פעולה בינארית: תהא A קבוצה אזי פונקציה $*:A\times A\to A$.

סימון: תהא A קבוצה ותהא $*:A\times A\to A$ פעולה בינארית אזי $a*b=*(a,b)$ לכל $a,b\in A$.

אסוציטיביות/קיבוציות: תהא A קבוצה אזי פעולה בינארית $*$ המקיימת $(a*b)*c=a*(b*c)$ לכל $a,b,c\in A$.

קומוטטיביות/חילופיות/אבליות: תהא A קבוצה אזי פעולה בינארית $*$ המקיימת $a*b=b*a$ לכל $a,b\in A$.

איבר יחידה: תהא A קבוצה ותהא $*$ פעולה בינארית אזי $e\in A$ המקיים $e*g=g*e=g$ לכל $g\in A$.

איבר הופכי/נגדי: תהא A קבוצה תהא $*$ פעולה בינארית יהי $e\in A$ איבר יחידה ויהי $g\in A$ אזי $h\in A$ המקיים $g*h=h*g=e$.

מונואיד: תהא A קבוצה ותהא $*$ פעולה בינארית אזי $\langle A,*\rangle$ באשר $*$ אסוציטיבית וכן קיים איבר יחידה.

סימון: יהי $\langle A,*\rangle$ מונואיד ויהי $e\in A$ איבר היחידה של A אזי $e_A=e$.

חבורה: מונואיד $\langle G,*\rangle$ המקיים כי לכל $g\in G$ קיים קיים איבר הופכי.

הגדרה: יהי $\langle A,*\rangle$ מונואיד אזי $A^\times=\{a\in A\mid \exists h\in A.a*h=h*a=e_A\}$.

טענה: יהי $\langle A,*\rangle$ מונואיד אזי $\left\langle A^\times,*_{\restriction_{A^\times\times A^\times}}\right\rangle$ חבורה.

סימון: תהא A קבוצה אזי $S_A=\{f:A\to A\mid \text{חח"ע ועל } f\}$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $S_n=S_{[n]}$.

טענה חבורת התמורות: תהא A קבוצה אזי $\langle S_A,\circ\rangle$ חבורה.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ נגדיר $\sim_n\subseteq\mathbb{Z}^2$ כך $\sim_n=\left\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{Z}^2\mid (n|(x-y))\right\}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $\sim_n$ יחס שקילות מעל $\mathbb{Z}$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ ויהיו $x,y\in\mathbb{Z}$ אזי $[x]_{\sim_n}+[y]_{\sim_n}=[x+y]_{\sim_n}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $\mathbb{Z}/\sim_n=\left\{[0]_{\sim_n},\ldots,[n-1]_{\sim_n}\right\}$.

טענה חבורת השאריות: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $\langle\mathbb{Z}/\sim_n,+\rangle$ חבורה.

טענה יחידות איבר היחידה: יהי $\langle A,*\rangle$ מונואיד ויהיו $e_1,e_2\in A$ איברי יחידה אזי $e_1=e_2$.

טענה: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה ויהיו $a,b,c\in G$ באשר $a*b=a*c$ אזי $b=c$.

מסקנה יחידות איבר הופכי: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה ויהיו $a,b,c\in G$ באשר b,c הופכיים ל־a אזי $b=c$.

סימון: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה יהי $a\in G$ ויהי $b\in G$ הופכי ל־a אזי $a^{-1}=b$.

הגדרה: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה ותהא $a\in G$ אזי $a^0=e_G$ וכן $a^{n+1}=a*a^n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ וכן $a^{-n}=\left(a^{-1}\right)^n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

סדר של איבר: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה ויהי $a\in G$ אזי $\operatorname{ord}(a)=\min\{n\in\mathbb{N}_+\mid a^n=e_G\}$.

משפט: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה באשר $|G|<\aleph_0$ אזי קיים $a\in G$ המקיים $\operatorname{ord}(a)\leq|G|$.

תת־חבורה: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה ותהא $H\subseteq G$ עבורה $\left\langle H,*_{\restriction_{H\times H}}\right\rangle$ חבורה אזי $\left\langle H,*_{\restriction_{H\times H}}\right\rangle$.

הערה: מכאן והלאה כאשר ברור מהי הפעולה של החבורה נסמנה על ידי הקבוצה בלבד.

סימון: תהא G חבורה ותהא $H\subseteq G$ תת־חבורה אזי $H\leq G$.

טענה בוחן תת־חבורה: תהא G חבורה ותהא $H\subseteq G$ תת קבוצה אזי (H חבורה)$\Longleftrightarrow$($e_G\in H$ וכן $h^{-1}\in H$ לכל $h\in H$ וכן $g*h\in H$ לכל $g,h\in H$).

איזומורפיזם בין חבורות: תהיינה G,H חבורות אזי $f:G\to H$ חח"ע ועל המקיימת $f(\alpha*\beta)=f(\alpha)*f(\beta)$ לכל $\alpha,\beta\in G$.

דו־מונואיד בעל חוק הפילוג: תהא R קבוצה ותהיינה $+,*$ פעולות בינאריות באשר $\langle R,+\rangle$ מונואיד וכן $\langle R,*\rangle$ מונואיד אזי $\langle R,+,*\rangle$ המקיים $a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$ וכן $(b+c)*a=(b*a)+(c*a)$ לכל $a,b,c\in R$.

חוג עם יחידה: דו־מונואיד בעל חוג הפילוג $\langle R,+,*\rangle$ המקיים כי $+$ אבלית.

הערה: כל החוגים בקורס זה הם בעלי יחידה.

איזומורפיזם בין חוגים: יהיו R,F חוגים אזי $f:R\to F$ חח"ע ועל המקיימת

- משמרת יחידה: $f(1_R)=1_F$.
- משמרת כפל: $f(\alpha*\beta)=f(\alpha)*f(\beta)$ לכל $\alpha,\beta\in R$.
- משמרת חיבור: $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$ לכל $\alpha,\beta\in R$.

חוג עם יחידה אבלי: חוג $\langle R,+,\cdot\rangle$ המקיים כי $*$ אבלית.

חוג הפולינומים: יהי $\langle R,+,\cdot\rangle$ חוג אבלי אזי $\langle R[x],+,\cdot\rangle$.

טענה נוסחאת המעלות: יהי $\langle R[x],+,\cdot\rangle$ חוג פולינומים אזי לכל $p,q\in R[x]$ מתקיים $\deg(p+q)\leq\max(\deg(p),\deg(q))$ וכן $\deg(p\cdot q)\leq\deg(p)+\deg(q)$.

תת־חבורה נוצרת: תהא G חבורה ותהא $T \subseteq G$ אזי $\langle T\rangle = \bigcup_{n=0}^{\infty}\left\{\prod_{i=1}^{n} a_i^{\varepsilon_i} \mid (a\in T^n)\wedge(\varepsilon\in\{\pm1\}^n)\right\}$.

משפט מינימליות התת־חבורה הנוצרת: תהא G חבורה תהא $T \subseteq G$ ותהא $H \leq G$ באשר $T \subseteq H$ אזי $\langle T\rangle \leq H$.

משפט: תהא G חבורה סופית אזי $|\langle g\rangle| = \mathrm{ord}(g)$ לכל $g \in G$.

מנה של חבורה: תהא G חבורה ויהי $H \leq G$ אזי $\left(g_1 \sim_H g_2\right) \Longleftrightarrow \left(g_1 * g_2^{-1} \in H\right)$ לכל $g_1, g_2 \in G$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי ${}^{G}/_{H} = {}^{G}/_{\sim_H}$.

משפט: תהא G חבורה אזי $\mathrm{ord}(g) \mid |G|$ לכל $g \in G$ וכן $|G| = |{}^{G}/_{H}| \cdot |H|$ לכל $H \leq G$.

משפט: תהא G חבורה באשר $|G| \in \mathbb{P}$ אזי G אבלית וכן $\langle g\rangle = G$ לכל $g \in G\backslash\{e_G\}$.

מחלק אפס: יהי R חוג אזי $a \in R\backslash\{0\}$ עבורו קיים $b \in R\backslash\{0\}$ המקיים $a * b = 0_G$.

תחום שלמות: חוג אבלי $\langle R, +, *\rangle$ עבורו לכל $a \in R$ מתקיים כי a אינו מחלק אפס.

חוק צמצום: יהי R תחום שלמות יהי $a \in R\backslash\{0\}$ ויהיו $b, c \in R$ באשר $a * c = a * b$ אזי $c = b$.

שדה: חוג $\langle \mathbb{F}, +, *\rangle$ המקיים כי $\langle \mathbb{F}\backslash\{0_{\mathbb{F}}\}, *\rangle$ חבורה אבלית וכן $0_{\mathbb{F}} \neq 1_{\mathbb{F}}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\mathbb{F}$ תחום שלמות.

משפט: יהי R תחום שלמות סופי אזי R שדה.

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי ($n \in \mathbb{P}$)$\Longleftrightarrow$($\langle \mathbb{Z}_n, +, *\rangle$ שדה).

מציין של שדה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = \min\left\{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^{n} 1_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}\right\}$.

הערה: יהי $\mathbb{F}$ שדה עבורו המציין לא קיים אזי $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \in \mathbb{P} \cup \{0\}$.

הבינום של ניוטון: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\forall a, b \in \mathbb{F}.\, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה עבורו $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = p \neq 0$ אזי $\forall a, b \in \mathbb{F}. \forall k \notin \{0, p\}.\, \left(\binom{p}{k} \cdot a = 0\right) \wedge \left((a+b)^p = a^p + b^p\right)$.

המשפט הקטן של פרמה: $\forall p \in \mathbb{P}. \forall a \in \mathbb{Z}_p. a^p \equiv a \mod p$.

קוסט/מחלקה שמאלית: יהיו $H \leq G$ חבורות ויהי $g \in G$ אזי $g * H = \{g * h \mid h \in H\}$.

קוסט/מחלקה ימנית: יהיו $H \leq G$ חבורות ויהי $g \in G$ אזי $H * g = \{h * g \mid h \in H\}$.

סימון: $G/H = \{g * H \mid g \in G\}$, $H\backslash G = \{H * g \mid g \in G\}$.

טענה: $(G/H) \wedge (H\backslash G)$ חלוקות של G.

טענה: $|G/H| = |H\backslash G|$.

אינדקס: יהיו $H \leq G$ חבורות אזי $[G : H] = |G/H|$.

משפט לגראנז': יהיו $H \leq G$ חבורות סופיות אזי $(|H| \mid |G|) \wedge \left([G : H] = \frac{|G|}{|H|}\right)$.

תת חבורה נורמלית: תהא G חבורה אזי $N \leq G$ המקיימת $\forall g \in G. gN = Ng$.

סימון: תהא G חבורה וכן $N \leq G$ תת חבורה נורמלית אזי $N \trianglelefteq G$.

כפל קבוצות: תהיינה $B, A \leq G$ חבורות אזי $A * B = \{a * b \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

משפט: יהיו $g_1, g_2 \in G$ אזי (H נורמלית)$\Longleftrightarrow$ $\left((g_1 H) * (g_2 H) = (g_1 * g_2) H\right)$.

טענה: (G/H חבורה עם כפל קבוצות)$\Longleftrightarrow$(H נורמלית).

משוואה: יהיו f, g פונקציות עבורן $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{dom}(f)$ אזי הטענה $f(x) = g(x)$.

הגדרה: תהא X קבוצה עבורה $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{dom}(f) = X^n$ אזי המשוואה מעל X עם n משתנים.

קבוצת פתרונות: תהא $f \in X^B$ ותהא $A \subseteq X$ אזי $\mathrm{sols}_A(f) = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$.

מערכת משוואות: יהיו n משוואות $f_i(x) = g_i(x)$ אזי $E = \langle f_1(x) = g_1(x), \ldots, f_n(x) = g_n(x)\rangle$.

סימון: תהא מערכת משוואות E אזי E_i תהיה משוואה מספר i.

קבוצת פתרונות של מערכת: $\mathrm{sols}_A(E) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{sols}_A(E_i)$.

שקילות: E, E' מערכות/משוואות עבורן $\mathrm{sols}_A(E) = \mathrm{sols}_A(E')$.

טענה: תהא h חח"ע אזי $\mathrm{sols}\left((h \circ f)(x) = (h \circ g)(x)\right) = \mathrm{sols}\left(f(x) = g(x)\right)$.

קבוצה אלגברית: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה קיימת מערכת משוואות E מעל $\mathbb{R}$ עם n משתנים המקיימת $\mathrm{sols}(E) = A$.

פונקציה ליניארית: $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ המקיימת $\exists a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}. f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.

משוואה ליניארית: תהא f פונקציה ליניארית אזי $f(x_1, \ldots, x_n) = b$.

מערכת משוואות ליניארית: מערכת משוואות שכל המשוואות בה ליניאריות.

סימון: כדי לייצג מערכת משוואות ליניארית נכתוב $\begin{cases} a_{1,1}x_1+\ldots+a_{1,n}x_n & =b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1+\ldots+a_{m,n}x_n & =b_m \end{cases}$.

משפט: קבוצת הפתרונות של משוואה ליניארית מעל $\mathbb{R}^2$ היא $(\varnothing)\vee$(קו ישר)$\vee(\mathbb{R}^2)$.

משפט: קבוצת הפתרונות של משוואה ליניארית מעל $\mathbb{R}^3$ היא $(\varnothing)\vee$(קו ישר)$\vee$(מישור)$\vee(\mathbb{R}^3)$.

וקטור: יהיו $\alpha_1\ldots\alpha_n\in\mathbb{F}$ אזי $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$.

חיבור וקטורים: יהיו $\alpha_1\ldots\alpha_n,\beta_1\ldots\beta_n\in\mathbb{F}$ אזי $\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$.

כפל וקטורים: יהיו $\alpha_1\ldots\alpha_n\in\mathbb{F}$ ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ אזי $\begin{pmatrix}\lambda\cdot\alpha_1\\ \vdots\\ \lambda\cdot\alpha_n\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$.

וקטור ה־0: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\bar{0}_n=\begin{pmatrix}0_{\mathbb{F}}\\ \vdots\\ 0_{\mathbb{F}}\end{pmatrix}$.

טענה: יהי $v\in\mathbb{F}^n$ וקטור ויהי $t\in\mathbb{F}$ אזי $\left((t=0_{\mathbb{F}})\vee\left(v=\bar{0}_n\right)\right)\iff\left(t\cdot v=\bar{0}\right)$.

משוואה לינארית הומוגנית: משוואה לינארית $f(x_1,\ldots,x_n)=0$.

טענה: תהא מערכת משוואות לינאריות הומוגניות E אזי $\bar{0}\in\text{sols}(E)$.

משפט: תהא E מערכת משוואות לינאריות הומוגניות אזי $\text{sols}(E)$ סגורה ביחס לחיבור וקטורים וכפילה בסקלר.

סימון: תהא E מערכת משוואות לינאריות אזי E_0 מערכת המשוואות הלינאריות ההומגניות עם אותן פונקציות לינאריות.

משפט: $\forall p\in\text{sols}(E).\text{sols}(E)=\text{sols}(E_0)+p$.

מטריצה: $A=\begin{pmatrix}a_{1,1}&\ldots&a_{1,n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m,1}&\ldots&a_{m,n}\end{pmatrix}$.

סימון: $(A)_{i,j}=a_{i,j}$.

סדר מטריצה: מטריצה A תקרא מסדר $m\times n$ אם יש לה m שורות ו־n עמודות.

הגדרה: קבוצת כל המטריצות מסדר $m\times n$ מעל R תסומן $M_{m\times n}(R)$.

סימון: $C_j(A)$ הינה העמודה ה־jית, $R_i(A)$ הינה השורה ה־iית.

מטריצת ה־0: תהא מטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, מתקיים $\forall i\in[m].\forall j\in[n].(A)_{i,j}=0_{\mathbb{F}}$.

מטריצה ריבועית: $A\in M_{m\times m}(\mathbb{F})$.

מטריצת מקדמים: עוד סימון אפשרי לייצוג מערכת לינארית של משוואות הינה $\left(\begin{array}{ccc|c}a_{1,1}&\ldots&a_{1,n}&b_1\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ a_{m,1}&\ldots&a_{m,n}&b_m\end{array}\right)$.

מטריצת המקדמים המצומצמת: $\begin{pmatrix}a_{1,1}&\ldots&a_{1,n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m,1}&\ldots&a_{m,n}\end{pmatrix}$.

עמודת המקדמים החופשיים: $\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$.

איבר פותח בשורה: $\min\left(j\in[n]\mid(A)_{i,j}\neq0\right)$.

מטריצה מדורגת: מטריצה המקיימת כי (כל שורות האפסים נמצאות למטה)$\wedge$(בכל שורה שיש בה איבר פותח האיבר הפותח הינו מימין ממש לאיבר הפותח בשורה מעליו).

מטריצה מדורגת קנונית: מטריצה מדורגת המקיימת כי (כל האיברים הפותחים הם 1)$\wedge$(בכל עמודה של איבר פותח שאר אברי העמודה הם 0).

שורת סתירה: שורה מהצורה $(0,\ldots,0|b)$ באשר $b\neq0$.

אלגוריתם: תהא $A\in M_{m\times(n+1)}(\mathbb{F})$ מטריצה מדורגת קנונית

- אם קיימת שורת סתירה, $\text{sols}(A)=\varnothing$.
- אם לא קיימת שורת סתירה, נניח כי בעמודות $I=\{i_1\ldots i_k\}$ לא קיים איבר פותח אזי

$$\text{sols}(A)=\left\{v\in\mathbb{F}^n\,\middle|\,\forall i\notin I.v_i=(A)_{i,n+1}-\sum_{j\in I}\left((A)_{i,j}v_j\right)\right\}$$

פעולה אלמנטרית: פונקציה $\varphi : M_{m\times n}(\mathbb{F}) \to M_{m\times n}(\mathbb{F})$ המקיימת $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}).\text{sols}(A) = \text{sols}(\varphi(A))$.

הפעולות האלמנטריות של גאוס: (החלפת שורה $\varphi_{R_i\leftrightarrow R_j}(A)$)$\wedge$(הכפלה בסקלר $\varphi_{R_i\to\lambda R_i}(A)$)$\wedge$(חיבור שורה $\varphi_{R_i\to R_i+R_j}(A)$).

שקילות שורה (ש"ש): $A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ עבורן קיימות פעולות אלמנטריות $\varphi_1\ldots\varphi_n$ המקיימות $(\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_n)(A)=B$.

משפט גאוס: $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ שקולת שורה למטריצה מדורגת קנונית אחת ויחידה.

אלגוריתם גאוס: $\mathcal{O}(n^2m)$

```
row = 1
for (1 ≤ col ≤ n)
    if (∃ min(j) ≥ row. (A)_{j,col} ≠ 0)
        if (j ≠ row)
            R_j ↔ R_row
        R_row → (1 / (A)_{row,col}) R_row
        for (1 ≤ k ≤ m ∧ k ≠ row)
            R_k → R_k − (A)_{k,col} R_row
        row+ = 1
```

מסקנה: תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מדורגת קנונית ללא שורת סתירה בעלת k שורות ללא איבר פותח אזי $|\text{sols}(A)|=|\mathbb{F}|^k$.

הדלתא של קרונקר: $\delta_{i,j}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & else\end{cases}$.

מטריצת היחידה: $I_n\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ המקיימת $(I_n)_{i,j}=\delta_{i,j}$.

משפט: תהא $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ אזי (למערכת $(A|0)$ יש פתרון יחיד)$\iff$(הצורה הקנונית של A היא I_n).

משפט: מערכת משוואות לינארית עם m משוואות ו־n נעלמים שקולה למשוואה אחת של m־יות.

צירוף לינארי: יהיו $\langle \vec{v_1},\ldots,\vec{v_n}\rangle\in(\mathbb{F}^m)^n$ אזי $\sum_{i=1}^n\alpha_i\vec{v_i}$ עבור $\alpha\in\mathbb{F}^n$.

כפל מטריצה ב־n־יה: $\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{F}).\forall\vec{v}\in\mathbb{F}^n.A\vec{v}=\sum_{i=1}^n C_i(A)\,\vec{v}_i$.

משפט: $(A\cdot(\alpha\cdot\underline{v})=\alpha\cdot(A\cdot\underline{v}))\wedge(A\cdot(\underline{v}+\underline{u})=A\cdot\underline{v}+A\cdot\underline{u})\wedge$(יש מחלקי אפס).

מטריצת סיבוב: $R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$.

מטריצת ונדרמונד: מטריצה שבא כל עמודה או שורה הינה סדרה הנדסית.

פולינום לגראנז' ה־i: $P_i(x)=\left(\prod_{k=1}^{j-1}\left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\right)\right)\left(\prod_{k=j+1}^{n}\left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\right)\right)$, מתקיים $P_i(x_j)=\delta_{i,j}$.

סימון: יהי $\langle v_1,\ldots,v_n\rangle\in(\mathbb{F}^m)^n$ נגדיר $M_{m\times n}(\mathbb{F})\ni\begin{pmatrix}| & & |\\ v_1 & \ldots & v_n\\ | & & |\end{pmatrix}$.

הגדרה: נגדיר $e_j\in\mathbb{F}^n$ כך $(e_j)_i=\delta_{j,i}$.

מטריצת תמורה: יהי $\sigma\in S_n$ נגדיר $P(\sigma)=\begin{pmatrix}| & & |\\ e_{\sigma(1)} & \ldots & e_{\sigma(n)}\\ | & & |\end{pmatrix}$ מתקיים $(P(\sigma)\cdot v)_i=v_{\sigma^{-1}(i)}$.

משפט אי הפרישה: תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ וכן B הצורה הקנונית אזי $(\exists i.R_i(B)=0)\iff(\exists b\in\mathbb{F}^m.\text{sols}(A|b)=\varnothing)$.

מסקנה: $\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{F}).(n<m)\implies(\exists b\in\mathbb{F}^m.\text{sols}(A|b)=\varnothing)$.

סימון: $M_{n\times n}(\mathbb{F})=M_n(\mathbb{F})$.

מסקנה: $\forall A\in M_n(\mathbb{F}).(\forall b\in\mathbb{F}^n.\text{sols}(A|b)\neq\varnothing)\implies(\forall b\in\mathbb{F}^n.|\text{sols}(A|b)|=1)$.

הנפרשת/ספאן: תהא $v \in (\mathbb{F}^n)^m$ נגדיר $\text{span}(v) = \{\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \mid \alpha \in \mathbb{F}^m\}$.

סדרה פורשת: סדרה $v \in (\mathbb{F}^n)^m$ שמקיימת $\text{span}(v) = \mathbb{F}^n$.

הגדרה: נגדיר $T : (\mathbb{F}^n)^m \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ כך $T_{\vec{v}}(\alpha) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \alpha$.

טענה: ($T_{\vec{v}}$ על)$\Longleftrightarrow$($\vec{v}$ פורשת).

סדרה בת"ל (בלתי תלויה לינארית): סדרה $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ המקיימת $\forall \alpha \in \mathbb{F}^n. (\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0) \Longleftrightarrow (\alpha = 0)$.

בסיס: $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ בת"ל ופורשת.

טענה: יהיו $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ ונגדיר $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

- (v פורשת)$\Longleftrightarrow(\forall b \in \mathbb{F}^m. |\text{sols}(A\underline{x} = b)| > 0)$.
- (v בת"ל)$\Longleftrightarrow(\forall b \in \mathbb{F}^m. |\text{sols}(A\underline{x} = b)| < 2)$.
- (v בסיס)$\Longleftrightarrow(\forall b \in \mathbb{F}^m. |\text{sols}(A\underline{x} = b)| = 1)$.

טענה: ($T_{\vec{v}}$ חח"ע)$\Longleftrightarrow$($\vec{v}$ בת"ל).

מרחב התלויות הלינאריות: תהא $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ אזי $\text{LD}(v) = \{\alpha \in \mathbb{F}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0\}$.

הערה: (v בת"ל)$\Longleftrightarrow(\text{LD}(v) = \{0\})$.

הנפרשת/ספאן: תהא $K \subseteq \mathbb{F}^n$ אזי $\text{span}(K) = \{u \in \mathbb{F}^n \mid \exists m \in \mathbb{N}_+. \exists v \in K^m. \exists \alpha \in \mathbb{F}^m. u = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i\} \cup \{0\}$.

משפט: (v בת"ל $\Longleftarrow$ כל תת סדרה של v בת"ל)$\wedge$(v פורשת $\Longleftarrow$ כל על סדרה של v פורשת).

משפט: תהא $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ בת"ל וסדרה $u \in \mathbb{F}^m$ מתקיים ($v^\frown \langle u \rangle$ בת"ל)$\Longleftrightarrow(u \notin \text{span}(v))$.

טענה: $\forall v \in (\mathbb{F}^m)^n. \forall u \in \mathbb{F}^m. (\text{span}(v) = \text{span}(v^\frown \langle u \rangle)) \Longleftrightarrow (u \in \text{span}(v))$.

טענה: $\forall v \in (\mathbb{F}^m)^n. \forall i \in [n]. \left(v_i \in \text{span}\left(v_{\restriction_{[n]\setminus\{i\}}}\right)\right) \Longleftrightarrow (\exists x \in \text{LD}(v). x_i \neq 0)$.

משפט: תהא $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ התב"ש

- v בת"ל.
- $\forall i \in [n]. v_i \notin \text{span}\left(v_{\restriction_{[n]\setminus\{i\}}}\right)$.
- $\forall i \in [n]. v_i \notin \text{span}\left(v_{\restriction_{[i-1]}}\right)$.

משפט: מעל $\mathbb{F}^n$ פחות מ־n n־יות לא פורשות.

משפט: מעל $\mathbb{F}^n$ יותר מ־n n־יות ת"ל.

מסקנה: מעל $\mathbb{F}^n$ לכל בסיס B מתקיים $|B| = n$.

משפט 2 מתוך 3: תהא $v \in (\mathbb{F}^m)^n$, כל שניים מהשלושה שקולים

- v בת"ל.
- v פורשת.
- $n = m$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ התב"ש

- לכל b למערכת $Ax = b$ קיים פתרון.
- עמודות A פורשות.
- קיים b למערכת $Ax = b$ קיים פתרון יחיד.
- עמודות A בת"ל.
- לכל b למערכת $Ax = b$ קיים פתרון יחיד.
- עמודות A בסיס.

כפל מטריצות: $\forall \langle A, B \rangle \in M_{k\times m}(\mathbb{F}) \times M_{m\times n}(\mathbb{F}). \forall i \in [k]. \forall j \in [m]. (AB)_{i,j} = \sum_{t=1}^m (A)_{i,t}(B)_{t,j}$.

נוסחה: $(BA)_{i,j} = R_i(B) \cdot C_j(A)$.

טענה: $C_i(YX) = YC_i(X)$, $R_i(YX) = R_i(Y)X$.

כפל מטריצה בסקלר: $(\alpha A)_{i,j} = \alpha (A)_{i,j}$.

מטריצה סקלארית: αI_n.

טענה: $A\left(\alpha B\right)=\alpha\left(AB\right)$.

טענה: $\forall A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).\left(AI_n=A\right)\wedge\left(I_mA=A\right)$.

מסקנה: $\left\langle M_n\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right\rangle$ מונואיד.

מטריצות מתחלפות: $A,B\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ המקיימות $AB=BA$.

שחלוף: $\forall A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).\left(A^T\right)_{i,j}=\left(A\right)_{j,i}$.

הערה: $R_i\left(A^T\right)=C_i\left(A\right)$.

טענה: $\left(A^T\right)^T=A$,$\left(\alpha A\right)^T=\alpha\left(A^T\right)$,$\left(AB\right)^T=B^TA^T$.

מטריצה סימטרית: $A^T=A$.

מטריצה אנטי סימטרית: $A^T=-A$.

חיבור מטריצות: $\forall A,B\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).\left(A+B\right)_{i,j}=\left(A\right)_{i,j}+\left(B\right)_{ij}$.

טענה: $\left\langle M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right),+\right\rangle$ חבורה אבלית וסגורה לכפל בסקלר.

טענה: $\left(A\left(B+C\right)=AB+AC\right)\wedge\left(\left(A+B\right)^T=A^T+B^T\right)$.

הפיכות: תהא $A_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$

- הפיכה משמאל: $\exists B\in M_{n\times m}\left(\mathbb{F}\right).BA=I_n$.
- הפיכה מימין: $\exists B\in M_{n\times m}\left(\mathbb{F}\right).AB=I_m$.
- הפיכה: (הפיכה משמאל)$\wedge$(הפיכה מימין).

טענה: $\forall A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).\forall B,C\in M_{n\times m}\left(\mathbb{F}\right).\left(AB=I_m\right)\wedge\left(CA=I_n\right)\Longrightarrow B=C$.

מסקנה: אם קיימת הופכית היא יחידה.

סימון: ההופכית של A היא A^{-1}.

מטריצה אלכסונית: $\left(A\right)_{i,j}=\begin{cases}\lambda_i & i=j\\ 0 & else\end{cases}$.

משפט: מטריצה בעלת שורת עמודות/שורות אפסים לא הפיכה.

הערה: $R\left(-\theta\right)R\left(\theta\right)=I_2=R\left(\theta\right)R\left(-\theta\right)$.

טענה: $\left(\left(A^{-1}\right)^{-1}=A\right)\wedge\left(\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T\right)\wedge\left(\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}\right)$.

משפט: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$

- (A הפיכה מימין)$\Longleftrightarrow\left(\forall b\in\mathbb{F}^m.\mathrm{sols}\left(A|b\right)\neq\varnothing\right)$.
- (A הפיכה משמאל)$\Longleftrightarrow\left(\left|\mathrm{sols}\left(A|0\right)\right|\leq1\right)$.
- (A הפיכה)$\Longleftrightarrow\left(\forall b\in\mathbb{F}^m.\left|\mathrm{sols}\left(A|b\right)\right|=1\right)$.

מסקנה: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$

- (A הפיכה מימין)$\Longleftarrow$(עמודות A פורשות)$\wedge\left(m\leq n\right)$.
- (A הפיכה משמאל)$\Longleftarrow$(עמודות A בת"ל)$\wedge\left(m\geq n\right)$.
- (A הפיכה)$\Longleftarrow$(עמודות A בסיס)$\wedge\left(m=n\right)$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ התב"ש

- A הפיכה משמאל.
- A הפיכה.
- A הפיכה מימין.
- A^T הפיכה.

טענה: תהא φ פונקציה אלמנטרית אזי $\varphi\left(AB\right)=\varphi\left(A\right)B$.

מטריצה אלמנטרית: $E_\varphi=\varphi\left(I_m\right)$.

מסקנה: $\varphi\left(A\right)=E_\varphi A$.

טענה: $E_\varphi^{-1}=R_{\varphi^{-1}}$.

אלגוריתם: $\left(A\mid I\right)\sim\left(I\mid A^{-1}\right)$.

מטריצה נילפוטנטית: $\exists m\in\mathbb{N}.A^m=0$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ אזי (A הפיכה)$\Longleftrightarrow\left(A\sim I\right)$.

מסקנה: (A,B הפיכות)$\iff$(AB הפיכה).

הגדרה: $\text{Par}\left(\left\{ v_{1},\ldots,v_{m}\right\} \right)=\left\{ \sum_{i=1}^{m}\alpha_{i}v_{i}\mid\alpha\in\left[0,1\right]^{m}\right\}$.

טענה: A הפיכה $\iff\text{Vol}\left(\text{Par}\left(A\right)\right)\neq0$ (הנפח של המקבילון).

לינארית על פי שורה: פונקציה שמקיימת $f\begin{pmatrix}-R_{1}-\\ \vdots\\ -R_{i}+R_{i}'-\\ \vdots\\ -R_{n}-\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-R_{1}-\\ \vdots\\ -R_{i}-\\ \vdots\\ -R_{n}-\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}-R_{1}-\\ \vdots\\ -R_{i}'-\\ \vdots\\ -R_{n}-\end{pmatrix}$.

פונקציית נפח: פונקציה $\mathcal{N}:M_{n}\left(\mathbb{F}\right)\to\mathbb{F}$ (לינארית על פי שורה)$\wedge\left(\mathcal{N}\left(I\right)=1\right)\wedge\left(\mathcal{N}\left(A\right)=0\right)\Longleftarrow\left(\exists i\neq j.R_{i}\left(A\right)=R_{j}\left(A\right)\right)$.

טענה: אם ב־A יש שורת אפסים אז $\mathcal{N}\left(A\right)=0$.

משפט: תהא φ פעולה אלמנטרית אזי $\mathcal{N}\left(\varphi\left(A\right)\right)=\mathcal{N}\left(A\right)\cdot\begin{cases} \lambda & \varphi=f_{R_{i}\to\lambda R_{i}}\\ -1 & \varphi=f_{R_{i}\leftrightarrow R_{j}}\\ 1 & \varphi=f_{R_{i}\to R_{i}+\lambda R_{j}} \end{cases}$.

מסקנה: יהיו A,B שקולות שורה אזי $\left(\mathcal{N}\left(A\right)=0\right)\iff\left(\mathcal{N}\left(B\right)=0\right)$.

מסקנה: (A הפיכה)$\iff\left(\mathcal{N}\left(A\right)\neq0\right)$.

מסקנה: $\mathcal{N}\left(E_{\varphi}A\right)=\mathcal{N}\left(E_{\varphi}\right)\mathcal{N}\left(A\right)$.

משפט: יהיו $\mathcal{N}_{1},\mathcal{N}_{2}:M_{n}\left(\mathbb{F}\right)\to\mathbb{F}$ פונקציות נפח אזי $\mathcal{N}_{1}=\mathcal{N}_{2}$.

מסקנה: $\mathcal{N}\left(AB\right)=\mathcal{N}\left(A\right)\mathcal{N}\left(B\right)$.

מסקנה: $\mathcal{N}\left(A\right)=\mathcal{N}\left(A^{T}\right)$.

מינור: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ ויהיו $i,j\in\left[n\right]$ אזי $A_{i,j}\in M_{n-1}\left(\mathbb{F}\right)$ כך שמתקיים

$$\left(A_{i,j}\right)_{r,s}=\begin{cases} \left(A\right)_{r,s} & \left(r\leq i-1\right)\wedge\left(s\leq j-1\right)\\ \left(A\right)_{r+1,s} & \left(r\geq i\right)\wedge\left(s\leq j-1\right)\\ \left(A\right)_{r,s+1} & \left(r\leq i-1\right)\wedge\left(s\geq j\right)\\ \left(A\right)_{r+1,s+1} & \left(r\geq i\right)\wedge\left(s\geq j\right) \end{cases}$$

דטרמיננטה: פונקציית הנפח היחידה תיקרא $\det^{n}$.

הערה: $\forall A\in M_{1}\left(\mathbb{F}\right).\det\left(A\right)=\left(A\right)_{1,1}$.

פיתוח דטרמיננטה על פי עמודה: יהי $j\in\left[n\right]$ אזי $\det_{j}^{n}\left(A\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{k+j}\left(A\right)_{k,j}\det_{j}^{n-1}\left(A_{k,j}\right)$.

מסקנה: $\forall j,i\in\left[n\right].\det_{j}^{n}\left(A\right)=\det_{i}^{n}\left(A\right)$.

סימון: $\det_{j}^{n}=\det$.

סימון: $\det\left(A\right)=\left|A\right|$.

פיתוח דטרמיננטה על פי שורה: יהי $i\in\left[n\right]$ אזי $\det\left(A\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{k+i}\left(A\right)_{i,k}\det\left(A_{i,k}\right)$.

מטריצה מצורפת: $\left(\text{adj}\left(A\right)\right)_{i,j}=\left(-1\right)^{i+j}\left|A_{j,i}\right|$.

טענה: $\text{adj}\left(A^{T}\right)=\left(\text{adj}\left(A\right)\right)^{T}$.

משפט: $A\cdot\text{adj}\left(A\right)=\left|A\right|I=\text{adj}\left(A\right)\cdot A$.

מסקנה: $A^{-1}=\frac{1}{\left|A\right|}\text{adj}\left(A\right)$.

כלל קרמר: תהא מערכת משוואת $Ax=b$ כאשר A הפיכה אזי $x_{i}=\frac{\left|A_{i}\right|}{\left|A\right|}$ כאשר $C_{j}\left(A_{i}\right)=\begin{cases} b & i=j\\ C_{j}\left(A\right) & else \end{cases}$.

הגדרה: תהא $\sigma\in S_{n}$ נגדיר יחס שקילות $a\sim_{\text{cycle}}b\iff\exists i\in\mathbb{N}.\sigma^{i}\left(a\right)=b$.

ציקלוס/מחזור: $\left[a\right]_{\sim_{\text{cycle}}}$.

פירוק תמורה לציקלוסים זרים: כל תמורה ניתנת לפירוק יחיד של ציקלוסים.

חילוף: $\begin{cases} j & x=i \\ i & x=j \\ x & else \end{cases} = \left(\begin{array}{cc} i & j \end{array}\right)(x)$.

טענה: כל מחזור ניתן לכתיבה כהרכבה של חילופים.

מסקנה: כל תמורה ניתנת לכתיבה כהרכבה של חילופים.

טענה: $\left(\begin{array}{cc} i & j \end{array}\right) \circ \left(\begin{array}{cc} n & m \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} n & m \end{array}\right) \circ \left(\begin{array}{cc} i & j \end{array}\right)$.

סימון: $\text{sign}(\sigma) = \det(P(\sigma))$.

טענה:

- יהיו $E_{R_i \leftrightarrow R_j}, \ldots, E_{R_\lambda \leftrightarrow R_\theta}$ אזי $E_{R_i \leftrightarrow R_j} \cdot \ldots \cdot E_{R_\lambda \leftrightarrow R_\theta} = P(\sigma)$.
- אם $(P(\sigma))_{i,j} = 1$ אז $P(\sigma)_{i,j}$ מטריצת תמורה.
- $\text{sign}(\sigma) = \pm 1$.

מטריצת תמורה זוגית: $\text{sign}(\sigma) = 1$.

מטריצת תמורה איזוגית: $\text{sign}(\sigma) = -1$.

טענה: (Id זוגית)$\wedge$($\left(\begin{array}{cc} i & j \end{array}\right)$ אי זוגית).

טענה: $P(\sigma\tau) = P(\sigma) P(\tau)$.

מסקנה: $\text{sign}(\sigma\tau) = \text{sign}(\sigma)\,\text{sign}(\tau)$.

אי סדר של תמורה: זוג סדור $\langle i,j \rangle$ שמקיים $(i<j) \wedge (\sigma(i) > \sigma(j))$.

אי הסדרים של איבר: $z(\sigma, i) = |\{j > i \mid \sigma(i) > \sigma(j)\}|$.

אי הסדרים של תמורה: $N(\sigma) = |\{\langle i,j \rangle \mid (j>i) \wedge (\sigma(i) > \sigma(j))\}|$.

משפט: $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$.

דטרמיננטה על פי תמורה: $|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n (A)_{i,\sigma(i)}\right)$.

מסקנה: $\forall A \in M_n(\mathbb{Z}) . |A| \in \mathbb{Z}$.

מסקנה: $\forall A \in M_n(\mathbb{Z}) . (\|A\| = 1) \Longrightarrow \left(A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})\right)$.

מסקנה: $\det(A) \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_{n^2}]$.

נורמה: יהי $v \in \mathbb{R}^n$ נגדיר $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ אזי f רציפה.

מסקנה: $\det$ רציפה.

מסקנה: $\forall A \in M_n^\times(\mathbb{F}) . \exists \varepsilon . \forall B \in M_n(\mathbb{F}) . \left(\forall i,j . (B)_{i,j} \in \left((A)_{i,j} - \varepsilon, (A)_{i,j} + \varepsilon\right)\right) \Longrightarrow B \in M_n^\times(\mathbb{F})$.

מרחב וקטורי (מ"ו): $\langle V, +, * \rangle$ המקיים

- $\langle V, + \rangle$ חבורה אבלית.
- $* : \mathbb{F} \times V \to V$ המקיימת
  - $\forall v \in V . 1_{\mathbb{F}} * v = v$.
  - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} . \forall v \in V . (\alpha * \beta) * v = \alpha * (\beta * v)$.
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} . \forall v, u \in V . ((\alpha + \beta) * v = \alpha * v + \beta * v) \wedge (\alpha * (v + u) = \alpha * v + \alpha * u)$.

טענה: $(\forall \alpha \in \mathbb{F} . \alpha \cdot 0_V = 0_V) \wedge (\alpha * v = 0_V \iff (\alpha = 0_{\mathbb{F}}) \vee (v = 0_V)) \wedge (-1_{\mathbb{F}} * v = -v) \wedge (\forall v \in V . 0_{\mathbb{F}} * v = 0_V)$.

תת מרחב וקטורי (תמ"ו): קבוצה $\mathcal{U} \subseteq V^n$ המקיימת $(\forall v \in \mathcal{U} . \forall a \in \mathbb{F} . a \cdot v \in \mathcal{U}) \wedge (\forall u, v \in \mathcal{U} . u + v \in \mathcal{U}) \wedge (0 \in \mathcal{U})$.

טענה: יהיו U, V תמ"ו אזי $U \cap V$ תמ"ו.

צירוף לינארי: יהי $v \in V^n$, צירוף לינארי של v הינו ביטוי מהצורה $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ בעבור $\alpha \in \mathbb{F}^n$.

הנפרשת/ספאן: תהא $v \in V^m$ נגדיר $\text{span}(v) = \{\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \mid \alpha \in \mathbb{F}^m\}$.

סדרה בת"ל: סדרה $v \in V^n$ שמקיימת $\forall \alpha \in \mathbb{F}^n . \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0$.

בסיס: $v \in V$ בת"ל ופורשת.

מרחב התלויות הלינאריות: תהא $v \in V^n$ נגדיר $\text{LD}(v) = \{\alpha \in \mathbb{F}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0\}$.

טענה: $(A \subseteq B \Longrightarrow \text{span}(A) \subseteq \text{span}(B)) \wedge (A \subseteq \text{span}(B) \Longrightarrow \text{span}(A) \subseteq \text{span}(B))$.

טענה: תהא $K \subseteq V$ אזי $\text{span}(K)$ הינו התמ"ו הקטן ביותר ביחס ההכלה המכיל את K.

$\wedge$($\text{span}(\text{span}(A)) = \text{span}(A)$)$\wedge$($\text{span}(\varnothing) = \{0\}$).

משפט ההחלפה של ריס: תהא $v \in V^n$ פורשת ו-$u \in V^m$ בת"ל
- $m \leq n$.
- קיימים $1 \leq i_1 \ldots i_m \leq n$ כך שהקבוצה $\{u_1 \ldots u_k\} \cup \{v_j \mid j \notin \{i_1 \ldots i_k\}\}$ פורשת.

מסקנה: יהיו A, B בסיסים אזי $|A| = |B|$.

מימד: יהי B בסיס $\dim_{\mathbb{F}}(V) = |B|$.

נ"ס (נוצר סופית): מ"ו V שמקיים $\exists v \in V^k . \text{span}(v) = V$.

משפט: V נ"ס $\Longleftarrow$ קיים בסיס ל-V.

מסקנה: יהי V נ"ס
- פחות מ-$\dim(V)$ וקטורים לא פורשים.
- יותר מ-$\dim(V)$ וקטורים ת"ל.

משפט 2 מתוך 3: יהי V מ"ו נ"ס ויהי $B \in V^k$, כל שניים מהשלושה שקולים
- B בת"ל.
- B פורשת.
- $\dim(V) = k$.

משפט: תהא V נ"ס, לכל $U \subseteq V$ תמ"ו מתקיים כי U נ"ס.

מסקנה: לכל $U \subseteq V$ תמ"ו מתקיים $\dim(U) \leq \dim(V)$.

משפט: יהיו $U, W \subseteq V$ תמ"ו אזי $U = W \iff (U \subseteq W) \wedge (\dim(U) = \dim(W))$.

סכום מרחבים וקטורים: יהיו $U, W \subseteq V$ תמ"ו אזי $U + W = \{u + w \mid u \in U \wedge w \in W\}$ תמ"ו של V.

משפט: אם $U = \text{span}(A)$, $W = \text{span}(B)$ אז $W + U = \text{span}(A \cup B)$.

מסקנה: אם $U, W, T \subseteq V$ תמ"ו אז $U, W \subseteq T \implies U + W \subseteq T$.

משפט: אם $U \cap W = \{0\}$ אז לכל בסיס B של U, לכל בסיס C של W מתקיים כי $B ^\frown C$ בסיס של $U + W$.

סכום ישר: אם $U \cap W = \{0\}$ אז $U \oplus W = U + W$.

משפט האפיון של סכום ישר: יהיו $U, W \subseteq V$ תמ"ו התב"ש
- $U \oplus W$.
- לכל בסיס B של U, לכל בסיס C של W מתקיים כי $B ^\frown C$ בסיס של $U + W$.
- $\forall k \in U + W . \exists! \langle u, w \rangle \in U \times W . u + w = k$.

מסקנה: $\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$.

משפט המימד הראשון: יהיו U, W תמ"ו אזי $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

קואורדינטות: יהי $b \in V^n$ בסיס ויהי $v \in V$ אזי $\iota \alpha \in \mathbb{F}^n . v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$.

סימון: $[v]_B = \iota \alpha \in \mathbb{F}^n . v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B_i$.

העתקת קואורדינטות: יהי B בסיס נגדיר $Q_B : V \to \mathbb{F}^{\dim(V)}$ כך $Q_B(v) = [v]_B$.

משפט:
- $Q_B^{-1}(\alpha) = \sum_{i=1}^{\dim(V)} \alpha_i b_i$.
- $(Q(\alpha v) = \alpha Q(v)) \wedge (Q(v + w) = Q(v) + Q(w))$.
- $v_1 \ldots v_k$ בת"ל $\iff$ $Q_B(v_1) \ldots Q_B(v_k)$ בת"ל.
- $v \in \text{span}(v_1 \ldots v_k) \iff Q_B(v) \in \text{span}(Q_B(v_1) \ldots Q_B(v_k))$.

מרחב העמודות: $\mathcal{C}(A) = \text{span}(\{C_i(A) \mid i \in [n]\})$.

מרחב השורות: $\mathcal{R}(A) = \text{span}(\{R_i(A) \mid i \in [m]\})$.

טענה: $\mathcal{C}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{F}^n\} = \text{Im}(T_A)$.

טענה: $\mathcal{R}(AB) \subseteq \mathcal{R}(B)$, $\mathcal{C}(AB) \subseteq \mathcal{C}(A)$.

משפט: $\dim(\mathcal{C}(A)) = \dim(\mathcal{R}(A))$.

דרגה: $\text{rank}(A) = \dim(\mathcal{C}(A))$.

מרחב האפסות: $\mathcal{N}(A) = \dim(\text{sols}(A))$.

טענה: $\text{rank}(A) \leq \min(n, m)$, $\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$, $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

טענה: אם A הפיכה אזי $\text{rank}(AB) = \text{rank}(B)$.

המשפט היסודי של הדירוג: יהיו $A, A' \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ש"ש
- $\text{sols}(A) = \text{sols}(A')$.
- $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A')$.
- $\text{rank}(A) = \text{rank}(A')$.

טענה: $\text{sols}(A) = \text{LD}(\{C_i(A) \mid i \in [n]\})$.

מסקנה: תהא A מטריצה מדורגת קנונית אזי אין איבר פותח בעמודה ה־i $\iff C_i(A) \in \text{span}(C_1(A), \ldots, C_{i-1}(B))$.

משפט: יהיו $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ויהיו A', B' המטריצות הקנוניות שלהם בהתאמה, התב"ש
- $A \sim B$.
- $A' = B'$.
- $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי ($\text{rank}(A) = n$) $\iff$ (A הפיכה).

משפט הדרגה והאפסות: $n = \text{rank}(A) + \mathcal{N}(A)$.

פונקציה מטריציונית: $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ שמקיימת $\exists A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}) . f = T_A$.

הגדרה: $\ker(T_A) = T_A^{-1}[\{0\}] = \text{sols}(A)$.

טענה: $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F}) . T_A = T_B \iff A = B$.

טענה: T_A לינארית.

העתקה לינארית/טרנספורמציה לינארית (ט"ל): יהיו U, W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $T : V \to U$ שמקיימת כי T לינארית.

טענה: תהא $T : V \to U$ ט"ל מתקיים ($T(0) = 0$)$\wedge$($T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i)$).

טענה: תהא $T : U \to W$ ט"ל ותהא $S : V \to U$ ט"ל אזי $T \circ S$ ט"ל.

משפט: תהא $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ אזי T לינארית $\iff$ T מטריציונית.

משפט: תהא $T_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ ט"ל אזי $C_i(A) = T(\delta_i)$.

טענה: $\text{Im}(T)$, $\ker(T)$ תמ"ו.

טענה: תהא T ט"ל אזי
- $\langle T(v_1) \ldots T(v_n)\rangle$ בת"ל $\Longleftarrow$ $\langle v_1 \ldots v_n\rangle$ בת"ל.
- $\langle v_1 \ldots v_n\rangle$ פורשת $\Longleftarrow$ $\langle T(v_1) \ldots T(v_n)\rangle$ פורשת את $\text{Im}(T)$.

למה: תהא T ט"ל אזי
- נניח כי T חח"ע, $\langle v_1 \ldots v_n\rangle$ בת"ל $\Longleftarrow$ $\langle T(v_1) \ldots T(v_n)\rangle$ בת"ל.
- נניח כי T על, $\langle v_1 \ldots v_n\rangle$ פורשת $\Longleftarrow$ $\langle T(v_1) \ldots T(v_n)\rangle$ פורשת.

מסקנה: תהא T ט"ל הפיכה ויהי $\langle b_1 \ldots b_n\rangle$ בסיס אזי $\langle T(b_1) \ldots T(b_n)\rangle$ בסיס.

איזומורפיזם בין מרחבים וקטורים: $T : V \to U$ ט"ל הפיכה.

טענה: תהא $T : V \to U$ ט"ל
- T חח"ע $\iff \ker(T) = \{0\}$.
- T על $\iff \dim(\text{Im}(T)) = \dim(U)$.
- $\forall u \in \text{Im}(T) . \forall v \in T^{-1}[\{u\}] . T^{-1}[\{u\}] = v + \ker(T)$.

משפט המימד השני: תהא $T : V \to U$ ט"ל $\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T))$.

משפט 2 מתוך 3: תהא $T : V \to U$ ט"ל, כל שניים מהשלושה שקולים
- T חח"ע.
- T על.
- $\dim(V) = \dim(U)$.

טענה: $T : V \to U$ איזומורפיזם $\Longleftarrow \dim(V) = \dim(U)$.

משפט: T איזומורפיזם $\iff$ T^{-1} איזומורפיזם.

משפט: לכל V מ"ו נ"ס מתקיים $V \cong \mathbb{F}^{\dim(V)}$.

מסקנה: יהיו V, W מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$ אזי $V \cong W \iff \dim(V) = \dim(W)$.

משפט: יהי $b \in V^n$ בסיס ויהי $c \in U^n$ אזי $T : V \to U$ המוגדרת $T(x) = \sum_{i=1}^n ([x]_b)_i \cdot c_i$ היא הט"ל היחידה שמקיימת $\forall i \in [n] . T(b_i) = c_i$.

טענה: יהיו $T_1,T_2:V\to U$ ט"ל ויהי b פורשת את V אזי $T_1=T_2 \Longleftarrow \forall i\in[n].T_1(b_i)=T_2(b_i)$.

מרחב העתקות הלינאריות: $\text{Hom}(V,U)=\{T\in V\to U \mid T \text{ ט"ל}\}$.

טענה: $\text{Hom}(V,U)$ מ"ו מעל השדה של V,U.

הערה: $\forall T_1,T_2\in\text{Hom}(V,U).T_1\circ T_2\in\text{Hom}(V,U)$.

משפט: $\dim(\text{Hom}(V,U))=\dim(V)\cdot\dim(U)$.

טענה: יהיו b,c בסיסים של V,U בהתאמה לכן $\left\{T_{i,j}(b_k)=\begin{cases}c_j & i=k\\ 0 & else\end{cases} \;\middle|\; i,j\in[n]\right\}$ בסיס של $\text{Hom}(V,U)$.

סימון: $\text{Hom}(V)=\text{Hom}(V,V)$.

משפט: תהא $T\in\text{Hom}(V,U)$ ויהיו B,C בסיסים של V,U בהתאמה לכן $Q_C\circ T\circ Q_B^{-1}$ מטריציונית.

מטריצה מייצגת: המטריצה $A=[T]_C^B$ עבורה $Q_C\circ T\circ Q_B^{-1}=T_A$.

סימון: $[T]_B=[T]_B^B$.

מסקנה: $C_i\left([T]_C^B\right)=[T(B_i)]_C$.

מסקנה: $[T]_C^B\cdot[v]_B=[T(v)]_C$.

הטלה: יהיו $V=U\oplus W$ מ"ו אזי $P_{(U,W)}:V\to V$ המוגדרת $P_{(U,W)}(v)=\iota u\in U.\exists w\in W.u+w=v$.

טענה: $P_{(U,W)}$ ט"ל, $\text{Im}\left(P_{(U,W)}\right)=U$, $\ker\left(P_{(U,W)}\right)=W$, $P_{(U,W)}^2=P_{(U,W)}$.

הערה: $[T]_C^B\in M_{\dim(U)\times\dim(V)}(\mathbb{F})$.

משפט:

- $(Q_B)_{\restriction_{\ker(T)}}:\ker(T)\to\text{sols}\left([T]_C^B\right)$ איזומורפיזם.
- $(Q_C)_{\restriction_{\text{Im}(T)}}:\text{Im}(T)\to\mathcal{C}\left([T]_C^B\right)$ איזומורפיזם.

מסקנה: $\mathcal{N}\left([T]_C^B\right)=\dim(\ker(T))$, $\text{rank}\left([T]_C^B\right)=\dim(\text{Im}(T))$.

טענה: תהא $T\in\text{Hom}(V,U)$ אזי T הפיכה $\Longleftrightarrow$ $[T]_C^B$ הפיכה.

משפט: $T\in\text{Hom}(V,U)$, $S\in\text{Hom}(U,W)$ אז $[S\circ T]_D^B=[S]_D^C\cdot[T]_C^B$.

מסקנה: $\left([T]_C^B\right)^{-1}=\left[T^{-1}\right]_B^C$.

מטריצת שינוי קואורדינטות: $[Id_V]_C^B$.

הערה: $C_i\left([Id]_C^B\right)=[B_i]_C$.

מסקנה: $[T]_C^B=[Id]_C^E\cdot[T]_E^D\cdot[Id]_D^B$.

דמיון מטריצות: $\forall A,B\in M_n(\mathbb{F}).A\sim B\Longleftrightarrow\exists P\in M_n(\mathbb{F}).P^{-1}BP=A$.

משפט: יהיו $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ התב"ש

- $B\sim A$.
- $\forall T\in\text{Hom}(V,U).A=[T]_D^C\Longrightarrow\exists C',D'.B=[T]_{D'}^{C'}$.
- $\exists T\in\text{Hom}(V,U).([T]_C=A)\wedge([T]_D=B)$.

טענה: A,B דומות אז $\det(A)=\det(B)$.

הגדרה: תהא $T\in\text{Hom}(V)$ אזי $\det(T)=\det([T]_B)$.

עקבה: $\text{trace}(A)=\sum_{i=1}^n(A)_{i,i}$.

טענה: $\forall A,B\in M_n(\mathbb{F}).\text{trace}(AB)=\text{trace}(BA)$.

מסקנה: A,B דומות $\Longleftarrow$ $\text{trace}(A)=\text{trace}(B)$.

הגדרה: תהא $T\in\text{Hom}(V)$ אזי $\text{trace}(T)=\text{trace}([T]_B)$.

מטריצות מתאימות: $\forall A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{F}).A\sim_{\text{green}}B\Longleftrightarrow\exists P,Q\in M_n(\mathbb{F}).P^{-1}BQ^{-1}=A$.

הערה: A,B דומות $\Longleftarrow$ A,B מתאימות.

טענה: A,B מתאימות $\Longleftrightarrow$ $\text{rank}A=\text{rank}B$.

הגדרה: $[*]_C^B:\text{Hom}(V,W)\to M_{\dim(V)\times\dim(W)}(\mathbb{F})$ כך $[*]_C^B(T)=[T]_C^B$.

משפט: $[*]_C^B$ איזומורפיזם.

אלגברה: $\langle V,+,\cdot,*\rangle$ שמקיים ($\langle V,+,\cdot\rangle$ מ"ו)$\wedge$($*:V\times V\to V$).

אלגברת מטריצות: המרחב $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ עם פעולת כפל מטריצות.

אלגברת Hom: המרחב $\text{Hom}\left(V,W\right)$ עם פעולת ההרכבה.

איזומורפיזם בין אלגברות: $T:A\to B$ ט"ל הפיכה שמקיימת $\forall\alpha,\beta\in A.T\left(\alpha*\beta\right)=T\left(\alpha\right)*T\left(\beta\right)$.

משפט: אם $\left[*\right]_{B}:\text{Hom}\left(V\right)\to M_{\dim\left(V\right)}\left(\mathbb{F}\right)$ אז $\left[*\right]_{B}$ איזומורפיזם בין אלגברות.

מטריצת בלוקים:

$$\left(\begin{array}{ccc}A_{1,1} & \dots & A_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n}\end{array}\right)$$

הערה: מספר העמודות והשורות בין מטריצות צמודות חייב להיות שווה.

סימון:

$$\left(A_{i,j}\right)_{1\le i,j\le m}=\left(\begin{array}{ccc}A_{1,1} & \dots & A_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n}\end{array}\right)$$

כפל מטריצת בלוקים: $\left(AB\right)_{i,j}=\sum_{t=1}^{m}A_{i,t}B_{t,j}$.

מטריצת בלוקים ריבועית: מטריצת בלוקים כך שמקיימת $\forall i.A_{i,i}\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$.

מטריצת בלוקים משולשית עליונה: $\left(\left(A_{i,j}\right)_{1\le i,j\le m}\right)_{k,\ell}=\begin{cases}A_{k,\ell} & k\le\ell\\ 0 & else\end{cases}$.

מטריצת בלוקים משולשית תחתונה: $\left(\left(A_{i,j}\right)_{1\le i,j\le m}\right)_{k,\ell}=\begin{cases}A_{k,\ell} & k\ge\ell\\ 0 & else\end{cases}$.

מטריצת בלוקים אלכסונית: מטריצת בלוקים משולשית תחתונה ועליונה.

הגדרה: $\left(\text{Diag}\left(A_{1,1},\dots,A_{n,n}\right)\right)_{k,\ell}=\begin{cases}A_{k,k} & k=\ell\\ 0 & else\end{cases}$.

משפט: אם $\left(A_{i,j}\right)_{1\le i,j\le m}$ משולשית אז $\det\left(\left(A_{i,j}\right)_{1\le i,j\le m}\right)=\prod_{i=1}^{n}\det\left(A_{i,i}\right)$.