∧ (wffValidity((α_{i+2} ... α_length(α)−1)))
    end
    return False
```

טענה: יהי Σ תחשיב הפסוקים ויהי $\alpha \in \Sigma^*$ אזי $(\alpha \in \text{WFF}) \iff (\text{wffValidity}(\alpha))$.

טענה: יהי Σ תחשיב הפסוקים ויהי $\alpha \in \Sigma^*$ אזי $\text{wffValidity}(\alpha)$ רץ בסיבוכיות זמן $\mathcal{O}(\text{length}(\alpha))$.

הערה סדר קדימות של קשרים: נגדיר סדר ביצוע פעולות

1. $\neg$.
2. $\wedge, \vee$.
3. $\Longrightarrow$.

סימון אמת: T, true.

סימון שקר: F, false.

טבלת אמת: טבלה אשר מסכמת את אמיתיותו של פסוק בשינוי ערכם של פסוקי היסוד בו.

הגדרה: יהיו p, q פסוקים אזי

q	p	$q \vee p$
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

q	p	$q \wedge p$
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	false

q	p	$q \Longrightarrow p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

q	$\neg q$
true	false
false	true

סימון: תהא $\circ \in \{\wedge, \vee, \neg, \Longrightarrow\}$ אזי טבלת האמת של $\circ$ הינה $TT_\circ$.

השמה: פונקציה $v : \{p_i\} \to \{F, T\}$.

השמת ערך אמת לפסוק: תהא v השמה אזי פונקציה $\overline{v} : \text{WFF} \to \{F, T\}$ המוגדרת

- יהי p פסוק אטומי אזי $\overline{v}(p) = v(p)$.
- יהי α פסוק אזי $\overline{v}(\neg\alpha) = TT_\neg(\overline{v}(\alpha))$.
- יהיו β, γ פסוקים ותהא $\circ$ פעולה בינארית אזי $\overline{v}(\beta \circ \gamma) = TT_\circ(\overline{v}(\beta), \overline{v}(\gamma))$.

השמה מספקת פסוק: תהא v השמה אזי $\alpha \in \text{WFF}$ עבורה $\overline{v}(\alpha) = T$.

סימון: תהא v השמה ותהא $\alpha \in \text{WFF}$ מסופקת על ידי v אזי $v \models \alpha$.

סימון: תהא v השמה ותהא $\alpha \in \text{WFF}$ לא מסופקת על ידי v אזי $v \not\models \alpha$.

הפסוקים האטומיים בפסוק: פונקציה $\text{Var} : \text{WFF} \to \mathcal{P}(\{p_i\})$ המוגדרת

- יהי p פסוק אטומי אזי $\text{Var}(p) = \{p\}$.
- יהי α פסוק אזי $\text{Var}(\neg\alpha) = \text{Var}(\alpha)$.
- יהיו β, γ פסוקים ותהא $\circ$ פעולה בינארית אזי $\text{Var}(\beta \circ \gamma) = \text{Var}(\beta) \cup \text{Var}(\gamma)$.

משפט התלות הסופית: תהיינה v_1, v_2 השמות ויהי $\alpha \in \text{WFF}$ עבורו $\forall p \in \text{Var}(\alpha) . v_1(p) = v_2(p)$ אזי $\overline{v_1}(\alpha) = \overline{v_2}(\alpha)$.

מסקנה: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ אזי ניתן לייצג את α על ידי TT_α.

מערכת קשרים שלמה פונקציונלית: קבוצה $K \subseteq \{\wedge, \vee, \neg, \Longrightarrow\}$ עבורה לכל טבלת אמת TT קיים $\alpha \in \mathrm{WFF}$ עבורו $TT = TT_\alpha$.

טענה: $\{\wedge, \vee, \neg, \Longrightarrow\}$ שלמה פונקציונלית.

טענה: תהא K מערכת קשרים עבורה $\neg, \wedge, \vee \in K$ אזי K שלמה פונקציונלית.

פסוק ספיק: פסוק $\alpha \in \mathrm{WFF}$ עבורו קיימת השמה v המקיימת $v \models \alpha$.

טאוטולוגיה: פסוק $\alpha \in \mathrm{WFF}$ עבורו לכל השמה v מתקיים $v \models \alpha$.

סימון: יהי $\alpha \in \mathrm{WFF}$ טאוטולוגיה אזי $\models \alpha$.

סתירה: פסוק $\alpha \in \mathrm{WFF}$ עבורו $\models (\neg\alpha)$.

פסוקים שקולים: פסוקים $\alpha, \beta \in \mathrm{WFF}$ עבורם לכל השמה v מתקיים $\overline{v}(\alpha) = \overline{v}(\beta)$.

סימון: יהיו $\alpha, \beta \in \mathrm{WFF}$ שקולים אזי $\alpha \equiv \beta$.

קבוצה ספיקה: קבוצה $\Gamma \subseteq \mathrm{WFF}$ עבורה קיימת השמה v עבורה לכל $\alpha \in \Gamma$ מתקיים $v \models \alpha$.

סימון: תהא $\Gamma \subseteq \mathrm{WFF}$ קבוצה ספיקה על ידי השמה v אזי $v \models \Gamma$.

פסוק נובע סמנטית: תהא $\Gamma \subseteq \mathrm{WFF}$ אזי $\alpha \in \mathrm{WFF}$ עבורו לכל השמה v המקיימת $v \models \Gamma$ מתקיים $v \models \alpha$.

סימון: תהא $\Gamma \subseteq \mathrm{WFF}$ ויהי $\alpha \in \mathrm{WFF}$ פסוק נובע סמנטית מ־Γ אזי $\Gamma \models \alpha$.

טענה: יהיו $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{WFF}$ אזי

- $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \equiv (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$.
- $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \equiv (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$.
- $(\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha)$.
- $(\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha)$.
- $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.
- $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$.
- $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$.
- $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee (\neg\beta)$.
- $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)$.
- $(\alpha \Longrightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee \beta$.

למה: יהי $\gamma \in \mathrm{WFF}$ סתירה אזי לכל $\alpha \in \mathrm{WFF}$ מתקיים $\gamma \models \alpha$.

טענה: תהא $\Gamma \subseteq \mathrm{WFF}$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathrm{WFF}$ עבורם $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ וכן $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \beta$ אזי $\Gamma \models \beta$.

טענה: תהא $\Gamma \subseteq \mathrm{WFF}$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathrm{WFF}$ עבורם $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ וכן $\Gamma \cup \{\alpha\} \models (\neg\beta)$ אזי $\Gamma \models (\neg\alpha)$.

טענה: יהיו $\alpha, \beta \in \mathrm{WFF}$ אזי $(\alpha \models \beta) \Longleftrightarrow (\models (\alpha \Longrightarrow \beta))$.

הצבת פסוק בפסוק: יהיו $\alpha, \varphi \in \mathrm{WFF}$ ויהי p פסוק אטומי אזי

- אם $\alpha = p$ אזי $\alpha[\varphi/p] = \varphi$.
- אם α פסוק אטומי וכן $\alpha \neq p$ אזי $\alpha[\varphi/p] = \alpha$.
- אם קיים $\beta \in \mathrm{WFF}$ עבורו $\alpha = \neg\beta$ אזי $\alpha[\varphi/p] = \neg\beta[\varphi/p]$.
- אם קיימים $\beta, \gamma \in \mathrm{WFF}$ וקיימת פעולה בינארית $\circ$ עבורה $\alpha = \beta \circ \gamma$ אזי $\alpha[\varphi/p] = \beta[\varphi/p] \circ \gamma[\varphi/p]$.

טענה: יהיו $\alpha, \varphi \in \mathrm{WFF}$ ויהי $p \in \mathrm{Var}(\alpha)$ אזי $\alpha[\varphi/p] \in \mathrm{WFF}$.

הצבת פסוקים בפסוק: יהיו $\alpha, \varphi_1 \ldots \varphi_n \in \mathrm{WFF}$ ויהיו $p_1 \ldots p_n$ פסוקים אטומים אזי

- אם $\alpha = p_i$ עבור $i \in [n]$ אזי $\alpha[\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n] = \varphi_i$.
- אם α פסוק אטומי וכן $\alpha \neq p_i$ לכל $i \in [n]$ אזי $\alpha[\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n] = \alpha$.
- אם קיים $\beta \in \mathrm{WFF}$ עבורו $\alpha = \neg\beta$ אזי $\alpha[\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n] = \neg\beta[\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n]$.
- אם קיימים $\beta, \gamma \in \mathrm{WFF}$ וקיימת פעולה בינארית $\circ$ עבורה $\alpha = \beta \circ \gamma$ אזי $\alpha[\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n] = \beta[\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n] \circ \gamma[\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n]$.

סימון: יהיו $\alpha, \varphi \in \mathrm{WFF}$ יהי p_i פסוק אטומי ותהא v השמה אזי ההשמה $v\left[\overline{v}(\varphi)/p_i\right](p_j) = \begin{cases} v(p_j) & i \neq j \\ \overline{v}(\varphi) & i = j \end{cases}$.

טענה: יהיו $\alpha, \varphi \in \mathrm{WFF}$ יהי p פסוק אטומי ותהא v השמה אזי $\overline{v}(\alpha(\varphi/p)) = \overline{v\left[\overline{v}(\varphi)/p\right]}(\alpha)$.

סימון: יהיו $\alpha, \varphi_1 \ldots \varphi_n \in \mathrm{WFF}$ יהיו $p_1 \ldots p_n$ פסוקים אטומים ותהא v השמה אזי ההשמה $v\left[\overline{v}(\varphi_1)/p_1, \ldots, \overline{v}(\varphi_1)/p_1\right](p_j) = \begin{cases} v(p_j) & j \notin [n] \\ \overline{v}(\varphi_j) & j \in [n] \end{cases}$.

מסקנה הקשר בין הצבות לעדכוני שמות: יהיו $\alpha,\varphi_1\ldots\varphi_n\in\text{WFF}$ יהיו $p_1\ldots p_n$ פסוקים אטומים ותהא v השמה אזי $\overline{v}\left(\alpha\left[\varphi_1/p_1\ldots\varphi_n/p_n\right]\right)=\overline{v\left[\overline{v}(\varphi_1)/p_1,\ldots,\overline{v}(\varphi_1)/p_1\right]}\left(\alpha\right)$.

מסקנה: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ טאוטולוגיה יהיו $\varphi_1\ldots\varphi_n\in\text{WFF}$ יהיו $p_1\ldots p_n$ פסוקים אטומים אזי $\alpha\left[\varphi_1/p_1\ldots\varphi_n/p_n\right]$ טאוטולוגיה.

הצורה הנורמלית NNF: $\text{NNF}=X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee\}}$.

משפט: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ אזי קיים $\beta\in\text{NNF}$ עבורו $\alpha\equiv\beta$.

סימון: $\text{Conj}=X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge\}}$.

הצורה הנורמלית DNF: $\text{DNF}=X_{\text{Conj},\{\vee\}}$.

משפט: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ אזי קיים $\beta\in\text{DNF}$ עבורו $\alpha\equiv\beta$.

סימון: $\text{Disj}=X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\vee\}}$.

הצורה הנורמלית CNF: $\text{CNF}=X_{\text{Disj},\{\wedge\}}$.

משפט: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ אזי קיים $\beta\in\text{CNF}$ עבורו $\alpha\equiv\beta$.

מערכת הוכחה: יהי Σ אלפבית תהא $N\subseteq\Sigma^*$ תהא $A\subseteq N$ ותהא $F\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(N^n\to N\right)$ אזי (Σ,N,A,F).

הערה: בקורס זה כל מערכות ההוכחה יהיו מעל האלפבית של תחשיב הפסוקים.

נוסחאות של מערכת הוכחה: תהא (Σ,N,A,F) מערכת הוכחה אזי N.

אקסיומות של מערכת הוכחה: תהא (Σ,N,A,F) מערכת הוכחה אזי A.

כללי היסק של מערכת הוכחה: תהא (Σ,N,A,F) מערכת הוכחה אזי F.

קבוצת המשפטים: תהא (Σ,N,A,F) מערכת הוכחה אזי $X_{A,F}$.

סימון: תהא S מערכת הוכחה ויהי $\varphi\in N$ משפט אזי $\underset{S}{\vdash}\varphi$.

מערכת הוכחה בעלת הנחות: תהא (Σ,N,A,F) מערכת הוכחה ותהא $\Gamma\subseteq N$ אזי (Σ,N,A,F,Γ).

קבוצת הטענות היכיחות מהנחות: תהא (Σ,N,A,F,Γ) מערכת הוכחה בעלת הנחות אזי $X_{A\cup\Gamma,F}$.

הגדרה הוכחה: תהא (Σ,N,A,F,Γ) מערכת הוכחה בעלת הנחות ויהי $\varphi\in N$ יכיח אזי סדרת יצירה של φ.

סימון: תהא S מערכת הוכחה תהיינה $\Gamma\subseteq N$ הנחות ויהי $\varphi\in N$ יכיח אזי $\Gamma\underset{S}{\vdash}\varphi$.

טענה: תהא S מערכת הוכחה ויהי $\varphi\in N$ אזי

- מונוטוניות: תהא $\Delta\subseteq N$ עבורה $\Delta\underset{S}{\vdash}\varphi$ ותהא $\Delta\subseteq\Gamma$ אזי $\Gamma\underset{S}{\vdash}\varphi$.
- קומפקטיות: תהא $\Gamma\subseteq N$ עבורה $\Gamma\underset{S}{\vdash}\varphi$ אזי קיימת $\Delta\subseteq\Gamma$ סופית עבורה $\Delta\underset{S}{\vdash}\varphi$.
- טרנזיטיביות: תהיינה $\Delta,\Gamma\subseteq N$ באשר $\Delta\underset{S}{\vdash}\varphi$ וכן לכל $\alpha\in\Delta$ מתקיים $\Gamma\underset{S}{\vdash}\alpha$ אזי $\Gamma\underset{S}{\vdash}\varphi$.

סימון: תהא S מערכת הוכחה ויהי $f\in F$ כלל היסק המקיים $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=y$ אזי $f:\frac{x_1\ldots x_n}{y}$.

כלל הניתוק (Modus Ponens): תהא (Σ,N,A,F) מערכת הוכחה אזי $\text{MP}:\frac{(\alpha\Longrightarrow\beta),\alpha}{\beta}$.

מערכת ההוכחה של הילברט (HPC): נגדיר מערכת הוכחה כך

- אלפבית: $\Sigma=\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}\cup\{\neg,\Longrightarrow,(,)\}$.
- נוסחאות: $N=X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\},\{\neg,\Longrightarrow\}}$.
- אקסיומות:
  - $A_1=(\alpha\Longrightarrow(\beta\Longrightarrow\alpha))$.
  - $A_2=((\alpha\Longrightarrow(\beta\Longrightarrow\gamma))\Longrightarrow((\alpha\Longrightarrow\beta)\Longrightarrow(\alpha\Longrightarrow\gamma)))$.
  - $A_3=(((\neg\alpha)\Longrightarrow(\neg\beta))\Longrightarrow(\beta\Longrightarrow\alpha))$.
- כללי היסק: $F=\{\text{MP}\}$.

טענה: יהיו α,β נוסחאות ב־HPC אזי

- $\underset{\text{HPC}}{\vdash}(\alpha\Longrightarrow\alpha)$.
- $\underset{\text{HPC}}{\vdash}((\neg\alpha)\Longrightarrow(\alpha\Longrightarrow\beta))$.
- $\{\neg\alpha\}\underset{\text{HPC}}{\vdash}(\alpha\Longrightarrow\beta)$.

מסקנה: יהיו α,β נוסחאות ב־HPC באשר $\underset{\text{HPC}}{\vdash}(\neg\alpha)$ אזי $\{\alpha\}\underset{\text{HPC}}{\vdash}\beta$.

הערה: בקורס זה ניתן להניח כי הסימון $\vdash$ הוא במערכת HPC.

משפט הדידוקציה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α,β נוחסאות מעל HPC אזי $(\Gamma\vdash(\alpha\Longrightarrow\beta))\Longleftrightarrow(\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta)$.

סימון: תהא מערכת הוכחה S ותהא $\Gamma\subseteq N$ אזי $\text{Ded}\left(\Gamma\right)=\{\alpha\in N\mid\Gamma\vdash\alpha\}$.

טענה: תהא α נוסחה מעל HPC אזי $\vdash((\neg(\neg\alpha))\Longrightarrow\alpha)$.

למה: אקסיומות HPC הינן טאוטולוגיות.

משפט הנאותות: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $\left(\Gamma \underset{\text{HPC}}{\vdash} \alpha\right) \Longrightarrow (\Gamma \models \alpha)$.

למה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α, β, γ נוסחאות מעל HPC אזי $((\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \wedge (\Gamma \vdash (\beta \Longrightarrow \gamma))) \Longrightarrow (\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \gamma))$.

משפט הדיכוטומיה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α, β נוסחאות מעל HPC אזי $((\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta) \wedge (\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta)) \Longrightarrow (\Gamma \vdash \beta)$.

קבוצת הנחות עקבית: תהא מערכת הוכחה S אזי Γ קבוצת הנחות מעל S עבורה קיימת α נוסחה מעל S המקיימת $\Gamma \underset{S}{\nvdash} \alpha$.

טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה Γ הנחות מעל S אזי (Γ אינה עקבית)$\Longleftrightarrow$(קיימת α נוסחה מעל S המקיימת $\left(\Gamma \underset{S}{\vdash} (\neg\alpha)\right) \wedge \left(\Gamma \underset{S}{\vdash} \alpha\right)$).

טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה Γ הנחות מעל S אזי (Γ עקבית)$\Longleftrightarrow$(לכל $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית מתקיים כי Δ עקבית).

קבוצת הנחות עקבית מקסימלית: תהא מערכת הוכחה S אזי Γ קבוצת הנחות עקבית מעל S עבורה לכל Δ קבוצת הנחות עקבית מעל S המקיימת $\Delta \subseteq \Gamma$ מתקיים $\Gamma = \Delta$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC עבורה $\Gamma \vdash \alpha$ אזי $\alpha \in \Gamma$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $(\alpha \in \Gamma) \vee (\neg\alpha \in \Gamma)$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהיינה α, β נוסחאות מעל HPC אזי $(\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longleftrightarrow ((\neg\alpha \in \Gamma) \vee (\beta \in \Gamma))$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC אזי Γ ספיקה.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי קיימת קבוצת הנחות עקבית מקסימלית Δ עבורה $\Gamma \subseteq \Delta$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי Γ ספיקה.

מסקנה: תהא Γ קבוצת הנחות מעל HPC אזי (Γ עקבית)$\Longleftrightarrow$(Γ ספיקה).

משפט השלמות: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $\left(\Gamma \underset{\text{HPC}}{\vdash} \alpha\right) \Longleftarrow (\Gamma \models \alpha)$.

מסקנה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $(\Gamma \vdash \alpha) \Longleftrightarrow (\Gamma \models \alpha)$.

משפט הקומפקטיות: תהא Γ קבוצת הנחות מעל HPC אזי (Γ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(לכל $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית Δ ספיקה).

סימון: תהא $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ אזי $\text{Ass}(\Gamma) = \{v \in \{p_i\} \to \{F, T\} \mid v \models \Gamma\}$.

טענה: הקבוצה $\{(\{p_i\} \to \{F, T\}) \backslash \text{Ass}(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \text{WFF}\}$ הינה טופולוגיה על $\{p_i\} \to \{F, T\}$.

טענה: הטופולוגיה $\{(\{p_i\} \to \{F, T\}) \backslash \text{Ass}(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \text{WFF}\}$ הינה קומפקטית.

הגדרה: יהי G גרף פשוט לא מכוון תהא $f : V \to \text{WFF}$ חח"ע ויהיו $(v, u) \in E$ אזי $\varphi_G : E \to \text{WFF}$ כך $\varphi_G((v, u)) = \text{"}f(v) \Longrightarrow f(u)\text{"}$.

טענה: יהי G גרף פשוט לא מכוון ותהא $f : V \to \text{WFF}$ חח"ע אזי (G הינו 2־צביע)$\Longleftrightarrow$($\{\varphi_G(e) \mid e \in E\}$ ספיקה).

מסקנה: יהי G גרף בן־מנייה פשוט לא מכוון אזי (G הינו 2־צביע)$\Longleftrightarrow$(לכל $G' \leq G$ סופי G' הינו 2־צביע).

טענה: יהי G גרף בן־מנייה פשוט לא מכוון אזי (G הינו k־צביע)$\Longleftrightarrow$(לכל $G' \leq G$ סופי G' הינו k־צביע).

קבוצת השמות גדירה: קבוצה $K \subseteq \{p_i\} \to \{F, T\}$ עבורה קיימת $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ המקיימת $K = \text{Ass}(\Gamma)$.

טענה: $\varnothing$ גדירה.

טענה: $\{p_i\} \to \{F, T\}$ גדירה.

טענה: לכל v השמה $\{v\}$ גדירה.

טענה: קיימת $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \to \{F, T\})$ שאינה גדירה.

סימון: $K_{\text{finite}} = \left\{v \in \{p_i\} \to \{F, T\} \mid \left|v^{-1}(\{T\})\right| < \aleph_0\right\}$.

טענה: K_{finite} אינה גדירה.

קבוצת השמות גדירה באופן סופי: קבוצה $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \to \{F, T\})$ עבורה קיימת $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ סופית המקיימת $K = \text{Ass}(\Gamma)$.

משפט: תהא $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \to \{F, T\})$ אזי התב"ש
- K גזירה וכן $K^{\mathcal{C}}$ גדירה.
- K גדירה באופן סופי.
- K גדירה על ידי פסוק יחיד.

מילון: יהי Σ אלפבית תהא $C \subseteq \Sigma$ תהא $R \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(\Sigma^n)$ ותהא $F \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} (\Sigma^n \to \Sigma)$ אזי (C, R, F).

סימני קבוע במילון: יהי (C, R, F) מילון אזי C.

סימני יחס במילון: יהי (C,R,F) מילון אזי R.

סימני פונקציה במילון: יהי (C,R,F) מילון אזי F.

מילון סופי: יהי Σ אלפבית אזי מילון σ בעל מספר סופי של סימנים.

מילון יחסי: יהי Σ אלפבית אזי מילון σ חסר סימני פונקציה.

לוגיקה מסדר ראשון: יהי Σ אלפבית ויהי σ מילון אזי $\left(\{x_i \mid i\in\mathbb{N}\}, \{"(", ")"\}, \{\neg,\vee,\wedge,\Longrightarrow\}, \{\forall,\exists\}, \sigma\right)$.

משתנים בלוגיקה מסדר ראשון: תהא (X,P,C,A,σ) לוגיקה מסדר ראשון אזי X.

סימני עזר בלוגיקה מסדר ראשון: תהא (X,P,C,A,σ) לוגיקה מסדר ראשון אזי P.

קשרים בוליאניים בלוגיקה מסדר ראשון: תהא (X,P,C,A,σ) לוגיקה מסדר ראשון אזי C.

כמתים בלוגיקה מסדר ראשון: תהא (X,P,C,A,σ) לוגיקה מסדר ראשון אזי A.

סיגנטורה של לוגיקה מסדר ראשון: תהא (X,P,C,A,σ) לוגיקה מסדר ראשון אזי σ.

שמות עצם מעל מילון: יהי σ מילון אזי $X_{\{x_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{c_i|i\in\mathbb{N}\},\{f_{i,n}|i,n\in\mathbb{N}\}}$.

משפט הקריאה היחידה לשמות עצם: יהי σ מילון ויהי t שם עצם אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים
- t משתנה.
- t סימן קבוע.
- קיים ויחיד סימן פונקציה $f_{i,n}$ ושמות עצם $t_1\ldots t_n$ עבורם $t=f(t_1\ldots t_n)$.

הגדרה: יהי σ מילון יהי x משתנה ותהא $\alpha\in\sigma$ אזי
- $\forall(\alpha,x)="\forall x\alpha"$.
- $\exists(\alpha,x)="\exists x\alpha"$.

נוסחאות אטומיות: יהי σ מילון אזי $\{R_{n,i}(t_1\ldots t_n) \mid (i,n\in\mathbb{N})\wedge(t_1\ldots t_n \text{ שמות עצם})\}$.

נוסחאות מעל מילון: יהי σ מילון אזי $X_{\{R_{n,i}(t_1\ldots t_n)|(i,n\in\mathbb{N})\wedge(t_1\ldots t_n \text{ שמות עצם})\},\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow,\forall,\exists\}}$.

משפט הקריאה היחידה לנוסחאות: יהי σ מילון ותהא α נוסחה אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים
- α נוסחה אטומית.
- קיימת ויחידה נוסחה β עבורה $\alpha=" (\neg\beta) "$.
- קיימות ויחידות נוסחאות β,γ וכן פעולה בולינארית $\circ$ עבורן $\alpha=" (\beta\circ\gamma) "$.
- קיימת ויחידה נוסחה β וכן משתנה x וכן כמת Q עבורם $\alpha="Qx\beta"$.

משתנה חופשי בשם עצם: נגדיר $\mathrm{FV}:\{t \mid \sigma \text{ שם עצם במילון } t\}\to\mathcal{P}(\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\})$ כך
- יהי $c\in\sigma$ סימן קבוע אזי $\mathrm{FV}(c)=\varnothing$.
- יהי $x\in\sigma$ משתנה אזי $\mathrm{FV}(x)=\{x\}$.
- יהיו $t_1\ldots t_n$ שמות עצם ויהי $f\in\sigma$ סימן פונקציה אזי $\mathrm{FV}(f(t_1\ldots t_n))=\bigcup\mathrm{FV}(t_i)$.

משתנה חופשי בנוסחה: נגדיר $\mathrm{FV}:\{\varphi \mid \sigma \text{ נוסחה במילון } \varphi\}\to\mathcal{P}(\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\})$ כך
- יהיו $t_1\ldots t_n$ שמות עצם ויהי $R\in\sigma$ סימן יחס אזי $\mathrm{FV}(R(t_1\ldots t_n))=\bigcup\mathrm{FV}(t_i)$.
- תהא φ נוסחה אזי $\mathrm{FV}(\neg\varphi)=\mathrm{FV}(\varphi)$.
- תהיינה φ,ψ נוסחאות ויהי $\circ$ פעולה בוליאנית אזי $\mathrm{FV}(\varphi\circ\psi)=\mathrm{FV}(\varphi)\cup\mathrm{FV}(\psi)$.
- תהא נוסחה φ יהי משתנה x ויהי כמת Q אזי $\mathrm{FV}(Qx\varphi)=\mathrm{FV}(\varphi)\setminus\{x\}$.

נוסחה סגורה: נוסחה φ עבורה $\mathrm{FV}(\varphi)=\varnothing$.

הערה סדר קדימות של פעולות בלוגיקה מסדר ראשון: נגדיר סדר ביצוע פעולות
1. $\forall,\exists$.
2. $\neg$.
3. $\wedge,\vee$.
4. $\Longrightarrow$.

מבנה עבור מילון: יהי (C,R,F) מילון תהא $D\neq\varnothing$ קבוצה תהא $\mathcal{C}:C\to D$ תהא $\mathcal{R}:R\to\mathcal{P}(D^*)$ המקיימת $\mathcal{R}(r)\subseteq D^n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $r\subseteq\Sigma^n$ תהא $\mathcal{F}:F\to(D^n\to D)$ המקיימת $\mathcal{F}(f)\in D^n\to D$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $f\in\Sigma^n\to\Sigma$ אזי $(D,\mathcal{C}(C),\mathcal{R}(R),\mathcal{F}(F))$.

תחום של מבנה: יהי σ מילון ויהי $(D,\mathcal{C}(C),\mathcal{R}(R),\mathcal{F}(F))$ מבנה אזי D.

סימון: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ בעל תחום D אזי $D^M=D$.

פירוש של סימנים במילון על ידי מבנה: יהי σ מילון ויהי $(D,\mathcal{C}(C),\mathcal{R}(R),\mathcal{F}(F))$ מבנה אזי $(\mathcal{C}(C),\mathcal{R}(R),\mathcal{F}(F))$.

סימון: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $c^M=\mathcal{C}(c)$ וכן $r^M=\mathcal{R}(r)$ וכן $f^M=\mathcal{F}(f)$.

השמה: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $v:\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\}\to D^M$.

השמת ערך לשם עצם: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ יהי ותהא v השמה אזי

- יהי $c_i\in\sigma$ סימן קבוע אזי $\overline{v}(c_i)=c_i^M$.
- יהי $x_i\in\sigma$ משתנה אזי $\overline{v}(x_i)=v(x_i)$.
- יהיו $t_1\ldots t_n$ שמות עצם ויהי $f\in\sigma$ סימן פונקציה אזי $\overline{v}(f(t_1\ldots t_n))=f^M(\overline{v}(t_1)\ldots\overline{v}(t_n))$.

משפט התלות הסופית: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהיינה v_1,v_2 השמות ויהי t שם עצם עבורו $\forall x\in\mathsf{FV}(t).v_1(x)=v_2(x)$ אזי $\overline{v_1}(t)=\overline{v_2}(t)$.

השמה מתוקנת: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהא v השמה יהי $x_j\in\sigma$ משתנה ויהי $d\in D^M$ אזי נגדיר השמה $v\left[d/x_j\right](x_i)=\begin{cases}v(x_i) & i\neq j\\ d & \text{else}\end{cases}$.

ערך אמת לנוסחה: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ ותהא v השמה אזי

- יהיו $t_1\ldots t_n$ שמות עצם ויהי $R\in\sigma$ סימן יחס אזי $\left((\overline{v}(t_1),\ldots,\overline{v}(t_n))\in R^M\right)\Longleftrightarrow(\overline{v}(R(t_1\ldots t_n))=T)$.
- תהא α נוסחה אזי $\overline{v}(\neg\alpha)=TT_\neg(\overline{v}(\alpha))$.
- תהיינה α,β נוסחאות ויהי $\circ$ קשר בינארי אזי $\overline{v}(\alpha\circ\beta)=TT_\circ(\overline{v}(\alpha),\overline{v}(\beta))$.
- תהא φ נוסחה אזי $\left(\exists d\in D^M\left(\overline{v\left[d/x\right]}(\varphi)=T\right)\right)\Longleftrightarrow(\overline{v}(\exists x\varphi)=T)$.
- תהא φ נוסחה אזי $\left(\forall d\in D^M\left(\overline{v\left[d/x\right]}(\varphi)=T\right)\right)\Longleftrightarrow(\overline{v}(\forall x\varphi)=T)$.

משפט התלות הסופית: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהיינה v_1,v_2 השמות ותהא φ נוסחה עבורה $\forall x\in\mathsf{FV}(t).v_1(x)=v_2(x)$ אזי $\overline{v_1}(\varphi)=\overline{v_2}(\varphi)$.

נוסחה ספיקה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה אזי נוסחה φ עבורה $\overline{v}(\varphi)=T$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה ותהא φ נוסחה ספיקה ב־M אזי $M,v\models\varphi$.

t־מודל של נוסחה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה יהי M מבנה ותהא v השמה עבורם $M,v\models\varphi$ אזי (M,v).

קבוצת נוסחאות ספיקה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה אזי קבוצת נוסחאות Γ עבורה לכל $\varphi\in\Gamma$ מתקיים $\overline{v}(\varphi)=T$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה ותהא Γ קבוצת נוסחאות ספיקה ב־M אזי $M,v\models\Gamma$.

נוסחה ספיקה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה קיים מבנה M והשמה v עבורם $M,v\models\varphi$.

סימון: יהי σ מילון תהא v השמה תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה עבורה לכל (M,v) t־מודל של Γ מתקיים כי (M,v) t־מודל של φ אזי $\Gamma\overset{t}{\models}\varphi$.

נוסחאות t־שקולות: יהי σ מילון ותהא v השמה אזי נוסחאות φ,ψ עבורן $\{\psi\}\overset{t}{\models}\varphi$ וכן $\{\varphi\}\overset{t}{\models}\psi$.

נוסחה t־תקפה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה לכל M מבנה על σ ולכל v השמה מתקיים (M,v) t־מודל של φ.

סימון: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה t־תקפה אזי $\overset{t}{\models}\varphi$.

נוסחה נכונה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ אזי נוסחה φ עבורה לכל v השמה מתקיים $M,v\models\varphi$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ ותהא φ נוסחה נכונה ב־M אזי $M\models\varphi$.

v־מודל של נוסחה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה אזי מבנה M עבורו $M\models\varphi$.

קבוצת נוסחאות נכונה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ אזי קבוצת נוסחאות Γ עבורה לכל $\varphi\in\Gamma$ מתקיים $M\models\varphi$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ ותהא Γ קבוצת נוסחאות נכונה ב־M אזי $M\models\Gamma$.

נוסחה v־ספיקה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה קיים מבנה M עבורו $M\models\varphi$.

סימון: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה עבורה לכל M v־מודל של Γ מתקיים כי M v־מודל של φ אזי $\Gamma\overset{v}{\models}\varphi$.

נוסחאות v־שקולות: יהי σ מילון אזי נוסחאות φ,ψ עבורן $\{\psi\}\overset{v}{\models}\varphi$ וכן $\{\varphi\}\overset{v}{\models}\psi$.

נוסחה v־תקפה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה לכל M מבנה על σ מתקיים M v־מודל של φ.

סימון: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה v־תקפה אזי $\overset{v}{\models}\varphi$.

מסקנה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה אזי $\left(\overset{t}{\models}\varphi\right)\Longleftrightarrow\left(\overset{v}{\models}\varphi\right)$.

טענה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה תקפה אזי $\exists x\varphi$ תקפה וכן $\forall x\varphi$ תקפה.

טענה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה עבורה $\forall x\varphi$ תקפה אזי φ תקפה.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי $\left(\Gamma \overset{v}{\models} \varphi\right) \Longrightarrow \left(\Gamma \overset{t}{\models} \varphi\right)$.

פסוק: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה $\text{FV}(\varphi) = \varnothing$.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת פסוקים ותהא φ נוסחה אזי $\left(\Gamma \overset{v}{\models} \varphi\right) \Longleftarrow \left(\Gamma \overset{t}{\models} \varphi\right)$.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי ($\Gamma \cup \{\varphi\}$ הינה t־ספיקה)$\Longleftrightarrow$($\Gamma \overset{t}{\not\models} \neg\varphi$).

טענה: יהי σ מילון ותהיינה φ, ψ נוסחאות אזי (φ, ψ הן t־שקולות)$\Longleftrightarrow$(($\varphi \Longleftrightarrow \psi$) תקפה).

הסגור האוניברסלי: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה עבורה $\text{FV}(\varphi) = \{x_1 \dots x_n\}$ אזי $\varphi^\forall = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \varphi$.

הסגור הייישי: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה עבורה $\text{FV}(\varphi) = \{x_1 \dots x_n\}$ אזי $\varphi^\exists = \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \varphi$.

סימון: יהי σ מילון ותהא Γ קבוצת נוסחאות אזי $\Gamma^\forall = \left\{\varphi^\forall \mid \varphi \in \Gamma\right\}$.

טענה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה ויהי M מבנה אזי ($\varphi^\forall$ ספיק ב־M)$\Longleftrightarrow$($M \models \varphi$).

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי $\left(\Gamma \overset{v}{\models} \varphi\right) \Longleftrightarrow \left(\Gamma^\forall \overset{v}{\models} \varphi^\forall\right)$.

איזומורפיזם בין מבנים: יהי σ מילון ויהיו M, N מבנים מעל σ אזי $G : D^M \to D^N$ חח"ע ועל עבורה

- לכל סימן קבוע $c \in \sigma$ מתקיים $G\left(c^M\right) = c^N$.
- לכל סימן פונקציה $f \in \sigma$ ולכל $a_1 \dots a_n \in D^M$ מתקיים $G\left(f^M(a_1 \dots a_n)\right) = f^N(G(a_1) \dots G(a_n))$.
- לכל סימן יחס $R \in \sigma$ ולכל $a_1 \dots a_n \in D^M$ מתקיים $\left((a_1 \dots a_n) \in R^M\right) \Longleftrightarrow \left((G(a_1) \dots G(a_n)) \in R^N\right)$.

מבנים איזומורפיים: יהי σ מילון אזי מבנים M, N מעל σ עבורם קיים איזומורפיזם G מ־M ל־N.

סימון: יהי σ מילון ויהיו M, N מבנים איזומורפיים מעל σ אזי $M \cong N$.

טענה: יהי σ מילון יהיו M, N מבנים איזומורפיים מעל σ ויהי φ פסוק אזי $(M \models \varphi) \Longleftrightarrow (N \models \varphi)$.

הערה: יהי σ מילון בעל יחס שיוויון Id דו־מקומי אזי לכל מבנה M נגדיר $\text{Id}^M = \text{Id}_M$ ונסמן את היחס בעזרת =.

הערה: אלא אם כן נאמר אחרת מכאן והלאה כל המילונים הם חסרי שיוויון.

הצבת שם עצם במשתנה: יהיו r, s שמות עצם ויהי x משתנה אזי

- אם s סימן קבוע אזי $s\,[r/x] = s$.
- אם $s = x$ אזי $s\,[r/x] = r$.
- אם $s \neq x$ משתנה אזי $s\,[r/x] = s$.
- אם $s = f(t_1 \dots t_n)$ אזי $s\,[r/x] = f(t_1\,[r/x] \dots t_n\,[r/x])$.

הצבת שם עצם בנוסחה: תהא φ נוסחה יהי r שמות עצם ויהי x משתנה אזי

- אם $\varphi = R(t_1 \dots t_n)$ אזי $\varphi\,[r/x] = R(t_1\,[r/x] \dots t_n\,[r/x])$.
- אם $\varphi = \neg\alpha$ אזי $\varphi\,[r/x] = \neg(\alpha\,[r/x])$.
- אם $\varphi = \alpha \circ \beta$ אזי $\varphi\,[r/x] = \alpha\,[r/x] \circ \beta\,[r/x]$.
- אם $\varphi = \forall x \alpha$ אזי $\varphi\,[r/x] = \forall x \alpha$.
- אם $\varphi = \exists x \alpha$ אזי $\varphi\,[r/x] = \exists x \alpha$.
- אם $\varphi = \forall y \alpha$ באשר $x \neq y$ אזי $\varphi\,[r/x] = \forall y(\alpha\,[r/x])$.
- אם $\varphi = \exists y \alpha$ באשר $x \neq y$ אזי $\varphi\,[r/x] = \exists y(\alpha\,[r/x])$.

שם עצם חופשי להצבה בנוסחה: תהא φ נוסחה ויהי x משתנה אזי

- אם $\varphi = R(t_1 \dots t_n)$ אזי שם עצם r.
- אם $\varphi = \neg\alpha$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב־α.
- אם $\varphi = \alpha \circ \beta$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב־α וכן ב־β.
- אם $\varphi = \forall y \alpha$ וכן x אינו מופיע או אינו חופשי ב־φ אזי שם עצם r.
- אם $\varphi = \exists y \alpha$ וכן x אינו מופיע או אינו חופשי ב־φ אזי שם עצם r.
- אם $\varphi = \forall y \alpha$ וכן $x \in \text{FV}(\varphi)$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב־α וכן $y \notin \text{FV}(r)$.
- אם $\varphi = \exists y \alpha$ וכן $x \in \text{FV}(\varphi)$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב־α וכן $y \notin \text{FV}(r)$.

משתנה בעל מופע קשור: נגדיר $f : \{\text{נוסחאות}\} \to \mathcal{P}(\{x_i\})$ כך

- אם $\varphi = R(t_1 \dots t_n)$ אזי $f(\varphi) = \varnothing$.
- אם $\varphi = \neg\alpha$ אזי $f(\varphi) = f(\alpha)$.

- אם $\varphi = \alpha \circ \beta$ אזי $f(\varphi) = f(\alpha) \cup f(\beta)$.
- אם $\varphi = \forall x \alpha$ אזי $f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{x\}$.
- אם $\varphi = \exists y \alpha$ אזי $f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{x\}$.

למה: תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי (r חופשי להצבה ב־φ)$\Longleftrightarrow$(לכל $y \in \mathrm{FV}(r)$ לא נוצר מופע קשור חדש עבור y ב־$\varphi[r/x]$).

סימון: יהי s שם עצם יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי נגדיר השמה $v\left[\overline{v}(r)/x\right](y) = \begin{cases} v(y) & x \neq y \\ \overline{v}(r) & \text{else} \end{cases}$.

מסקנה: יהי s שם עצם יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי $\overline{v}(s[r/x]) = \overline{v\left[\overline{v}(r)/x\right]}(s)$.

מסקנה: תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי r שם עצם חופשי להצבה ב־φ אזי $\overline{v}(\varphi[r/x]) = \overline{v\left[\overline{v}(r)/x\right]}(\varphi)$.

מסקנה: תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי y משתנה חופשי להצבה ב־φ אזי $\overline{v}(\varphi) = \overline{v\left[v(x)/y\right]}(\varphi[y/x])$.

טענה שינוי שם משתנה: תהא φ נוסחה ויהי y משתנה אשר אינו מופיע ב־φ אזי

- $(\exists x \varphi) \equiv^t (\exists y (\varphi[y/x]))$.
- $(\forall x \varphi) \equiv^t (\forall y (\varphi[y/x]))$.

הצורה הנורמלית PNF: $X_{\{\varphi \mid \varphi \text{ נוסחה חסרת כמתים}\},\{\forall,\exists\}}$.

מסקנה: תהא φ נוסחה אזי (φ בצורת PNF)$\Longleftrightarrow$(קיימת נוסחה α חסרת כמתים וכן $x_1 \dots x_n$ משתנים וכן $Q_1 \dots Q_n$ כמתים עבורם $\varphi = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \alpha$).

טענה: תהיינה φ, ψ נוסחאות אזי

- $(\forall x (\varphi \wedge \psi)) \equiv^t ((\forall x \varphi) \wedge (\forall x \psi))$.
- $(\exists x (\varphi \vee \psi)) \equiv^t ((\exists x \varphi) \vee (\exists x \psi))$.
- תהא $x \notin \mathrm{FV}(\psi)$ אזי $((\forall x \varphi) \vee \psi) \equiv^t (\forall x (\varphi \vee \psi))$.
- תהא $x \notin \mathrm{FV}(\psi)$ אזי $((\exists x \varphi) \wedge \psi) \equiv^t (\exists x (\varphi \wedge \psi))$.
- $(\neg (\forall x \varphi)) \equiv^t (\exists x (\neg \varphi))$.
- $(\neg (\exists x \varphi)) \equiv^t (\forall x (\neg \varphi))$.

משפט: תהא φ נוסחה אזי קיימת נוסחה α בצורת PNF עבורה $\alpha \equiv^t \varphi$.

פסוק אוניברסלי: פסוק φ עבורו קיימת נוסחה α חסרת כמתים באשר $\mathrm{FV}(\alpha) = \{x_1 \dots x_n\}$ המקיימת $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \alpha$.

פסוק יישי: פסוק φ עבורו קיימת נוסחה α חסרת כמתים באשר $\mathrm{FV}(\alpha) = \{x_1 \dots x_n\}$ המקיימת $\varphi = \exists x_1 \dots \exists x_n \alpha$.

טענה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה מעל σ ויהי סימן קבוע $c \notin \sigma$ אזי ($\exists x \varphi$ ספיקה מעל σ)$\Longleftrightarrow$($\varphi[c/x]$ ספיקה מעל $\sigma \cup \{c\}$).

טענה: תהא φ נוסחה מעל מילון σ אזי ($\forall y_1 \dots \forall y_n \exists x \varphi$ ספיק מעל σ)$\Longleftrightarrow$($\forall y_1 \dots \forall y_n \left(\varphi\left[f(y_1 \cdots y_n)/x\right]\right)$ ספיק מעל המילון $\sigma \cup \{f\}$ באשר f פונקציה n־מקומית).

משפט סקולם: קיים אלגוריתם sk המקבל נוסחה φ מעל מילון σ ומחזיר פסוק אוניברסלי מעל מילון σ' עבורו (φ ספיק)$\Longleftrightarrow$($\mathrm{sk}(\varphi)$ ספיק).

סקולמיזציה למילון: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה אזי המילון המינימלי מעליו מוגדר $\mathrm{sk}(\varphi)$.

אלגוריתם לוגיקה מסדר ראשון לתחשיב הפסוקים: יהי σ מילון תהא $f : \{\text{נוסחאות אטומיות סגורות}\} \to \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ הפיכה ותהא φ נוסחה סגורה חסרת כמתים אזי $\mathrm{FOLWFF}(\varphi)$ עובר על φ ולכל שם עצם t בו מחליפו ב־$f(t)$.

טענה: יהי σ מילון תהא $f : \{\text{נוסחאות אטומיות סגורות}\} \to \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ הפיכה ותהא φ נוסחה סגורה חסרת כמתים אזי

- (φ ספיק)$\Longleftrightarrow$($\mathrm{FOLWFF}(\varphi)$ ספיק).
- (φ תקפה)$\Longleftrightarrow$($\mathrm{FOLWFF}(\varphi)$ טאוטולוגיה).

למה: תהא φ נוסחה סגורה חסרת כמתים המורכבת מהנוסחאות האטומיות $\alpha_1 \dots \alpha_k$ נגדיר השמה של WFF כך $v(p_i) = (M \models \alpha_i)$ אזי $(M \models \varphi) \Longleftrightarrow (\overline{v}(\mathrm{FOLWFF}(\varphi)) = T)$.

שם עצם סגור: שם עצם חסר משתנים.

מבנה הרברנד: יהי σ מילון אזי מבנה M המקיים

- לכל $a \in D^M$ קיים שם עצם סגור α עבורו $\alpha^M = a$.
- יהיו α, β שמות עצם שונים אזי $\alpha^M \neq \beta^M$.

מסקנה: יהי σ מילון בן־מנייה ויהי M מבנה הרברנד של σ אזי D^M בן־מנייה.

הערה: מהגדרת מבנה הרברנד נובע כי ניתן לכתוב $D^M = \{\varphi \mid \sigma \text{ שם עצם חסר משתנים ב־} \varphi\}$.

מסקנה: יהי σ מילון בעל סימן קבוע אזי קיים מבנה הרברנד M על σ.

טענה: יהי M מבנה הרברנד מעל σ ותהא v השמה עבורה $v\left(x_{i}\right)=t_{i}$ אזי
- יהי r שם עצם באשר $\mathrm{FV}\left(r\right)=\left\{ x_{1}\ldots x_{n}\right\}$ אזי $\overline{v}\left(r\right)=r\left[\nicefrac{t_{1}}{x_{1}},\ldots,\nicefrac{t_{n}}{x_{n}}\right]$.
- תהא φ נוסחה באשר $\mathrm{FV}\left(\varphi\right)=\left\{ x_{1}\ldots x_{n}\right\}$ אזי $\left(M\models\varphi\left[\nicefrac{t_{1}}{x_{1}},\ldots,\nicefrac{t_{n}}{x_{n}}\right]\right)\Longleftrightarrow\left(M,v\models\varphi\right)$.
- תהא φ נוסחה אזי ($\exists x\varphi$ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(קיים שם עצם סגור s עבורו $\varphi\left[\nicefrac{s}{x}\right]$ ספיקה).
- תהא φ נוסחה עבורה $\exists x\varphi$ פסוק אזי ($\exists x\varphi$ תקפה)$\Longleftrightarrow$(קיים שם עצם סגור s עבורו $\varphi\left[\nicefrac{s}{x}\right]$ תקפה).
- תהא φ נוסחה אזי ($\forall x\varphi$ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(לכל שם עצם סגור s מתקיים כי $\varphi\left[\nicefrac{s}{x}\right]$ ספיקה).
- תהא φ נוסחה עבורה $\forall x\varphi$ פסוק אזי ($\forall x\varphi$ תקפה)$\Longleftrightarrow$(לכל שם עצם חסר משתנים s מתקיים כי $\varphi\left[\nicefrac{s}{x}\right]$ תקפה).

משפט הרברנד: יהי σ מילון ויהי φ פסוק אוניברסלי אזי (φ ספיק)$\Longleftrightarrow$(φ ספיק במבנה הרברנד).

מופעי בסיס: תהא φ נוסחה חסרת כמתים באשר $\mathrm{FV}\left(\varphi\right)=\left\{ x_{1}\ldots x_{n}\right\}$ אזי $\mathrm{GroundInstance}\left(\forall x_{1}\ldots\forall x_{n}\varphi\right)=\left\{ \varphi\left[\nicefrac{s_{1}}{x_{1}},\ldots,\nicefrac{s_{n}}{x_{n}}\right]\mid s_{1}\ldots s_{n}\text{ שמות עצם חסרי משתנים}\right\}$.

סימון: תהא Γ קבוצת פסוקים אוניברסליים אזי $\mathrm{GroundInstance}\left(\Gamma\right)=\bigcup_{\varphi\in\Gamma}\mathrm{GroundInstance}\left(\varphi\right)$.

טענה: תהא Γ קבוצת פסוקים סגורים חסרי כמתים אזי (Γ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(Γ ספיקה במבנה הרברנד).

משפט: תהא Γ קבוצת פסוקים אוניברסליים התב"ש
- Γ ספיקה.
- Γ ספיקה במבנה הרברנד.
- $\mathrm{GroundInstance}\left(\Gamma\right)$ ספיקה.
- $\mathrm{GroundInstance}\left(\Gamma\right)$ ספיקה במבנה הרברנד.

משפט הקומפקטיות: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי
- (Γ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(לכל $\Delta\subseteq\Gamma$ סופית Δ ספיקה).
- ($\Gamma\overset{t}{\models}\varphi$)$\Longleftrightarrow$(קיימת $\Delta\subseteq\Gamma$ סופית עבורה $\Delta\overset{t}{\models}\varphi$).
- ($\Gamma\underset{v}{\models}\varphi$)$\Longleftrightarrow$(קיימת $\Delta\subseteq\Gamma$ סופית עבורה $\Delta\underset{v}{\models}\varphi$).

טענה: יהיו x,y משתנים אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות Γ מעל $\left\{ E\left(\cdot,\cdot\right)\right\}$ המקיימת ($M\models\Gamma$)$\Longleftrightarrow$(יש מסלול ב־M מ־x ל־y).

משפט: יהי σ מילון בעל קבוע תהא φ נוסחה ללא כמתים מעל σ אזי ($\exists x\varphi$ תקפה)$\Longleftrightarrow$(קיימים שמות עצם סגורים $t_{1}\ldots t_{n}$ עבורם $\varphi\left[\nicefrac{t_{1}}{x}\right]\vee\ldots\vee\varphi\left[\nicefrac{t_{n}}{x}\right]$ תקפה).

מבנה הנקין: יהי σ מילון אזי מבנה H מעל σ עבורו לכל $a\in D^{H}$ קיים שם עצם סגור t עבורו $t^{H}=a$.

המודל הסטנדרטי של הטבעיים: יהי מילון עם שיוויון $\left\{ c_{0},c_{1},f_{+},f_{\times},R_{>}\right\}$ אזי מבנה $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$ עבורו
- $D^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}=\mathbb{N}$ וכן $c_{0}^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}=0$ וכן $c_{1}^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}=1$.
- $f_{+}^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}\left(a,b\right)=a+b$.
- $f_{\times}^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}\left(a,b\right)=a\times b$.
- $\left(\left(a,b\right)\in R_{>}^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}\right)\Longleftrightarrow\left(a>b\right)$.

פסוקים נכונים אריתמטית: יהי מילון $\left\{ c_{0},c_{1},f_{+},f_{\times},R_{>}\right\}$ אזי $\mathrm{AT}=\left\{ \alpha\mid\left(\mathcal{M}_{\mathbb{N}}\models\alpha\right)\wedge\left(\mathrm{FV}\left(\alpha\right)=\varnothing\right)\right\}$.

מודל לא סטנדרטי של הטבעיים: יהי מילון $\left\{ c_{0},c_{1},f_{+},f_{\times},R_{>}\right\}$ אזי מבנה M עבורו $M\models\mathrm{AT}$ וכן M אינו איזומורפי ל־$\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$.

טענה: יהי M מודל לא סטדנרטי של הטבעיים אזי $\left|D^{M}\right|>\aleph_{0}$.

עוצמה של מבנה: יהי σ מילון ויהי M מבנה מעל σ אזי $\left|M\right|=\left|D^{M}\right|$.

משפט לוונהיים־סקולם היורד: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה מעל σ אזי (φ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(קיים מבנה לכל היותר בן־מנייה M בו φ ספיקה).

משפט לוונהיים־סקולם העולה: יהי σ מילון יהי M מבנה בן־מנייה ותהא φ נוסחה מעל σ באשר φ ספיקה ב־M אזי לכל עוצמה אינסופית κ קיים מבנה M' מעוצמה κ עבורו φ ספיקה ב־M'.

מסקנה: יהי σ מילון ותהא κ עוצמה אינסופית אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות Γ מעל σ המקיימת $\left(M\models\Gamma\right)\Longleftrightarrow\left(\left|M\right|=\kappa\right)$.

הערה: אקסיומות ZFC מנוסחות בלוגיקה מסדר ראשון.

מסקנה: קיים מבנה בן־מנייה לתורת הקבוצות.

סימון: $\mathrm{VALID}=\left\{ \left\langle \sigma,\varphi\right\rangle \mid\left(\varphi\text{ נוסחה מעל }\sigma\right)\wedge\left(\varphi\text{ תקפה}\right)\right\}$.

משפט אלגוריתם בדיקת תקפות: יהי σ מילון אזי $\mathrm{VALID}\in\mathcal{RE}$.

משפט צ'רץ'־טיורינג: $\mathrm{HALT}\le_{m}\mathrm{VALID}$.

מסקנה: $\mathrm{VALID}\notin\mathcal{R}$.

בעיית הריצוף: יהיו $R_1 \ldots R_n$ ריבועים בעלי צלע מאורך 1 וכן כל צלע שלהם צבועה בצבע אזי האם ניתן לרצף את $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ בעזרת הריבועים באשר כל שני ריבועים סמוכים חולקים צבע בצלע חיבורם.

בעיית הריצוף: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ותהא $R : [n]^2 \times \{\text{left}, \text{right}, \text{above}, \text{below}\} \to \{\text{yes}, \text{no}\}$ אזי $f : \mathbb{N}^2 \to [n]$ עבורה

- לכל $m \in \mathbb{N}$ ולכל $n \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $R\left(f\left(\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}\right), f\left(\begin{smallmatrix} n-1 \\ m \end{smallmatrix}\right), \text{left}\right) = \text{yes}$.
- לכל $m, n \in \mathbb{N}$ מתקיים $R\left(f\left(\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}\right), f\left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ m \end{smallmatrix}\right), \text{right}\right) = \text{yes}$.
- לכל $m, n \in \mathbb{N}$ ולכל $n \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $R\left(f\left(\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}\right), f\left(\begin{smallmatrix} n \\ m+1 \end{smallmatrix}\right), \text{above}\right) = \text{yes}$.
- לכל $m \in \mathbb{N}_+$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $R\left(f\left(\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}\right), f\left(\begin{smallmatrix} n \\ m-1 \end{smallmatrix}\right), \text{below}\right) = \text{yes}$.

סימון: $\text{TILING} = \{(n, R, f) \mid R \text{ פתרון לבעיית הריצוף עבור } f\}$.

משפט: $\text{VALID} \leq_m \text{TILING}$.

מסקנה: $\text{TILING} \notin \mathcal{R}$.

יחס קונגרואנציה: יהי σ מילון אזי $E \in \sigma$ סימן יחס דו־מקומי המקיים

- רפלקסיבי: $\forall x \left(E\left(x, x\right)\right)$.
- סימטרי: $\forall x \forall y \left(E\left(x, y\right) \Longrightarrow E\left(y, x\right)\right)$.
- טרנזיטיבי: $\forall x \forall y \forall z \left(\left(E\left(x, y\right) \wedge E\left(y, z\right)\right) \Longrightarrow E\left(x, z\right)\right)$.
- לכל $f \in \sigma$ סימן פונקציה מתקיים $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n \left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n} E\left(x_i, y_i\right)\right) \Longrightarrow E\left(f\left(x_1 \ldots x_n\right), f\left(y_1 \ldots y_n\right)\right)\right)$.
- לכל $R \in \sigma$ סימן יחס מתקיים $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n \left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n} E\left(x_i, y_i\right)\right) \Longrightarrow \left(R\left(x_1 \ldots x_n\right) \Longleftrightarrow R\left(y_1 \ldots y_n\right)\right)\right)$.

הערה: בהינתן מילון עם שיוויון σ ניתן לחשוב על השיוויון בתור קונגרואנציה ולכן נסמן σ_E את המילון עם קונגרואנציה במקום שיוויון.

מילון מחלקות קונגרואנציה: יהי σ מילון עם שיוויון ויהי M מבנה על σ אזי מבנה M_E מעל σ_E המקיים

- $D^{M'} = {}^{D^M}/_{E}$.
- לכל סימן פונקציה $f \in \sigma$ מתקיים $f^{M'}\left(\left[a_1\right]_E, \ldots, \left[a_n\right]_E\right) = \left[f^M\left(a_1 \ldots a_n\right)\right]_E$.
- לכל סימן יחס $R \in \sigma$ מתקיים $R^{M'}\left(\left[a_1\right]_E, \ldots, \left[a_n\right]_E\right) \Longleftrightarrow R^M\left(a_1 \ldots a_n\right)$.

החלפת שיוויון ביחס קונגרואנציה: תהא φ נוסחה מעל מילון עם שיוויון σ באשר $f_1 \ldots f_n$ סימני הפונקציות ב־φ וכן $R_1 \ldots R_m$ סימני היחס ב־φ אזי $\varphi_E = \varphi\left[{}^{E}/{}_{=}\right] \wedge \left(E \text{ יחס שקילות}\right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n}\left(E \text{ יחס קונגרואנציה ביחס ל־} f_i\right)\right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{m}\left(E \text{ יחס קונגרואנציה ביחס ל־} E_i\right)\right)$.

טענה: תהא φ נוסחה מעל מילון σ עם שיוויון יהי M מבנה מעל σ ותהא v השמה נגדיר השמה $v_E : \{x_i\} \to D^{M_E}$ באשר $v_E\left(x_i\right) = \left[v\left(x_i\right)\right]_E$ אזי $\left(M_E, v_E \models \varphi_E\right) \Longleftrightarrow \left(M, v \models \varphi\right)$.

משפט: קיים אלגוריתם המקבל נוסחה φ באשר φ מעל מילון עם שיוויון σ ומחזיר נוסחה חסרת שיוויון ψ באשר ψ מעל מילון σ' עבורו (φ ספיק)$\Longleftrightarrow$(ψ ספיק).

משפט: תהא Γ קבוצת נוסחאות מעל σ עם שיוויון אזי (Γ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(Γ_E ספיקה).

משפט הקומפקטיות: יהי σ מילון עם שיוויון תהא Γ קבוצת נוחסאות ותהא φ נוסחה אזי (Γ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(לכל $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית Δ ספיקה).

הגדרה: יהי $\sigma = \{R\left(\cdot, \cdot\right)\}$ מילון עם שיוויון אזי

- $\xi_1 = \forall x \left(\neg\left(R\left(x, x\right)\right)\right)$.
- $\xi_2 = \forall x \forall y \forall z \left(\left(R\left(x, y\right) \wedge R\left(y, z\right)\right) \Longrightarrow R\left(x, z\right)\right)$.
- $\xi_3 = \forall x \forall y \left(\left(x \neq y\right) \Longrightarrow \left(R\left(x, y\right) \vee R\left(y, x\right)\right)\right)$.
- $\xi_4 = \left(\forall x \exists y \left(R\left(x, y\right)\right)\right) \wedge \left(\forall x \exists y \left(R\left(y, x\right)\right)\right)$.
- $\xi_5 = \forall x \forall y \left(\left(R\left(x, y\right)\right) \Longrightarrow \left(\exists z \left(R\left(x, z\right) \wedge \left(R\left(z, y\right)\right)\right)\right)\right)$.
- $\xi = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5$.

משפט קנטור: יהי $\sigma = \{R\left(\cdot, \cdot\right)\}$ מילון עם שיוויון ויהיו M, N מבנים המספקים את ξ אזי $M \cong N$.

כלל ג'ן: יהי σ מילון ותהא α נוסחה אזי $\text{Gen} : \frac{\alpha}{\forall x \alpha}$.

מערכת ההוכחה של הילברט (HC): יהי σ מילון אזי

- אלפבית: $\Sigma = \sigma$.
- נוסחאות: $N = X_{\{t \mid t \text{ שם עצם}\}, \{\neg, \Longrightarrow, \forall\}}$.
- אקסיומות:
  - $A_1 = \left(\alpha \Longrightarrow \left(\beta \Longrightarrow \alpha\right)\right)$.

- $A_2 = ((\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \gamma)) \Longrightarrow ((\alpha \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \gamma)))$.
- $A_3 = (((\neg\alpha) \Longrightarrow (\neg\beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$.
- יהי t שם עצם חופשי להצבה במקום x ב־α אזי $A_4 = ((\forall x\alpha) \Longrightarrow \alpha [t/x])$
- יהי $x \notin \mathrm{FV}(\alpha)$ אזי $A_5 = ((\forall x (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow (\forall x\beta)))$.

• כללי היסק: $F = \{\mathrm{MP}, \mathrm{Gen}\}$.

הערה: מערכת ההוכחה HC הינה מערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ולא תחשיב הפסוקים.

הערה: במערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ניתן לעשות שינוי שם בנוסחה.

משפט הנאותות: יהי σ מילון תהיינה Γ הנחות מעל HC ותהא α נוסחה מעל HC אזי $\left(\Gamma \vdash_{\mathrm{HC}} \alpha\right) \Longrightarrow \left(\Gamma \overset{v}{\models} \alpha\right)$.

טענה: יהי $\alpha \in \mathrm{WFF}$ פסוק באשר $\vdash_{\mathrm{HPC}} \alpha$ וכן $\mathrm{Var}(\alpha) = \{p_1 \dots p_n\}$ ויהיו $\varphi_1 \dots \varphi_n$ נוסחאות אזי $\vdash_{\mathrm{HC}} \alpha [\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n]$.

משפט הדידוקציה: תהיינה Γ הנחות מעל HC ותהיינה α, β נוסחאות מעל HC עבורן $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\mathrm{HC}} \beta$ וכן בהוכחה לא הופעל כלל Gen על משתנה חופשי ב־α אזי $\Gamma \vdash_{\mathrm{HC}} (\alpha \Longrightarrow \beta)$.

משפט הדיכוטומיה: תהיינה Γ הנחות מעל HC ותהיינה α, β נוסחאות מעל HC עבורן $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\mathrm{HC}} \beta$ וכן $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash_{\mathrm{HC}} \beta$ וכן בהוכחות לא הופעל כלל Gen על משתנה חופשי ב־α אזי $\Gamma \vdash_{\mathrm{HC}} \beta$.

קבוצת נוסחאות σ־שלמה: יהיו σ, Σ מילונים באשר $\Sigma \subseteq \sigma$ אזי קבוצת נוסחאות Γ מעל Σ עבורה לכל פסוק φ מעל σ מתקיים $(\varphi \in \Gamma) \vee (\neg\varphi \in \Gamma)$.

קבוצת נוסחאות בעלת תכונת הנקין: יהי σ מילון אזי קבוצת נוסחאות Γ עבורה לכל נוסחה φ באשר $\neg\forall x\varphi$ פסוק וכן $\neg\forall x\varphi \in \Gamma$ מתקיים שקיים סימן קבוע $c \in \sigma$ עבורו $\neg\varphi [c/x] \in \Gamma$.

טענה: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית אזי קיים מילון $\Sigma \subseteq \sigma$ וקיימת Δ עקבית σ־שלמה מעל Σ המקיימת $\Gamma \subseteq \Delta$.

למה: יהי σ מילון תהא Γ עקבית תהא φ נוסחה באשר $\neg\forall x\varphi$ פסוק וכן $\neg\forall x\varphi \in \Gamma$ ויהי $c \notin \sigma$ סימן קבוע אזי $\Gamma \cup \{\neg\varphi [c/x]\}$ עקבית מעל $\sigma \cup \{c\}$.

משפט הנקין: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית אזי קיים מילון $\Sigma \subseteq \sigma$ וקיימת Δ עקבית מעל Σ המקיימת את תכונת הנקין עבורה $\Gamma \subseteq \Delta$.

טענה: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית אזי קיים מילון $\Sigma \subseteq \sigma$ וקיימת Δ מעל Σ עקבית Σ־שלמה המקיימת את תכונת הנקין עבורה $\Gamma \subseteq \Delta$.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ עקבית שלמה המקיימת את תכונת הנקין יהי M מבנה ההרברנד מעל σ עבורו $\left((t_1 \dots t_n) \in R^M\right) \Longleftrightarrow (R (t_1 \dots t_n) \in \Gamma)$ לכל סימן יחס $R \in \sigma$ ולכל שמות עצם $t_1 \dots t_n$ ותהא φ נוסחה אזי $(\varphi \in \Gamma) \Longleftrightarrow (M \models \varphi)$.

מסקנה: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית שלמה המקיימת את תכונת הנקין אזי קיים מבנה M עבורו $M \models \Gamma$.

משפט השלמות: תהיינה Γ הנחות מעל HC ותהא α נוסחה מעל HC אזי $\left(\Gamma \vdash_{\mathrm{HC}} \alpha\right) \Longleftarrow \left(\Gamma \overset{v}{\models} \alpha\right)$.

תורה של מבנה: יהי M מבנה מעל מילון σ אזי $\mathrm{Th}(M) = \{\varphi \mid (M \models \varphi) \wedge (\mathrm{FV}(\varphi) = \varnothing)\}$.

מסקנה: $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_{\mathbb{N}}) = \mathrm{AT}$.

טענה: יהי σ מילון ותהא Γ קבוצת פסוקים התב"ש

• לכל מבנים M, N המספקים את Γ מתקיים $\mathrm{Th}(M) = \mathrm{Th}(N)$.

• לכל פסוק φ מתקיים $(\Gamma \vdash \varphi) \vee (\Gamma \vdash (\neg\varphi))$.

מערכת הוכחה עקבית: מערכת הוכחה בלוגיקה מסדר ראשון S עבורה קיים פסוק φ המקיים $\nvdash \varphi$.

מערכת הוכחה שלמה: מערכת הוכחה בלוגיקה מסדר ראשון S עבורה לכל פסוק φ מתקיים $(\vdash \varphi) \vee (\vdash (\neg\varphi))$.

מערכת הוכחה אפקטיבית: מערכת הוכחה בלוגיקה מסדר ראשון (Σ, N, A, F) עבורה קיים אלגוריתם המכריע אם $\varphi \in A$ לכל נוסחה φ.

אקסיומות אריתמטיקת פיאנו: יהי $\{c_0, \mathrm{succ}, *, +, <\}$ מילון עם שיוויון אזי

• $\forall y (\mathrm{succ}(y) \neq c_0)$.

• $\forall x \forall y ((\mathrm{succ}(x) = \mathrm{succ}(y)) \Longrightarrow (x = y))$.

• תהא φ נוסחה אזי $\forall y_1 \dots \forall y_n ((\varphi (c_0, y_1 \dots y_n) \wedge (\forall x (\varphi (x, y_1 \dots y_n) \Longrightarrow \varphi (\mathrm{succ}(x), y_1 \dots y_n)))) \Longrightarrow (\forall x \varphi (x, x, y_1 \dots y_n)))$.

• $\forall x (x + c_0 = x)$.

• $\forall x \forall y (x + \mathrm{succ}(y) = \mathrm{succ}(x + y))$.

• $\forall x (x * c_0 = c_0)$.

• $\forall x \forall y (x * \mathrm{succ}(y) = x + (x * y))$.

- $\forall x\forall y\left(\left(x<y\right)\Longleftrightarrow\left(\exists z\left(\left(z\neq c_{0}\right)\wedge\left(x+z=y\right)\right)\right)\right)$.

סימון: יהי $\{c_0, \mathrm{succ}, *, +, <\}$ מילון עם שיוויון אזי $\{$אקסיומות אריתמטיקת פיאנו$\} = \mathrm{PA}$.

מערכת הוכחה אריתמטית: מערכת הוכחה בלוגיקה מסדר ראשון (Σ, N, A, F) עבורה $\mathrm{PA} \subseteq A$.

משפט אי השלמות של גדל: תהא S מערכת הוכחה עקבית אפקטיבית ואריתמטית בלוגיקה מסדר ראשון אזי S אינה שלמה.