פולינום: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו $a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ אזי $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$.

שיוויון פולינומים: יהיו $f(x)=\sum a_ix^i, g(x)=\sum b_ix^i$ פולינומים אזי $(f=g)\iff(\forall i.a_i=b_i)$.

חיבור פולינומים: יהיו $f(x)=\sum a_ix^i, g(x)=\sum b_ix^i$ פולינומים אזי $(f+g)(x)=\sum(a_i+b_i)x^i$.

כפל פולינומים: יהיו $f(x)=\sum a_ix^i, g(x)=\sum b_ix^i$ פולינומים אזי $(fg)(x)=\sum_k\left(\sum_{m=0}^{k}a_mb_{k-m}\right)x^k$.

הגדרה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\mathbb{F}[x]=\left\{\sum_{i=0}^{n}a_ix^i \mid a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{F}\right\}$.

משפט: ($\mathbb{F}[x]$ חוג)$\wedge$($\mathbb{F}[x]$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$).

מחלק: יהי $f\in\mathbb{F}[x]$ אזי $g\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$ עבורו $\exists h\in\mathbb{F}[x].gh=f$.

סימון: יהי $f\in\mathbb{F}[x]$ ויהי $g\in\mathbb{F}[x]$ מחלק אזי $(g\mid f)\wedge\left(f\vdots g\right)$.

דרגה: יהי $\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ פולינום אזי $\deg\left(\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\right)=\begin{cases}-\infty & f=0\\ \max\{k\mid a_k\neq0\} & else\end{cases}$.

למה: יהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]$ אזי $(\deg(fg)=\deg(f)+\deg(g))\wedge(\deg(f+g)\le\max\{\deg(f),\deg(g)\})$.

מסקנה: יהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$ אזי $(g\mid f)\Longrightarrow(\deg(g)\le\deg(f))$.

מסקנה: יהי $f\in\mathbb{F}[x]$ אזי $(f\in\mathbb{F}\setminus\{0\})\iff\left(\frac{1}{f}\in\mathbb{F}[x]\right)$.

תחום שלמות: חוג קומוטטיבי R המקיים $\forall a,b\in R\setminus\{0\}.ab\neq0$.

משפט: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\mathbb{F}[x]$ תחום שלמות.

משפט: יהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]$ עבורם $\deg(g)\le\deg(f)$ אזי $\exists!q,r\in\mathbb{F}[x].(f=gq+r)\wedge(\deg(r)\le\deg(r))$.

שארית: יהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]$ אזי $r\in\mathbb{F}[x]$ עבורו $(f=gq+r)\wedge(\deg(r)\le\deg(r))$.

מנה חלקית: יהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]$ אזי $q\in\mathbb{F}[x]$ עבורו $(f=gq+r)\wedge(\deg(r)\le\deg(r))$.

הערה: אם $r=0$ אזי במקום מנה חלקית נאמר מנה שלמה.

אידיאל: יהי R חוג קומוטטיבי אזי $I\subseteq R$ המקיים $\forall a\in I.(\forall b\in I.a+b\in I)\wedge(\forall c\in R.ca\in I)$.

האידיאל הנוצר: יהיו $f_1\ldots f_n\in R$ אזי $\langle f_1\ldots f_n\rangle=\{\sum_{i=1}^{n}f_ig_i\mid g_1\ldots g_n\in R\}$.

טענה: יהי R חוג קומוטטיבי ויהיו $f_1\ldots f_n\in R$ אזי $\langle f_1\ldots f_n\rangle$ אידיאל.

למה: יהיו $f_1\ldots f_n\in R$ ויהי $I\subseteq R$ אידיאל המקיים $f_1,\ldots,f_n\in I$ אזי $\langle f_1\ldots f_n\rangle\subseteq R$.

אידיאל ראשי: אידיאל $I\subseteq R$ המקיים $\exists f\in R.I=\langle f\rangle$.

תחום ראשי: תחום שלמות R עבורו כל אידיאל ראשי.

משפט: יהי $I\subseteq\mathbb{F}[x]$ אידיאל אזי I ראשי.

מחלק משותף: יהיו $f_1\ldots f_n\in\mathbb{F}[x]$ אזי $g\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$ המקיים $\forall i.g\mid f_i$.

מחלק משותף מקסימלי: יהיו $f_1\ldots f_n\in\mathbb{F}[x]$ אזי $\max_{\deg}\{g\mid\forall i.(g\mid f_i)\}$.

משפט: מחלק משותף מקסימלי קיים ויחיד עד כדי כפילה בסקלר.

סימון: יהיו $f_1\ldots f_n\in\mathbb{F}[x]$ אזי המחלק המשותף המקסימלי הינו $\gcd(f_1\ldots f_n)$.

טענה: יהיו $f_1\ldots f_n\in\mathbb{F}[x]$ יהי g מחלק משותף אזי $g\mid\gcd(f_1\ldots f_n)$.

משפט: היו $f_1\ldots f_n\in\mathbb{F}[x]$ אזי $\exists h_1\ldots h_n\in\mathbb{F}[x].\gcd(f_1\ldots f_n)=\sum_{i=1}^{n}h_if_i$.

אלגוריתם אוקלידס: יהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]$ עבורם $f=pg+r$ וכן $r\neq0$ אזי $\gcd(f,g)=\gcd(g,r)$.

פולינומים זרים: $f,g\in\mathbb{F}[x]$ המקיימים $\gcd(f,g)=1$.

מסקנה: יהיו $f,g,h\in\mathbb{F}[x]$ אזי $(h\neq0)\wedge(h\mid fg)\wedge(\gcd(f,h)=1)\Longrightarrow(h\mid g)$.

הפיך: יהי R תחום שלמות אזי $u\in R\setminus\{0\}$ המקיים $u\mid1$.

הגדרה: יהי R תחום שלמות אזי $R^*=\{u\in R\mid(u\mid1)\}$.

אי־פריק (א"פ): $p\in R\backslash R^*$ המקיים $\forall a,b\in R.(p=ab)\Longrightarrow(a\in R^*)\vee(b\in R^*)$.

ראשוני: $p\in R\setminus\{0\}$ המקיים $\forall a,b\in R.(p\mid ab)\Longrightarrow(p\mid a)\vee(p\mid b)$.

למה: יהי $p\in\mathbb{F}[x]$ א"פ אזי p ראשוני.

חברים/שקולים: $f,g\in R$ המקיימים $\exists u\in R^*.fu=g$.

טענה: יהיו $f,g\in R$ אזי (f,g חברים)$\iff((f\mid g)\wedge(g\mid f))$.

משפט: יהי $f\in\mathbb{F}[x]$ אזי קיימים ויחידים $p_1\ldots p_n\in\mathbb{F}[x]$ א"פ עבורם $\prod p_i=f$.

כפולה משותפת: יהיו $f_1\ldots f_n\in\mathbb{F}[x]$ אזי $g\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$ המקיים $\forall i.f_i\mid g$.

כפולה משותפת מינימלית: יהיו $f_1 \dots f_n \in \mathbb{F}[x]$ אזי $\min_{\deg}\{g \mid \forall i.(f_i \mid g)\}$.

משפט: כפולה משותפת מינימלית קיימת ויחידה עד כדי כפילה בסקלר.

סימון: יהיו $f_1 \dots f_n \in \mathbb{F}[x]$ אזי הכפולה המשותפת המינימלית הינה $\operatorname{lcm}(f_1 \dots f_n)$.

טענה: יהיו $f_1 \dots f_n \in \mathbb{F}[x]$ יהי g כפולה משותפת אזי $\operatorname{lcm}(f_1 \dots f_n) \mid g$.

שורש: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $f \in \mathbb{F}[x]$ אזי $\alpha \in \mathbb{F}$ המקיים $f(\alpha) = 0$.

משפט בז'ו: יהי $f \in \mathbb{F}[x]$ ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$ אזי

- נניח כי $f(x) = p(x)(x-\alpha) + r(x)$ אזי $f(\alpha) = r(\alpha)$.
- (α שורש של f)$\Longleftrightarrow$($(x-\alpha) \mid f$).

ריבוי שורש: יהי $f \in \mathbb{F}[x]$ ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$ אזי $\max\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left((x-\alpha)^k \mid f\right)\right\}$.

משפט: יהי $f \in \mathbb{F}[x] \backslash \{0\}$ ויהיו $r_1 \dots r_n \in \mathbb{F}$ ריבוי שורשים שונים אזי $\sum_{i=1}^n r_i \le \deg(f)$.

מסקנה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אינסופי עבורו $\forall \alpha \in \mathbb{F}.f(\alpha) = g(\alpha)$ אזי $f = g$.

שדה סגור אלגברית: שדה $\mathbb{F}$ המקיים $\forall f \in \mathbb{F}_{\ge 1}[x].\exists \alpha \in \mathbb{F}.f(\alpha) = 0$.

המשפט היסודי של האלגברה: $\mathbb{C}$ שדה סגור אלגברית.

משפט: יהי $f \in \mathbb{R}[x]$ ויהי $\alpha \in \mathbb{C}$ אזי $(f(\alpha) = 0) \Longleftrightarrow (f(\overline{\alpha}) = 0)$.

מסקנה: יהי $f \in \mathbb{R}[x]$ אזי קיימים $p_1 \dots p_n \in \mathbb{R}[x]$ לינאריים וכן $q_1 \dots q_m \in \mathbb{R}[x]$ ממעלה שנייה ללא שורש ממשי המקיימים $f = \prod p_i \prod q_i$.

משפט: יהי $f = \sum a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ המקיים $\gcd(a_0 \dots a_n) = 1$ וכן $a_n a_0 \ne 0$ ויהי $\alpha = \frac{p}{q}$ עבור $\gcd(p,q) = 1$ אזי

- $(f(\alpha) = 0) \Longrightarrow (p \mid a_0) \wedge (q \mid a_n)$.
- $(\alpha \ne 1) \Longrightarrow ((p-q) \mid f(1))$.
- $(\alpha \ne -1) \Longrightarrow ((p+q) \mid f(-1))$.

קריטריון אייזנשטיין: יהי $f = \sum a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ המקיים $\gcd(a_0 \dots a_n) = 1$ וכן $a_n a_0 \ne 0$ ויהי $p \in \mathbb{P}$ עבורו $(\gcd(a_n, p) = 1) \wedge (\forall 0 \le i \le n-1.p \mid a_i) \wedge (p^2 \nmid a_0)$ אזי f אינו פריק מעל $\mathbb{Q}[x]$.

נגזרת: יהי $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{F}[x]$ אזי $f' = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$.

סימון: נגדיר $\mathcal{D} : \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[x]$ כך $\mathcal{D}(f) = f'$.

טענה: ($\mathcal{D}$ ט"ל)$\wedge (\mathcal{D}(fg) = g\mathcal{D}(f) + f\mathcal{D}(g))$.

שורש פשוט: שורש שהריבוי שלו 1.

שורש מרובה: שורש שהריבוי שלו גדול מ־1.

משפט: יהי $f \in \mathbb{F}[x]$ ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$ שורש אזי (α שורש מרובה)$\Longleftrightarrow$(α שורש של f').

מאפיין שדה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid m \cdot 1 = 0\}$ ואם אינו מוגדר אזי $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = 0$.

משפט: יהי $\mathbb{F}$ שדה המקיים $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = 0$ אזי (α שורש מריבוי r של f)$\Longleftarrow$(α שורש מריבוי $r-1$ של f').

סימון: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי הצורה הקנונית היא $A_{\text{can}}^{\mathbb{F}}$.

אופרטור לינארי/loop closed: $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$.

loop open: $\varphi \in \operatorname{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$.

סימון: $\operatorname{GL}(n, \mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid |A| \ne 0\}$.

מטריצות דומות: $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ המקיימות $\exists C \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{F}).B = C^{-1}AC$.

ערך עצמי (ע"ע): יהי $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ אזי $\lambda \in \mathbb{F}$ עבורו $\exists v \in L \backslash \{0\}.\varphi(v) = \lambda v$.

הספקטרום: יהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\operatorname{Spec}_{\mathbb{F}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{F} \mid A \text{ ע"ע של } \lambda\}$.

וקטור עצמי (ו"ע): יהי $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ אזי $0 \ne v \in V$ עבורו $\exists \lambda \in \mathbb{F}.\varphi(v) = \lambda v$.

תת מרחב עצמי (מ"ע): יהי $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע אזי $L_\lambda = \{v \in L \mid \varphi(v) = \lambda v\}$.

למה: ($L_\lambda \subseteq L$ תמ"ו)$\wedge (L_\lambda = \ker(\varphi - \lambda I))$.

בסיס עצמי: יהי $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ אזי בסיס $\mathcal{B}$ המורכב מוקטורים עצמיים של φ.

העתקה לכסינה: $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ עבורה קיים בסיס $\mathcal{B}$ המקיים $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ אלכסונית.

משפט: יהי L מ"ו נ"ס ויהי $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ אזי (φ ניתן ללכסון)$\Longleftrightarrow$(קיים בסיס עצמי ל־L).

הערה: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ לכסינה אזי A_{can} צורה אלכסונית.

למה: יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ שונים אזי $\bigoplus_{i=1}^n L_{\lambda_i}$.

מסקנה: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ בעל $\lambda_{1},\ldots,\lambda_{\dim\left(L\right)}$ ע"ע שונים אזי φ ניתן ללכסון.

פולינום אופייני: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $p_{A}\left(x\right)=\det\left(xI-A\right)$.

טענה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $p_{A}\in\mathbb{F}\left[x\right]$.

למה: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ ויהיו $\mathcal{B}_{1},\mathcal{B}_{2}$ בסיסים אזי $p_{\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}_{1}}}\left(x\right)=p_{\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}_{2}}}\left(x\right)$.

פולינום אופייני: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ ויהי $\mathcal{B}$ בסיס אזי $p_{\varphi}\left(x\right)=p_{\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}}}\left(x\right)$.

פולינום מתוקן: $\sum_{i=0}^{n}a_{i}x^{i}\in\mathbb{F}\left[x\right]$ עבורו $a_{n}=1$.

משפט: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי $\left(p_{\varphi}\right.$ פולינום מתוקן$\left.\right)\wedge\left(\deg\left(p_{\varphi}\right)=\dim\left(L\right)\right)$.

טענה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ עבורו $p_{\varphi}=\sum_{i=0}^{n}a_{i}x^{i}$ אזי

- $a_{n-1}=-\text{trace}\left(A\right)$.
- $a_{0}=\left(-1\right)^{n}\det\left(A\right)$

למה: תהיינה $A,B\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $\left(p_{AB}=p_{BA}\right)\wedge\left(p_{A}=p_{A^{t}}\right)$.

מסקנה: תהיינה $A,B\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $\text{trace}\left(AB\right)=\text{trace}\left(BA\right)$.

משפט: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ אזי $\left(\lambda\in\text{Spec}\left(A\right)\right)\iff\left(p_{A}\left(\lambda\right)=0\right)$.

משפט: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ יהי $x\in\mathbb{F}^{n}$ ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ אזי $\left(x\right.$ ו"ע של ע"ע $\left.\lambda\right)\iff\left(x\in\ker\left(\lambda I-A\right)\right)$.

חיבור מרוכב: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $a,b,c,d\in L$ אזי $\left\langle a,b\right\rangle +_{\mathbb{C}}\left\langle c,d\right\rangle =\left\langle a+c,b+d\right\rangle$.

כפל מרוכב: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $a,b,c,d\in L$ אזי $\left\langle a,b\right\rangle \cdot_{\mathbb{C}}\left\langle c,d\right\rangle =\left\langle ac-bd,ad+bc\right\rangle$.

מירכוב: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $L_{\mathbb{C}}=\left\langle L^{2},+_{\mathbb{C}},*_{\mathbb{C}}\right\rangle$.

סימון: יהי $\left\langle a,b\right\rangle \in L_{\mathbb{C}}$ אזי $a+ib=\left\langle a,b\right\rangle$.

טענה: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $L_{\mathbb{C}}$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$.

משפט: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $\alpha+i\beta$ ע"ע עבור ו"ע $u+iv$ אזי $\left(Au=\alpha u-\beta v\right)\wedge\left(Av=\beta u+\alpha v\right)$.

הא $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ לכסינה מעל $\mathbb{C}$ באשר $A_{\text{can}}^{\mathbb{C}}=\text{Diag}\left(\lambda_{1}\ldots\lambda_{m},\alpha_{1}+i\beta_{1}\ldots\alpha_{\ell}+i\beta_{\ell}\right)$ אזי $A_{\text{can}}^{\mathbb{R}}=\text{Diag}\left(\lambda_{1}\ldots\lambda_{m},\begin{pmatrix}\alpha_{1} & \beta_{1}\\ -\beta_{1} & \alpha_{1}\end{pmatrix}\ldots\begin{pmatrix}\alpha_{\ell} & \beta_{\ell}\\ -\beta_{\ell} & \alpha_{\ell}\end{pmatrix}\right)$.

מסקנה: תהא $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ לכסינה מעל $\mathbb{C}$ עם ו"ע $u_{1}+iv_{1},\ldots,u_{\ell}+iv_{\ell}$ אזי $u_{1}\ldots u_{\ell},v_{1}\ldots v_{\ell}$ בסיס קנוני מעל $\mathbb{R}$.

ריבוי גאומטרי: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ ויהי λ ע"ע אזי $r_{g}\left(\lambda\right)=\dim\left(L_{\lambda}\right)$.

ריבוי אלגברי: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ ויהי λ ע"ע אזי $r_{a}\left(\lambda\right)=\max\left(n\in\mathbb{N}\mid\left(\left(x-\lambda\right)^{n}|f_{A}\left(x\right)\right)\right)$.

למה: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ ויהי λ ע"ע אזי $r_{g}\left(\lambda\right)\le r_{a}\left(\lambda\right)$.

מסקנה: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי $\left(\varphi\right.$ לכסין מעל $\left.\mathbb{F}\right)\iff\left(p_{\varphi}\left(x\right)\right.$ מתפרק לגורמים לינאריים$\left.\right)\wedge\left(\right.$לכל ע"ע $\left.r_{g}\left(\lambda\right)=r_{a}\left(\lambda\right)\right)$.

מסקנה: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ לכסין ויהיו $\lambda_{1}\ldots\lambda_{n}$ ע"ע אזי בצורה הקנונית כל λ_{i} מופיע $r_{a}\left(\lambda\right)$ פעמים.

מסקנה: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ לכסין אזי הצורה האלכסונית יחידה עד כדי תמורת האיברים על האלכסון.

הגדרה: יהי $p\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_{i}x^{i}$ ותהא $A\in M_{m}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $p\left(A\right)=\sum_{i=0}^{n}a_{i}A^{i}$.

למה: יהי $\mathcal{B}$ בסיס של L ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי $\left[f\left(\varphi\right)\right]_{\mathcal{B}}=f\left(\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}}\right)$.

פולינום מינימלי: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי $m_{\varphi}=\min_{\deg}\left(p\in\mathbb{F}\left[x\right]\mid p\left(\varphi\right)=0\right)$.

הערה: הפולינום המינימלי הינו מתוקן.

משפט: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי $m_{\varphi}\left(x\right)$ קיים ויחיד.

משפט: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ ויהי $p\in\mathbb{F}\left[x\right]$ המקיים $p\left(\varphi\right)=0$ אזי $m_{\varphi}|p$.

טענה: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי $\left\{ p\in\mathbb{F}\left[x\right]\mid p\left(\varphi\right)=0\right\}$ אידיאל של $\mathbb{F}\left[x\right]$.

מסקנה: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי $\left\langle m_{\varphi}\right\rangle =\left\{ p\in\mathbb{F}\left[x\right]\mid p\left(\varphi\right)=0\right\}$.

משפט קיילי המילטון: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $p_{A}\left(A\right)=0$.

מסקנה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $m_{A}|p_{A}$.

למה: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ ויהי λ ע"ע אזי $m_{\varphi}\left(\lambda\right)=0$.

מסקנה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $p_{A}\mid m_{A}^{n}$.

משפט הפירוק הפרימרי: תהא $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ ויהיו $f,g\in\mathbb{F}\left[x\right]$ זרים אזי $\ker\left(\left(f\circ g\right)\left(\varphi\right)\right)=\ker\left(f\left(\varphi\right)\right)\oplus\ker\left(g\left(\varphi\right)\right)$.

מסקנה: תהא $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ ויהיו $f_{1}\ldots f_{n}\in\mathbb{F}\left[x\right]$ זרים בזוגות אזי $\ker\left(\prod f_{i}\left(\varphi\right)\right)=\bigoplus\ker\left(f_{i}\left(\varphi\right)\right)$.

משפט: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ ויהיו $\lambda_{1}\neq\ldots\neq\lambda_{k}$ כל הע"ע אזי $\left(A\right.$ לכסינה$\left.\right)\iff\left(m_{A}\left(x\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(x-\lambda_{i}\right)\right)$.

למה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ לכסינה עבורה $p_{A}\left(x\right)=\prod\left(x-\lambda_{i}\right)$ ויהי $g\in\mathbb{F}\left[x\right]$ אזי $p_{g\left(A\right)}\left(x\right)=\prod\left(x-g\left(\lambda\right)\right)$.

הגדרה: תהא $G(x)$ אנליטית עבורה $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ מתכנס בתחום $|x|<R$ אזי $G(A)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kA^k$.

למה: תהא $G(x)$ אנליטית עבורה $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ מתכנס בתחום $|x|<R$ ותהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ לכסינה עם ע"ע $\lambda_1\dots\lambda_n$ המקיימים $\forall i\in[n].|\lambda_i|<R$ אזי

- הטור $G(A)$ מתכנס.
- $\text{Spec}(F(A))=\{F(\lambda)\mid\lambda\in\text{Spec}(A)\}$.
- $(A_{\text{can}}=C^{-1}AC)\implies\left(F(A)_{\text{can}}=C^{-1}F(A)C=F(A_{\text{can}})\right)$.

לכסון סימולטני: $\varphi,\psi\in\text{Hom}(L)$ לכסינות המקיימות קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $[\varphi]_{\mathcal{B}},[\psi]_{\mathcal{B}}$ אלכסוניות.

למה: תהא A מטריצת בלוקים אלכסונית לכסינה אזי כל בלוק לכסין.

משפט: יהיו $\varphi,\psi\in\text{Hom}(L)$ לכסינות אזי (φ,ψ לכסינות סימולטנית)$\iff(\varphi\psi=\psi\varphi)$.

תת מרחב אינווריאנטי/שמור: יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ אזי תמ"ו $M\subseteq L$ המקיים $\varphi(M)\subseteq M$.

מסקנה: יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ ויהי $M\subseteq L$ תת מרחב איווריאנטי אזי $\varphi\restriction_M$ ט"ל.

למה: יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ אזי $\{0\},L,\ker(\varphi),\text{Im}(\varphi)$ איווריאנטים.

משפט: יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ ויהי λ ע"ע אזי L_λ איווריאנטי.

למה: יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ ויהי M איווריאנטי אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $[\varphi]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}[\varphi\restriction_M]_{\mathcal{B}} & P\\ & A\end{pmatrix}$.

משפט: יהיו $L=\bigoplus_{i=1}^{k}L_i$ איווריאנטים אזי קיים בסיס $\mathcal{B}_1\dots\mathcal{B}_k$ עבורו $[\varphi]_{\mathcal{B}}=\text{Diag}\left([\varphi\restriction_{L_1}]_{\mathcal{B}_1},\dots,[\varphi\restriction_{L_k}]_{\mathcal{B}_k}\right)$.

מטריצה דו אלכסונית: $A\in M_n(\mathbb{F})$ המקיימת $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&\mu_1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&\mu_{n-1}\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$.

תיבת/בלוק ג'ורדן: יהי $\lambda\in\mathbb{F}$ אזי $J_n(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda_1&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{F})$.

צורת/מטריצת ג'ורדן: יהיו $\lambda_1\dots\lambda_n\in\mathbb{F}$ וכן $k_1\dots k_n$ אזי $\text{Diag}(J_{k_1}(\lambda_1)\dots J_{k_n}(\lambda_n))$.

משפט ג'ורדן: יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ עבורו $p_\varphi(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$ אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ מטריצת ג'ורדן.

טענה: צורת ג'ורדן מוגדרת באופן יחיד עדי כדי תמורת תיבות ג'ורדן.

הערה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ בעלת צורת ג'ורדן אזי A_{can} צורת ג'ורדן.

מסקנה: יהיו $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ אזי (A,B דומות)$\iff(A_{\text{can}}=B_{\text{can}})$.

מסקנה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי A^t דומה אל A.

דרגת נילפוטנטיות: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\eta(A)=\min(n\in\mathbb{N}\mid A^n=0)$.

טענה: יהי $n\geq2$ אזי ($J_n(\lambda)$ אינה לכסינה)$\wedge(\eta(J_n(\lambda))=n)$.

מסקנה: יהי $n\geq2$ אזי $m_{J_n(\lambda)}=(x-\lambda)^n=p_{J_n(\lambda)}(x)$.

מרחב עצמי מוכלל: יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ ויהי μ ע"ע אזי $L_\mu^{(k)}=\ker(\varphi-\mu I)^k$.

למה: $L_\mu=L_\mu^{(1)}\subseteq\dots\subseteq L_\mu^{(r_g(\lambda))}=L$.

למה: $L_\mu^{(i)}$ אינבריאנטי ביחס אל φ.

למה: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $\dim\left(L_\mu^{(k)}\right)\leq r_a(\mu)$.

למה: נניח כי $p_\varphi(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)^{k_i}$ עבור $\lambda_1\neq\dots\neq\lambda_n$ אזי $L=\bigoplus_{i=1}^{n}L_{\lambda_i}^{(k_i)}$.

בלתי תלויה ביחס לתת מרחב: יהי תמ"ו $M\subseteq L$ אזי $v_1\dots v_k\in L$ המקיימת $\forall\alpha\in\mathbb{F}^k.\left(\sum\alpha_iv_i\in M\implies\alpha=0\right)$.

קו־בסיס: יהי תמ"ו $M\subseteq L$ אזי $\max_{|A|}\{A\subseteq L\mid$ A בלתי תלויה ביחס אל $M\}$.

טענה: יהי תמ"ו $M\subseteq L$ עם בסיס $\mathcal{B}$ אזי קו־בסיס $\mathcal{C}$ הוא השלמה לבסיס של L.

למה: יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ יהי μ ע"ע יהי $k\in\mathbb{N}_+$ ויהי $e_1\dots e_m$ קו־בסיס של $L_\mu^{(k)}$ ביחס אל $L_\mu^{(k-1)}$

- $(\varphi-\mu I)(e_1)\dots(\varphi-\mu I)(e_m)\in L_\mu^{(k-1)}$.
- $(\varphi-\mu I)(e_1)\dots(\varphi-\mu I)(e_m)$ בלתי תלויים ביחס אל $L_\mu^{(k-2)}$.

למה: תהא $\varphi\in\text{Hom}(L)$ עבורה $[\varphi]_B=\text{Diag}(I(\lambda_1)\dots I(\lambda_k))$ באשר $I(\lambda_i)=\text{Diag}\left(J_{k_1^i}(\lambda_i)\dots J_{k_{n_i}^i}(\lambda_i)\right)$ אזי

- כל הע"ע של φ הם $\lambda_1,\dots,\lambda_k$.
- $r_a(\lambda_i)=\sum_{j=1}^{n_i}k_j^i$.
- $r_g(\lambda_i)=n_i$.

- הריבוי של λ_i בפולינום המינימלי הוא $\max\left(k_1^i,\ldots,k_{n_i}^i\right)$.
- $\left|\left\{j \mid k_j^i \geq r\right\}\right| = \dim\left(\ker\left(\left(T-\lambda_i I\right)^r\right)\right) - \dim\left(\ker\left(\left(T-\lambda_i I\right)^{r-1}\right)\right)$.

למה: יהי $n \in \mathbb{N}$ וכן $a,b \in \mathbb{R}$ אזי
$$J_n\left(a+ib,a-ib\right)_{\text{can}}^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} & \ddots & \\ & & \ddots & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & & & \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \end{pmatrix}_{2k\times 2k}.$$

למה: יהיו $n,m \in \mathbb{N}$ וכן $\mu \in \mathbb{F}$ אזי
$$J_n\left(\mu\right)^m = \begin{pmatrix} \mu^m & n\mu^{m-1} & \binom{m}{2}\mu^{m-2} & & \\ & \mu^m & & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \binom{m}{2}\mu^{m-2} \\ & & & \mu^m & m\mu^{m-1} \\ & & & & \mu^m \end{pmatrix}.$$

למה: יהי $n \in \mathbb{N}$ וכן $\mu \neq 0$ אזי
$$J_n\left(\mu\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \mu^{-1} & -\mu^{-2} & \mu^{-3} & & \\ & \mu^{-1} & -\mu^{-2} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \mu^{-3} \\ & & & \mu^{-1} & -\mu^{-2} \\ & & & & \mu^{-1} \end{pmatrix}.$$

למה: יהי $n \in \mathbb{N}$ וכן $\mu \in \mathbb{F}$ אזי
$$\exp\left(J_n\left(\mu\right)\right) = e^{\mu}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ & 1 & \frac{1}{1!} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!} \\ & & & 1 & \frac{1}{1!} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

מכפלה פנימית ממשית (מ"פ): יהי L מ"ו נ"ס אזי $(\cdot,\cdot) : L^2 \to \mathbb{R}$ המקיימת
- סימטריות: $\forall a,b \in L.\left(a,b\right)=\left(b,a\right)$.
- דו־לינאריות: $\forall a,b,c \in L.\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}.\left(\alpha a+\beta b,c\right) = \alpha\left(a,c\right)+\beta\left(b,c\right)$.
- חיוביות: $\forall a \in L.\left(a,a\right) \geq 0$.
- חיוביות ממש: $\forall a \in L.\left(\left(a,a\right)=0\right) \iff \left(a=0\right)$.

מכפלה פנימית מרוכבת (מ"פ): יהי L מ"ו נ"ס אזי $(\cdot,\cdot) : L^2 \to \mathbb{C}$ המקיימת
- הרמיטיות: $\forall a,b \in L.\left(a,b\right)=\overline{\left(b,a\right)}$.
- לינאריות: $\forall a,b,c \in L.\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}.\left(\alpha a+\beta b,c\right) = \alpha\left(a,c\right)+\beta\left(b,c\right)$.
- חיוביות: $\forall a \in L.\left(a,a\right) \in \mathbb{R}_+$.
- חיוביות ממש: $\forall a \in L.\left(\left(a,a\right)=0\right) \iff \left(a=0\right)$.

מרחב אוקלידי: $\left(L,+,*,\left(\cdot,\cdot\right)\right)$ באשר ($\left(L,+,*\right)$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$)$\wedge$($\left(\cdot,\cdot\right)$ מכפלה פנימית ממשית).

מרחב אוניטרי: $\left(L,+,*,\left(\cdot,\cdot\right)\right)$ באשר ($\left(L,+,*\right)$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$)$\wedge$($\left(\cdot,\cdot\right)$ מכפלה פנימית מרוכבת).

מרחב מכפלה פנימית (ממ"פ): (מרחב אוניטרי)$\vee$(מרחב אוקלידי).

מימוש: יהי $\langle L,+,\cdot\rangle$ מרחב אוניטרי אזי $\langle L_{\mathbb{R}},+,\cdot\rangle$.

משפט: יהי L מרחב אוניטרי אזי ($L_{\mathbb{R}}$ מ"ו)$\wedge$($\left(a,b\right)_{\mathbb{R}} = \text{Re}\left(a,b\right)$ מ"פ על $L_{\mathbb{R}}$).

למה: יהי L מרחב אוניטרי אזי $\dim_{\mathbb{R}}\left(L_{\mathbb{R}}\right) = 2\dim_{\mathbb{C}}\left(L\right)$.

הגדרה: יהיו $a,b \in \mathbb{C}^n$ נגדיר $\left(a,b\right)_{\text{st}} = \sum_{i=1}^n a_i\overline{b_i}$.

הגדרה: יהיו $A,B \in M_{m\times n}\left(\mathbb{C}\right)$ נגדיר $\left(A,B\right)_{\text{st}} = \text{trace}\left(A^t\overline{B}\right)$.

הגדרה: יהיו $f,g \in C_{\mathbb{C}}\left(\left[\alpha,\beta\right]\right)$ נגדיר $\left(f,g\right)_{\text{st}} = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx$.

משפט קושי שוורץ: יהי L ממ"פ ויהיו $a,b \in L$ אזי $\left(a,b\right)^2 \leq \left(a,a\right)\cdot\left(b,b\right)$.

טענה: יהיו $a,b \in L$ אזי $\left(a \in \text{span}\left(b\right)\right) \iff \left(\left(a,b\right)^2 = \left(a,a\right)\cdot\left(b,b\right)\right)$.

נורמה/אורך: יהי $a \in L$ אזי $\|a\| = \sqrt{\left(a,a\right)}$.

זווית: יהיו $a,b \in L\backslash\left\{0\right\}$ אזי $\alpha \in \left[0,\pi\right]$ עבורה $\cos\left(\alpha\right) = \frac{(a,b)}{\|a\|\|b\|}$.

סימון: יהיו $a,b \in L\backslash\left\{0\right\}$ אזי $\widehat{ab}$ הזווית בין a,b.

מרחק: יהיו $a,b \in L$ אזי $\text{dist}\left(a,b\right) = \|a-b\|$.

למה: יהי L ממ"פ יהיו $a,b \in L$ ויהי λ סקלר אזי
- $\left(\|a\| \geq 0\right) \wedge \left(\left(\|a\|=0\right) \iff \left(a=0\right)\right)$.

- $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $|\|a\| - \|b\|| \leq \|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$.

למה: יהי L ממ"פ ויהיו $a, b \in L \setminus \{0\}$ אזי

- $-1 \leq \cos\left(\widehat{ab}\right) \leq 1$.
- $(\exists t > 0 . b = ta) \iff \left(\cos\left(\widehat{ab}\right) = 1\right)$.
- $(\exists t < 0 . b = ta) \iff \left(\cos\left(\widehat{ab}\right) = -1\right)$.

וקטורים ניצבים/אורתוגונליים (א"ג): $a, b \in L$ המקיימים $(a, b) = 0$.

סימון: יהיו a, b ניצבים אזי $a \perp b$.

משפט פיתגורס: יהיו $a, b \in L$ אזי $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \iff a \perp b$.

למה: יהי L ממ"פ ויהיו $a, b, c \in L$ אזי

- סימטריות: $\text{dist}(a, b) = \text{dist}(b, a)$.
- חיוביות: $\text{dist}(a, b) \geq 0$.
- חיוביות ממש: $(a = b) \iff (\text{dist}(a, b) = 0)$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\text{dist}(a, b) \leq \text{dist}(a, c) + \text{dist}(c, b)$.

שחזור מכפלה פנימית מנורמה: יהי L ממ"פ ויהיו $a, b \in L$ אזי

- L מרחב אוקלידי אזי $(a, b) = \frac{\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2}{4}$.
- L מרחב אוניטרי אזי $(a, b) = \frac{\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2}{4} + i \frac{\|a+ib\|^2 - \|a-ib\|^2}{4}$.

מרחב בעל נורמה: יהי L מ"ו נ"ס אזי $\upsilon : L \to \mathbb{R}$ המקיימת

- $(\upsilon(a) \geq 0) \wedge ((\upsilon(a) = 0) \iff (a = 0))$.
- $\upsilon(\lambda a) = |\lambda| \cdot \upsilon(a)$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\upsilon(a+b) \leq \upsilon(a) + \upsilon(b)$.

טענה: יהי L ממ"פ אזי L מרחב בעל נורמה.

שיוויון המקבילית: נורמה υ המקיימת $\forall a, b \in L . \upsilon(a+b)^2 + \upsilon(a-b)^2 = 2\left(\upsilon(a)^2 + \upsilon(b)^2\right)$.

משפט: יהי L מרחב בעל נורמה υ אזי (υ מקיימת שיוויון המקבילית)$\iff$(υ משרה מכפלה פנימית).

טענה: מעל $C([\alpha, \beta])$ הנורמה $\upsilon(f) = \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x)|$ אינה מושרת ממכפלה פנימית.

מטריצת גראם: יהי L ממ"פ ויהיו $a_1 \ldots a_k \in L$ אזי $G(a_1 \ldots a_k) \in M_k(\mathbb{C})$ כך $(G(a_1 \ldots a_k))_{i,j} = (a_i, a_j)$.

מטריצה הרמיטית: $A \in M_n(\mathbb{C})$ המקיימת $A^t = \overline{A}$.

טענה: יהי L ממ"פ ויהיו $a_1 \ldots a_k \in L$ אזי $G(a_1 \ldots a_k)^t = \overline{G(a_1 \ldots a_k)}$.

מסקנה: יהי L מרחב אוקלידי ויהיו $a_1 \ldots a_k \in L$ אזי $G(a_1 \ldots a_k)^t = G(a_1 \ldots a_k)$.

משפט: יהיו $a_1 \ldots a_k \in L$ אזי ($a_1 \ldots a_k$ בת"ל)$\iff (\det(G(a_1 \ldots a_k)) \neq 0)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{B} \subseteq L$ בסיס אזי $\det G(\mathcal{B}) \neq 0$.

וקטורים אורתונורמלים (א"נ): $a_1 \ldots a_n \in L$ המקיימים $(a_i, a_j) = \delta_{i,j}$.

מסקנה: יהיו $a_1 \ldots a_n \in L$ אורתונורמלים אזי $G(a_1 \ldots a_n) = I_n$.

מסקנה: יהיו $a_1 \ldots a_n \in L$ אורתונורמליים אזי $a_1 \ldots a_n$ בת"ל.

משפט: יהי $\mathcal{B}$ בסיס ויהיו $a, b \in L$ אזי $(a, b) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ([a]_{\mathcal{B}})_i \overline{([b]_{\mathcal{B}})_j} (\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{B}$ בסיס ויהיו $a, b \in L$ אזי $(a, b) = [a]_{\mathcal{B}}^t G(\mathcal{B}) \overline{[b]_{\mathcal{B}}}$.

משפט: יהיו $\mathcal{B}, \mathcal{D}$ בסיסים ותהא C מטריצת מעבר בין הבסיסים אזי $G(\mathcal{D}) = C^t G(\mathcal{B}) \overline{C}$.

מטריצות חופפות: $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ המקיימות $\exists C \in \text{GL}(n, \mathbb{F}) . C^t B C = A$.

מסקנה: יהיו $\mathcal{B}, \mathcal{D}$ בסיסים למרחב אוקלידי אזי $G(\mathcal{B}), G(\mathcal{D})$ חופפות.

בסיס דואלי: יהי $\mathcal{B}$ בסיס אזי בסיס $\mathcal{D}$ המקיים $(\mathcal{D}_i, \mathcal{B}_j) = \delta_{i,j}$.

סימון: יהי $\mathcal{B}$ בסיס אזי $\mathcal{B}^*$ בסיס דואלי.

משפט: יהי $\mathcal{B}$ בסיס ויהי $a \in L$ אזי

- $\mathcal{B}^*$ קיים ויחיד.
- $\mathcal{B}^{**} = \mathcal{B}$.
- $a = \sum_{i=1}^n (a, \mathcal{B}_i^*) \mathcal{B}_i$.

למה: יהיו $a_1 \dots a_k \in L$ אזי קיימים $e_1 \dots e_m \in L$ אורתונורמליים עבורם $\text{span}\{e_1 \dots e_m\} = \text{span}\{a_1 \dots a_k\}$.

אורתונורמליזציית גראם שמידט: יהיו $a_1 \dots a_k \in L$ בת"ל נגדיר $\text{GS}(a_1 \dots a_k) = \{e_1 \dots e_k\}$ כך

- $e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$.
- לכל $2 \le i \le k$
  - $a_i' = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} (a_i, e_j) e_j$.
  - $e_i = \frac{a_i'}{\|a_i'\|}$.

טענה: יהיו $a_1 \dots a_k \in L$ בת"ל אזי ($\text{GS}(a_1 \dots a_k)$ אורתונורמליים)$\wedge(\text{span}\{\text{GS}(a_1 \dots a_k)\} = \text{span}\{a_1 \dots a_k\})$.

מסקנה: יהי L ממ"פ אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ אורתונורמלי.

למה: יהי L ממ"פ יהי $\mathcal{B}$ בסיס אורתונורמלי ויהיו $a, b \in L$

- $a = \sum_{i=1}^{n} (a, \mathcal{B}_i) \mathcal{B}_i$.
- $\|a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} ([a]_{\mathcal{B}})_i^2}$.
- $(a, b) = \sum_{i=1}^{n} ([a]_{\mathcal{B}})_i \overline{([b]_{\mathcal{B}})_i}$.
- $\text{dist}(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(([a]_{\mathcal{B}})_i - ([b]_{\mathcal{B}})_i\right)^2}$.
- $\cos\left(\widehat{ab}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} ([a]_{\mathcal{B}})_i ([b]_{\mathcal{B}})_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} ([a]_{\mathcal{B}})_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} ([b]_{\mathcal{B}})_i^2}}$.

מסקנה: יהיו $a_1 \dots a_k \in L$ אזי $\det(G(a_1 \dots a_k)) \ge 0$.

מסקנה: יהיו $a_1 \dots a_k \in L$ בת"ל אזי $\det(G(a_1 \dots a_k)) > 0$.

מקבילון: יהי L מרחב אוקלידי ויהיו $a_1 \dots a_k \in L$ בת"ל אזי $P(a_1 \dots a_k) = \left\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \mid \forall i \in [k] . \lambda_i \in [0,1]\right\}$.

נפח מקבילון: יהיו $a_1 \dots a_k \in L$ בת"ל אזי $\text{Vol}(P(a_1 \dots a_k)) = \sqrt{\det(G(a_1 \dots a_k))}$.

למה: יהיו $a_1 \dots a_k \in L$ אורתוגונליים אזי $\text{Vol}(P(a_1 \dots a_k)) = \prod_{i=1}^{k} \|a_i\|$.

למה: יהי $\mathcal{B}$ בסיס אורתונורמלי יהי $\mathcal{D}$ בסיס ותהא C מטריצת מעבר אזי $\text{Vol}(P(\mathcal{D})) = |\det(C)|$.

אוריינטציה: יהיו $\mathcal{B}, \mathcal{D}$ בסיסים ותהא C מטריצת מעבר אזי $\text{sign}(\det(C))$.

מטריצה אורתוגונלית: יהיו $\mathcal{B}, \mathcal{D}$ בסיסים אורתונורמליים במרחב אוקלידי אזי מטריצת המעבר C.

מטריצה אוניטרית: היו $\mathcal{B}, \mathcal{D}$ בסיסים אורתונורמליים במרחב אוניטרי אזי מטריצת המעבר C.

משפט: תהא $C \in M_n(\mathbb{R})$ אזי (C אורתוגונלית)$\iff(C^t C = I)$.

משפט: תהא $C \in M_n(\mathbb{C})$ אזי (C אוניטרית)$\iff\left(C^t \overline{C} = I\right)$.

סימון: $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = I\}$.

סימון: $U(n) = \left\{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^t \overline{A} = I\right\}$.

משפט: תהא $C \in O(n) \cup U(n)$ אזי $|\det(C)| = 1$.

משפט: תהא $C \in M_n(\mathbb{R})$ אזי (עמודות C בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$)$\iff(C \in O(n))$.

משפט: תהא $C \in M_n(\mathbb{C})$ אזי (עמודות C בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^n$)$\iff(C \in U(n))$.

מטריצות אורתוגונליות מיוחדות: $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$.

מטריצות אוניטריות מיוחדות: $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det(A) = 1\}$.

משפט: ($\langle O(n), \cdot \rangle$ חבורה)$\wedge$($\langle SO(n), \cdot \rangle$ חבורה)$\wedge$($\langle U(n), \cdot \rangle$ חבורה)$\wedge$($\langle SU(n), \cdot \rangle$ חבורה).

משלים ניצב: יהי $M \subseteq L$ תמ"ו אזי $M^\perp = \{a \in L \mid \forall b \in M . (a, b) = 0\}$.

משפט: יהי $M \subseteq L$ תמ"ו אזי ($M^\perp$ תמ"ו)$\wedge\left(M \oplus M^\perp = L\right)$.

למה: יהי $M \subseteq L$ תמ"ו

- $\left(M^\perp\right)^\perp = M$.
- $\dim\left(M^\perp\right) = \dim(L) - \dim(M)$.
- $(M + U)^\perp = M^\perp \cap U^\perp$.
- $(M \cap U)^\perp = M^\perp + U^\perp$.

מרחק: יהי $M \subseteq L$ תמ"ו ויהי $a \in L$ אזי $\text{dist}(a, M) = \inf\{\text{dist}(a, b) \mid b \in M\}$.

סימון: יהי $a \in L$ אזי $a_M \in M$, $a_\perp \in M^\perp$ היחידים שמקיימים $a = a_\perp + a_M$.

הטלה אורתוגונלית: יהי $M \subseteq L$ תמ"ו אזי $\text{pr}_M \in \text{Hom}(L, M)$ המוגדרת $\text{pr}_M(a) = a_M$.

משפט: יהי $M \subseteq L$ תמ"ו ויהי $a \in L$ אזי

- $\text{dist}(a,M)=\|a_\perp\|$.
- $\text{dist}(a,a_M)=\min\{\text{dist}(a,b)\mid b\in M\}$.
- $\forall b\in M\backslash\{a_M\}.\text{dist}(a,b)>\text{dist}(a,a_M)$.
- $\text{dist}(a,M)=\sqrt{\frac{\det(G(a,\mathcal{B}))}{\det(G(\mathcal{B}))}}$.

משפט: יהי $L\subseteq M$ תמ"ו ויהיו $a,b\in L$ אזי $(a,b)=(a_M,b_M)+(a_\perp,b_\perp)$.

למה: יהי L מרחב אוקלידי אזי $\dim_{\mathbb{R}}(L)=\dim_{\mathbb{C}}(L_{\mathbb{C}})$.

משפט: יהי L מרחב אוקלידי אזי $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{C}}$ מכפלה פנימית מעל $L_{\mathbb{C}}$.

משפט אוילר־פורייה־פרסבל: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

פונקציונל ליניארי: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $f\in\text{Hom}(V,\mathbb{F})$.

המרחב הדואלי: $V^*=\text{Hom}(V,\mathbb{F})$.

הגדרה: יהי L ממ"פ על $\mathbb{F}$ ויהי $a\in L$ אזי $\varphi_a:L\to\mathbb{F}$ המוגדרת $\varphi_a(b)=(b,a)$.

למה: יהי L ממ"פ ויהי $a\in L$ אזי $\varphi_a\in L^*$.

משפט: יהי L ממ"פ נ"ס אזי $f:L\to L^*$ המוגדרת $f(a)=\varphi_a$ חח"ע ועל.

מסקנה: יהי L מרחב אוקלידי נ"ס אזי $f:L\to L^*$ המוגדרת $f(a)=\varphi_a$ העתקה הפיכה.

איזומטריה: איזומורפיזם $\varphi\in\text{Hom}(L_1,L_2)$ המקיים $\forall a,b\in L_1.(\varphi(a),\varphi(b))=(a,b)$.

משפט: יהיו $\varphi,\phi\in\text{Hom}(L_1,L_2)$ איזומטריות יהיו $a,b\in L_1$ ותהא $\mathcal{D}\subseteq L_1$ בת"ל אזי

- ($\varphi\circ\phi$ איזומטריה)$\wedge$(φ^{-1} איזומטריה).
- $(\|\varphi(a)\|=\|a\|)\wedge(\text{dist}(\varphi(a),\varphi(b))=\text{dist}(a,b))$.
- $\left(\widehat{a,b}=\widehat{\varphi(a),\varphi(b)}\right)\wedge(a\perp b\iff\varphi(a)\perp\varphi(b))$.
- $\text{Vol}(P(\mathcal{D}))=\text{Vol}(P(\varphi(\mathcal{D})))$.

מסקנה: יהי L ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{F}$ אזי $L,\mathbb{F}^{\dim L}$ איזומטריים.

משפט: יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ אזי (φ איזומטריה)$\iff$(קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ עבורו $[\varphi]_{\mathcal{B}}\cdot\overline{[\varphi]_{\mathcal{B}}}^t=I$).

משפט: יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ התב"ש

- φ איזומטריה.
- $\forall a\in L.\|\varphi(a)\|=\|a\|$.
- קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ עבורו $\varphi(\mathcal{B})$ בסיס א"נ.

העתקה קונפורמית: יהי L מרחב אוקלידי אזי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ המקיים $\forall a,b\in L.\widehat{a,b}=\widehat{\varphi(a),\varphi(b)}$.

משפט: יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ אזי (φ העתקה קונפורמית)$\iff$(קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ עבורו $(\exists\lambda\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.[\varphi]_{\mathcal{B}}\in O(n)$).

דטרמיננטה: יהי $\varphi\in\text{Hom}(L_1,L_2)$ איזומורפיזם ויהיו $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2$ בסיסים א"נ בהתאמה אזי $\det(\varphi)=\det\left([\varphi]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}\right)$.

למה: יהי $\varphi\in\text{Hom}(L_1,L_2)$ אזי $\det(\varphi)$ מוגדר היטב עד כדי אוריינטציה.

משפט: יהי $\varphi\in\text{Hom}(L_1,L_2)$ איזומורפיזם ויהי $\mathcal{B}$ בסיס של L_1 אזי $\text{Vol}(P(\varphi(\mathcal{B})))=|\det(\varphi)|\text{Vol}(P(\mathcal{B}))$.

העתקה שומרת נפח: יהיו L_1,L_2 מרחבים אוקלידיים אזי איזומורפיזם $\varphi\in\text{Hom}(L_1,L_2)$ עבורו לכל בסיס $\mathcal{B}$ של L_1 מתקיים $\text{Vol}(P(\varphi(\mathcal{B})))=\text{Vol}(P(\mathcal{B}))$.

מסקנה: יהי $\varphi\in\text{Hom}(L_1,L_2)$ איזומורפיזם אזי (φ שומרת על נפח)$\iff(\det(\varphi)=1)$.

העתקה צמודה: יהי L ממ"פ ויהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ אזי $\phi\in\text{Hom}(L)$ עבורו $\forall a,b\in L.(\varphi(a),b)=(a,\phi(b))$.

משפט: יהי L ממ"פ ויהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ אזי העתקה צמודה קיימת ויחידה.

סימון: יהי L ממ"פ ויהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ אזי ההעתקה הצמודה ל־φ היא φ^*.

למה: יהי L ממ"פ יהיו $\varphi,\psi\in\text{Hom}(L)$ יהי λ סקלר ויהי $\mathcal{B}$ בסיס א"נ אזי

- $[\varphi]_{\mathcal{B}}^*=\overline{[\varphi]_{\mathcal{B}}}^t$.
- $(\varphi^*)^*=\varphi$.
- $(\varphi+\psi)^*=\varphi^*+\psi^*$.
- $(\lambda\varphi)^*=\overline{\lambda}\varphi^*$.
- $(\varphi\psi)^*=\psi^*\varphi^*$.

מסקנה: יהי L מרחב אוקלידי אזי $f\in L^L$ המוגדרת $f(\varphi)=\varphi^*$ היא אוטומורפיזם.

משפט: $\left(\ker(\varphi)=(\text{Im}(\varphi^*))^\perp\right)\wedge\left(\text{Im}(\varphi)=(\ker(\varphi^*))^\perp\right)$.

משפט: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי (φ איזומטריה)$\iff\left(\varphi\varphi^{*}=I\right)$.

העתקה צמודה לעצמה: יהי L ממ"פ אזי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ המקיימת $\varphi=\varphi^{*}$.

למה: יהי $\mathcal{B}$ בסיס א"נ אזי $\left(\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}}=\overline{\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}}}^{t}\right)\iff\left(\varphi=\varphi^{*}\right)$.

משפט: יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי $\left(\forall a\in L.\left(\varphi\left(a\right),a\right)\in\mathbb{R}\right)\iff\left(\varphi=\varphi^{*}\right)$.

למה: יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ המקיים $\forall a\in L.\left(\varphi\left(a\right),a\right)=0$ אזי $\varphi=0$.

למה: יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי קיימים ויחידים $\varphi_{1},\varphi_{2}\in\text{Hom}\left(L\right)$ צמודים לעצמם המקיימים $\varphi=\varphi_{1}+i\varphi_{2}$.

העתקה נורמלית: יהי L ממ"פ אזי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ המקיים $\varphi\varphi^{*}=\varphi^{*}\varphi$.

טענה: תהא $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ נורמלית אזי (λ ע"ע של φ עם ו"ע a)$\Longleftrightarrow$($\overline{\lambda}$ ע"ע של φ^{*} עם ו"ע a).

טענה: תהא $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ נורמלית ויהיו $\lambda\neq\mu$ אזי $L_{\lambda}\perp L_{\mu}$.

טענה: תהא $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ נורמלית אזי (M תמ"ו φ שמור)$\Longrightarrow$($M^{\perp}$ תמ"ו φ שמור).

משפט הפירוק הספקטרלי: יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי (φ לכסין בבסיס א"נ)$\iff\left(\varphi\varphi^{*}=\varphi^{*}\varphi\right)$.

משפט שור: יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ עבורו $\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}}$ משולשית עליונה.

משפט: יהי L מרחב אוקלידי ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי (φ לכסין בבסיס א"נ)$\iff\left(\varphi=\varphi^{t}\right)$.

מסקנה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ הרמיטית אזי קיימת $U\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ אוניטרית עבורה $U^{-1}AU$ אלכסונית ממשית.

למה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ אוניטרית ויהי λ ע"ע אזי $\left\Vert \lambda\right\Vert =1$.

משפט: יהי L ממ"פ ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ נורמלי אזי (φ איזומטריה)$\iff\left(\forall\lambda\in\text{Spec}\left(\varphi\right).\left\Vert \lambda\right\Vert =1\right)$.

ב אוקלידי ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ איזומטריה אזי קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ המקיים $\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}}=\text{Diag}\left(1\ldots1,-1\ldots-1,\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}\ldots\begin{pmatrix}\cos(\beta) & \sin(\beta)\\ -\sin(\beta) & \cos(\beta)\end{pmatrix}\right)$.

מסקנה: תהא $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ איזומטריה אזי

- $L=\mathbb{R}$, אזי (φ שיקוף ביחס לראשית)$\vee\left(\varphi=I\right)$.
- $L=\mathbb{R}^{2}$, אזי (φ שיקוף ביחס לקו ישר שעובר דרך הראשית)$\vee$(φ סיבוב סביב הראשית).
- $L=\mathbb{R}^{3}$, אזי (φ שיקוף ביחס למישור שעובר דרך הראשית)$\vee$(φ שיקוף ביחס לקו ישר שעובר דרך הראשית)$\vee$(φ שיקוף ביחס למישור שעובר דרך הראשית ושיקוף ביחס לקו ישר שאנך למישור ועובר דרך הראשית).

תבנית בילינארית (ת"ב): יהיו L,M מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ אזי $\Phi:L\times M\to\mathbb{F}$ המקיימת

- לינאריות ברכיב ראשון: יהיו $v,u\in L$ ויהי $w\in M$ אזי $\Phi\left(\alpha v+\beta u,w\right)=\alpha\Phi\left(v,w\right)+\beta\Phi\left(u,w\right)$.
- לינאריות ברכיב שני: יהי $v\in L$ ויהיו $u,w\in M$ אזי $\Phi\left(v,\alpha u+\beta w\right)=\alpha\Phi\left(v,u\right)+\beta\Phi\left(v,w\right)$.

סימון: יהיו L,M מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $B\left(L,M\right)=\left\{ \Phi:L\times M\to\mathbb{F}\mid\Phi\text{ תבנית בילינארית}\right\}$.

סימון: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $B\left(L\right)=B\left(L,L\right)$.

מטריצה מייצגת: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ ויהיו $\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{M}$ בסיסים אזי $\left(\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{M}}\right)_{i,j}=\Phi\left(\left(\mathcal{B}_{L}\right)_{i},\left(\mathcal{B}_{M}\right)_{j}\right)$.

משפט: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ יהיו $\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{M}$ בסיסים יהי $a\in L$ ויהי $b\in M$ אזי $\Phi\left(a,b\right)=\left[a\right]_{\mathcal{B}_{L}}^{t}\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{M}}\left[b\right]_{\mathcal{B}_{M}}$.

משפט: ($B\left(L,M\right)$ מ"ו על $\mathbb{F}$)$\wedge\left(\dim\left(B\left(L,M\right)\right)=\dim\left(L\right)\dim\left(M\right)\right)$.

משפט: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ ויהיו $\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{L}',\mathcal{B}_{M},\mathcal{B}_{M}'$ בסיסים אזי $\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}_{L}',\mathcal{B}_{M}'}=\left(\left[\text{Id}\right]_{\mathcal{B}_{L}'}^{\mathcal{B}_{L}}\right)^{t}\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{M}}\left[\text{Id}\right]_{\mathcal{B}_{M}'}^{\mathcal{B}_{M}}$.

דרגה: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ אזי $\text{rank}\left(\Phi\right)=\text{rank}\left(\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{M}}\right)$.

למה: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ אזי $\text{rank}\left(\Phi\right)$ מוגדרת היטב.

הגדרה: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ נגדיר $\Phi_{1}\in\text{Hom}\left(L,M^{*}\right)$ כך $\Phi_{1}\left(a\right)\left(b\right)=\Phi\left(a,b\right)$.

הגדרה: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ נגדיר $\Phi_{2}\in\text{Hom}\left(M,L^{*}\right)$ כך $\Phi_{2}\left(b\right)\left(a\right)=\Phi\left(a,b\right)$.

משפט: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ אזי $\text{rank}\left(\Phi\right)=\text{rank}\left(\Phi_{1}\right)=\text{rank}\left(\Phi_{2}\right)$.

תבנית אי־מנוונת: $\Phi\in B\left(L,M\right)$ עבורה $\left[\Phi\right]$ הפיכה.

משפט: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ התב"ש

- Φ אי־מנוונת.
- Φ_{1},Φ_{2} איזומורפיזמים.
- $\text{rank}\left(\Phi\right)=\dim\left(M\right)=\dim\left(L\right)$.

משפט: תהא $\Phi\in B\left(L\right)$ אזי (Φ אי־מנוונת)$\iff\left(\forall a\in L\backslash\left\{ 0\right\} .\exists b\in L.\Phi\left(a,b\right)\neq0\right)$.

משפט: יהיו $L\neq M$ ותהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ באשר $\text{rank}\left(\Phi\right)=r$ אזי $\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{M}}=\text{Diag}\left(I_{r},0\right)$.

מסקנה: יהיו $L\neq M$ ותהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ באשר $\text{rank}\left(\Phi\right)=r$ אזי קיימים $\varphi_{1}\ldots\varphi_{r}\in L^{*}$ וכן $\psi_{1}\ldots\psi_{r}\in M^{*}$ עבורם $\Phi=\varphi_{1}\psi_{1}+\ldots+\varphi_{r}\psi_{r}$.

למה: יהיו $\varphi_1\dots\varphi_r,\psi_1\dots\psi_r \in L^*$ אזי $\text{rank}\left(\varphi_1\psi_1+\ldots+\varphi_r\psi_r\right)\le r$.

משפט: תהא $\Phi\in B\left(L\right)$ באשר $\text{rank}\left(\Phi\right)=r$ אזי קיימים $\varphi_1\dots\varphi_r,\psi_1\dots\psi_r\in L^*$ עבורם $\Phi=\varphi_1\psi_1+\ldots+\varphi_r\psi_r$.

תבנית ריבועית: תהא $\Phi\in B\left(L\right)$ אזי $Q:L\to\mathbb{F}$ המוגדרת $Q\left(a\right)=\Phi\left(a,a\right)$.

למה: תהא $Q:L\to\mathbb{F}$ תבנית ריבועית עבור ת"ב $\Phi\in B\left(L\right)$ ויהי $a\in L$ אזי

- יהי $\lambda\in\mathbb{F}$ אזי $Q\left(\lambda a\right)=\lambda^2Q\left(a\right)$.
- יהי $b\in L$ אזי $Q\left(a+b\right)=Q\left(a\right)+Q\left(b\right)+\Phi\left(a,b\right)+\Phi\left(b,a\right)$.
- יהי $\mathcal{B}$ בסיס אזי $Q\left(a\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}}\right)_{i,i}\left(\left[a\right]_{\mathcal{B}}\right)_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}\left(\left(\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}}\right)_{i,j}+\left(\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}}\right)_{j,i}\right)\left(\left[a\right]_{\mathcal{B}}\right)_i\left(\left[a\right]_{\mathcal{B}}\right)_j$.

למה: יהי $\text{char}\left(\mathbb{F}\right)\ne2$ ותהא $Q:L\to\mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי קיימת ויחידה $\Phi\in B\left(L\right)$ סימטרית מתאימה לתבנית.

מסקנה: יהי $\text{char}\left(\mathbb{F}\right)\ne2$ ותהא $Q:L\to\mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי $\Phi\left(a,b\right)=\frac{Q(a+b)-Q(a)-Q(b)}{2}$.

הגדרה: יהי $\mathcal{B}$ בסיס ותהא $Q:L\to\mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי $\left[Q\right]_{\mathcal{B}}=\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}}$.

מסקנה: תהא $Q:L\to\mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי $\left[Q\right]^t=\left[Q\right]$.

מסקנה: יהי $\text{char}\left(\mathbb{F}\right)\ne2$ ותהא $Q:L\to\mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי $Q\left(a\right)=\left[a\right]_{\mathcal{B}}^t\left[Q\right]_{\mathcal{B}}\left[a\right]_{\mathcal{B}}$.

למה: תהא $Q:L\to\mathbb{F}$ ויהיו $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ בסיסים אזי $\left[Q\right]_{\mathcal{B}'}=\left(\left[\text{Id}\right]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right)^t\left[Q\right]_{\mathcal{B}}\left(\left[\text{Id}\right]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right)^t$.

מטריצות חופפות: $A,B\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ המקיימות $\exists C\in\text{GL}\left(n,\mathbb{F}\right).B=C^tAC$.

משפט לגראנז': יהי $\text{char}\left(\mathbb{F}\right)\ne2$ ותהא $Q:L\to\mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $Q\left(a\right)=\sum_{i=1}^{\text{rank}(Q)}\alpha_ix_i^2$.

משפט: תהא $Q:L\to\mathbb{C}$ תבנית ריבועית אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $Q\left(a\right)=\sum_{i=1}^{\text{rank}(Q)}x_i^2$.

מסקנה: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ סימטרית אזי קיימת $C\in\text{GL}\left(n,\mathbb{C}\right)$ עבורה $C^tAC=\text{Diag}\left(I_{\text{rank}(A)},0\right)$.

משפט: תהא $Q:L\to\mathbb{R}$ תבנית ריבועית אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $Q\left(a\right)=\sum_{i=1}^{p}x_i^2-\sum_{i=p+1}^{\text{rank}(Q)}x_i^2$.

מסקנה: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ סימטרית אזי קיימת $C\in\text{GL}\left(n,\mathbb{C}\right)$ עבורה $C^tAC=\text{Diag}\left(I_p,-I_q,0\right)$.

סיגנטורה: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ סימטרית אזי $\left(p,q\right)$ עבורם $A\underset{\text{חופפת}}{\sim}\text{Diag}\left(I_p,-I_q,0\right)$.

ציון/אינדקס ההתמדה החיובי: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ סימטרית עם סיגנטורה $\left(p,q\right)$ אזי p.

ציון/אינדקס ההתמדה השלילי: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ סימטרית עם סיגנטורה $\left(p,q\right)$ אזי q.

משפט ההתמדה של סילבסטר: תהא $Q:L\to\mathbb{R}$ תבנית ריבועית עבורה $\left[Q\right]_{\mathcal{B}}=\text{Diag}\left(I_p,-I_q,0\right)$ וכן $\left[Q\right]_{\mathcal{B}'}=\text{Diag}\left(I_{p'},-I_{q'},0\right)$ אזי $\left(p,q\right)=\left(p',q'\right)$.

מינור ראשי: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ יהי $k<n$ ויהי $B\in M_k\left(\mathbb{F}\right)$ המקיים $\left(B\right)_{i,j}=\left(A\right)_{i,j}$ אזי $\Delta_k^A=\det\left(B\right)$.

מטריצה יחידה משולשת עליונה (unitriangular upper): $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ המקיימת $A=\begin{pmatrix}1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$.

טענה: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ ותהא $C\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ יחידה משולשת עליונה אזי $\Delta_k^{C^tAC}=\Delta_k^A$.

משפט: יהי $\text{char}\left(\mathbb{F}\right)\ne2$ תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ סימטרית עבורה $\Delta_1,\ldots,\Delta_{\text{rank}(A)}\ne0$ וכן $\Delta_{\text{rank}(A)+1},\ldots,\Delta_n=0$ אזי קיימת $C\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ יחידה משולשת עליונה עבורה $C^tAC=\text{Diag}\left(\Delta_1,\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\ldots\frac{\Delta_{\text{rank}(A)}}{\Delta_{\text{rank}(A)-1}},0\ldots0\right)$.

הגדרה: תהא $Q:L\to\mathbb{R}$ תבנית ריבועית אזי

- תבנית חיובית לחלוטין (תחל"ח): $\forall v\in L\backslash\left\{0\right\}.Q\left(v\right)>0$.
- תבנית אי־שלילית: $\forall v\in L\backslash\left\{0\right\}.Q\left(v\right)\ge0$.
- תבנית אי־חיובית: $\forall v\in L\backslash\left\{0\right\}.Q\left(v\right)\le0$.
- תבנית שלילית לחלוטין: $\forall v\in L\backslash\left\{0\right\}.Q\left(v\right)<0$.

הגדרה: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית אזי

- חיובית לחלוטין (חל"ח): $\forall x\in\mathbb{R}^n\backslash\left\{0\right\}.x^tAx>0$.
- אי־שלילית: $\forall x\in\mathbb{R}^n\backslash\left\{0\right\}.x^tAx\ge0$.
- אי־חיובית: $\forall x\in\mathbb{R}^n\backslash\left\{0\right\}.x^tAx\le0$.
- שלילית לחלוטין: $\forall x\in\mathbb{R}^n\backslash\left\{0\right\}.x^tAx<0$.

משפט סילבסטר: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית אזי (A חל"ח)$\Longleftrightarrow\left(\forall i\in\left[n\right].\Delta_i>0\right)$.

מסקנה: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית אזי (A שלילית לחלוטין)$\Longleftrightarrow\left(\forall i\in\left[n\right].\left(-1\right)^i\Delta_i>0\right)$.

משפט: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית אזי (A חל"ח)$\Longleftrightarrow$(כל הע"ע של A חיוביים).

למה: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית חל"ח אזי $\exists!B\in M_n\left(\mathbb{R}\right).B^2=A$.

פירוק פולרי: תהא $D\in\text{GL}(n,\mathbb{R})$ אזי קיימים ויחידים $R\in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית חל"ח וכן $Q\in O(n)$ עבורם $D=QR$.

משפט: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית אזי קיימת $C\in O(n)$ עבורה C^tAC אלכסונית.

מסקנה: תהא $Q_1:L\to\mathbb{R}$ תחל"ח ותהא $Q_2:L\to\mathbb{R}$ אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $[Q_1]_{\mathcal{B}},[Q_2]_{\mathcal{B}}$ אלכסוניות.

תבנית אחד־וחצי־לינארית: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{C}$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ אזי $\Psi:L\times L\to\mathbb{C}$ המקיימת

- לינאריות ברכיב ראשון: יהיו $v,u,w\in L$ אזי $\Psi(\alpha v+\beta u,w)=\alpha\Psi(v,w)+\beta\Psi(u,w)$.
- יהיו $v,u,w\in L$ אזי $\Psi(v,\alpha u+\beta w)=\overline{\alpha}\Psi(v,u)+\overline{\beta}\Psi(v,w)$.

מטריצה מייצגת: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית ויהי $\mathcal{B}$ בסיס אזי $([\Psi]_{\mathcal{B}})_{i,j}=\Psi(\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_j)$.

משפט: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית יהי $\mathcal{B}$ בסיס יהי $a\in L$ ויהי $b\in M$ אזי $\Psi(a,b)=[a]_{\mathcal{B}}^t[\Phi]_{\mathcal{B}}\overline{[b]_{\mathcal{B}}}$.

משפט: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית ויהיו $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ בסיסים אזי $[\Psi]_{\mathcal{B}'}=\left([\text{Id}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right)^t[\Psi]_{\mathcal{B}}\overline{[\text{Id}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}}$.

דרגה: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית אזי $\text{rank}(\Psi)=\text{rank}([\Psi]_{\mathcal{B}})$.

למה: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית אזי $\text{rank}(\Psi)$ מוגדרת היטב.

תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית: Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית המקיימת $\forall a,b\in L.\Psi(a,b)=\overline{\Psi(b,a)}$.

למה: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית אזי (Ψ הרמיטית)$\Longleftrightarrow$($[\Psi]$ הרמיטית).

מסקנה: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $[\Psi]_{\mathcal{B}}=\text{Diag}(I_p,-I_q,0)$.

ציון/אינדקס ההתמדה החיובי: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית עם $[\Psi]_{\mathcal{B}}=\text{Diag}(I_p,-I_q,0)$ אזי p.

ציון/אינדקס ההתמדה השלילי: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית עם $[\Psi]_{\mathcal{B}}=\text{Diag}(I_p,-I_q,0)$ אזי q.

משפט ההתמדה של סילבסטר: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית עבורה $[Q]_{\mathcal{B}}=\text{Diag}(I_p,-I_q,0)$ וכן $[Q]_{\mathcal{B}'}=\text{Diag}(I_{p'},-I_{q'},0)$ אזי $(p,q)=(p',q')$.

למה: תהא $A\in M_n(\mathbb{C})$ הרמיטית אזי $\Delta_1\ldots\Delta_n\in\mathbb{R}$.

משפט: תהא $A\in M_n(\mathbb{C})$ הרמיטית עבורה $\Delta_1,\ldots,\Delta_{\text{rank}(A)}\neq0$ וכן $\Delta_{\text{rank}(A)+1},\ldots,\Delta_n=0$ אזי קיימת $C\in M_n(\mathbb{C})$ יחידה משולשית עליונה עבורה $C^tA\overline{C}=\text{Diag}\left(\Delta_1,\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\ldots\frac{\Delta_{\text{rank}(A)}}{\Delta_{\text{rank}(A)-1}},0\ldots0\right)$.

הגדרה: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית אזי

- חיובית לחלוטין (חל"ח): $\forall v\in L\backslash\{0\}.\Psi(v,v)>0$.
- אי־שלילית: $\forall v\in L\backslash\{0\}.\Psi(v,v)\geq0$.
- אי־חיובית: $\forall v\in L\backslash\{0\}.\Psi(v,v)\leq0$.
- שלילית לחלוטין: $\forall v\in L\backslash\{0\}.\Psi(v,v)<0$.

משפט: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית אזי (Ψ חל"ח)$\Longleftrightarrow$ $(\forall i\in[n].\Delta_i>0)$.

מסקנה: תהנא Ψ_1,Ψ_2 תבניות אחד־וחצי־לינאריות עבורן Ψ_1 חל"ח אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $[\Psi_1]_{\mathcal{B}},[\Psi_2]_{\mathcal{B}}$ אלכסוניות.

תבנית אנטי סימטרית: יהי $\text{char}(\mathbb{F})\neq2$ אזי $\Phi\in B(L)$ המקיימת $\forall a,b\in L.\Phi(a,b)=-\Phi(b,a)$.

למה: תהא Φ תבנית אנטי סימטרית אזי $\forall a\in L.\Phi(a,a)=0$.

למה: תהא Φ תבנית אנטי סימטרית אזי $[\Phi]$ אנטי סימטרית.

משפט: תהא Φ תבנית אנטי סימטרית אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $[\Phi]_{\mathcal{B}}=\text{Diag}\left(\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)\ldots\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right),0\ldots0\right)$.

מסקנה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אנטי סימטרית אזי $\text{rank}(A)\in\mathbb{N}_{\text{even}}$.

פולינום Pfaff: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אנטי סימטרית אי־מנוונת אזי $p\in\mathbb{F}[x_1\ldots x_{n^2}]$ המקיים $\det(A)=p\left((A)_{1,1}\ldots(A)_{n,n}\right)^2$.

מסקנה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אנטי סימטרית אי־מנוונת אזי קיים פולינום pfaff.

הגדרה: $\mathbb{R}_2[x,y]=\{f\in\mathbb{R}[x,y]\mid\deg(f)=2\}$.

הגדרה: יהיו $p,q\in\mathbb{R}_2[x,y]$ אזי $p\sim q\iff\exists\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.q=\alpha p$.

קבוצת העקומות האלגבריות המישוריות ממעלה 2: $C_2(\mathbb{R})={}^{\mathbb{R}_2[x,y]}/_{\sim}$.

עקומה גאומטרית מישורית ממשית ממעלה 2: יהי $p\in\mathbb{R}_2[x,y]$ אזי $\text{sols}(p)$.

למה: עקומה אלגברית מישורית ממעלה 2 מגדירה עקומה גאומטרית מישורית ממעלה 2 באופן יחיד.

תנועה במישור $\mathbb{R}^2$: תהא $Q\in O(2)$ וכן $v\in\mathbb{R}^2$ אזי פונקציה $f\in\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת $f(u)=Qu+v$.

למה: תהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^2$ אזי f שומרת מרחק.

הגדרה: תהא $p\in\mathbb{R}_2[x,y]$ המוגדרת $p(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$ אזי

- המטריצה המצומצמת: $A_p=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&c\end{smallmatrix}\right)$.
- המטריצה המורחבת: $\widehat{A_p}=\left(\begin{smallmatrix}a&b&d\\b&c&e\\d&e&f\end{smallmatrix}\right)$.

משפט: תהא $p\in\mathbb{R}_2[x,y]$ ותהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^2$ אזי $\text{Spec}(A_p)=\text{Spec}(A_{p\circ f})$.

משפט: תהא $p\in\mathbb{R}_2[x,y]$ ותהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^2$ אזי $\det\left(\widehat{A_p}\right)=\det\left(\widehat{A_{p\circ f}}\right)$.

משפט: יהיו $p,q\in\mathbb{R}_2[x,y]$ עבורן A_p,A_q דומות וכן $\det\left(\widehat{A_p}\right)=\det\left(\widehat{A_q}\right)$ וכן $\left(\det\left(\widehat{A_p}\right)=\det\left(\widehat{A_q}\right)\neq 0\right)\vee\left(\det(A_p)=\det(A_q)\neq 0\right)$ אזי קיימת T תנועה במישור $\mathbb{R}^2$ עבורה $p=q\circ T$.

מסקנה: תהא $C\in C_2(\mathbb{R})$ עבורה $\det\left(\widehat{A_p}\right)\neq 0$ אזי קיימת תנועה ב־$\mathbb{R}^2$ עבורה C הינה אחת מהבאות

- קבוצה ריקה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$.
- אליפסה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
- היפרבולה: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.
- פרבולה: $y^2=2px$.

הגדרה: $\mathbb{R}_2[x,y,z]=\{f\in\mathbb{R}[x,y,z]\mid\deg(f)=2\}$.

הגדרה: יהיו $p,q\in\mathbb{R}_2[x,y,z]$ אזי $p\sim q\Longleftrightarrow\exists\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.q=\alpha p$.

קבוצת המשטחים האלגבריים ממעלה 2: $S_2(\mathbb{R})=\mathbb{R}_2[x,y,z]/\sim$.

משטח גאומטרי ממעלה 2: יהי $p\in\mathbb{R}_2[x,y,z]$ אזי $\text{sols}(p)$.

למה: משטח אלגברי ממעלה 2 מגדיר משטח גאומטרי ממעלה 2 באופן יחיד.

תנועה במישור $\mathbb{R}^3$: תהא $Q\in O(3)$ וכן $v\in\mathbb{R}^3$ אזי פונקציה $f\in\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת $f(u)=Qu+v$.

למה: תהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^3$ אזי f שומרת מרחק.

הגדרה: תהא $A\in M_3(\mathbb{R})$ סימטרית תהא $B\in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ ותהא $p\in\mathbb{R}_2[x,y,z]$ המוגדרת $p(v)=v^tAv+2B^tv+c$ אזי

- המטריצה המצומצמת: $A_p=A$.
- המטריצה המורחבת: $\widehat{A_p}=\begin{pmatrix}A & B\\ B^t & c\end{pmatrix}$.

משפט: תהא $p\in\mathbb{R}_2[x,y,z]$ ותהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^3$ אזי $\text{Spec}(A_p)=\text{Spec}(A_{p\circ f})$.

משפט: תהא $p\in\mathbb{R}_2[x,y,z]$ ותהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^3$ אזי $\det\left(\widehat{A_p}\right)=\det\left(\widehat{A_{p\circ f}}\right)$.

משפט: יהיו $p,q\in\mathbb{R}_2[x,y,z]$ עבורן A_p,A_q דומות וכן $\det\left(\widehat{A_p}\right)=\det\left(\widehat{A_q}\right)$ וכן $\left(\det\left(\widehat{A_p}\right)=\det\left(\widehat{A_q}\right)\neq 0\right)\vee\left(\det(A_p)=\det(A_q)\neq 0\right)$ אזי קיימת T תנועה במישור $\mathbb{R}^3$ עבורה $p=q\circ T$.

מסקנה: תהא $S\in S_2(\mathbb{R})$ עבורה $\det\left(\widehat{A_p}\right)\neq 0$ אזי קיימת תנועה ב־$\mathbb{R}^3$ עבורה S הינה אחת מהבאות

- קבוצה ריקה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$.
- אליפסויד: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
- היפרבולויד חד־יריעתי: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.
- היפרבולויד דו־יריעתי: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.
- פרבולויד אליפטי: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$.
- פרבולויד היפרבולי: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$.