פונקציית הסתברות נקודתית: תהא Ω קבוצה אזי פונקציה $\mathbb{P}:\Omega\to[0,1]$ עבורה $\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\omega)=1$.

מרחב הסתברות (מ"ה): תהא Ω קבוצה ותהא $\mathbb{P}$ פונקציית הסתברות אזי $(\Omega,\mathbb{P})$.

מרחב מדגם: יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי Ω.

מרחב הסתברות בדיד: מרחב הסתברות $(\Omega,\mathbb{P})$ עבורו $|\Omega|\le\aleph_0$.

מרחב הסתברות סופי: מרחב הסתברות $(\Omega,\mathbb{P})$ עבורו $|\Omega|\in\mathbb{N}$.

הערה: בקורס זה כל מרחבי ההסתברות הינם בדידים.

סימון: תהא A קבוצה אזי $2^A=\mathcal{P}(A)$.

מאורע: יהי $(\mathbb{P},\Omega)$ מרחב הסתברות אזי $A\subseteq\Omega$.

הסתברות מאורע: יהי $(\mathbb{P},\Omega)$ מרחב הסתברות ויהי A מאורע אזי $\mathbb{P}(A)=\sum_{\omega\in A}\mathbb{P}(\omega)$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $[n]=\{1,\ldots,n\}$.

משפט: יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו A,B מאורעות אזי
- משלים: $\mathbb{P}\left(A^{\mathcal{C}}\right)=1-\mathbb{P}(A)$.
- אדטיביות: $\mathbb{P}(A\uplus B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$.
- $\mathbb{P}(A\backslash B)=\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B\cap A)$.
- מונוטוניות: $(A\subseteq B)\Longrightarrow(\mathbb{P}(A)\le\mathbb{P}(B))$.
- הכלה והדחה: $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$.

מסקנה: תהא $\mathbb{P}$ פונקציית הסתברות אזי $\mathbb{P}(\varnothing)=0$.

משפט סיגמא־אדטיביות: יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(E_i)$.

הכלה והדחה כללית: יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{\varnothing\ne I\subseteq[n]}\left((-1)^{|I|+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\right)$.

הכלה והדחה סימטרית: יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות עבורם $\forall I\subseteq[n].(|I|=k)\Rightarrow(\mathbb{P}(A_I)=a_k)$ אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1}\binom{n}{k}a_k\right)$.

מרחב הסתברות אחיד: מרחב הסתברות סופי $(\Omega,\mathbb{P})$ עבורו $\forall A\in2^{\Omega}.\mathbb{P}(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$.

תמורה מקרית/סידור אקראי: המרחב האחיד על S_n.

משפט חסם האיחוד: יהיו A,B מאורעות אזי $\mathbb{P}(A\cup B)\le\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$.

מסקנה: יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)$.

מסקנה: יהיו $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)$.

אי שוויונות בונפרוני: יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות ויהי $1\le k\le n$ אזי
- $k\in\mathbb{N}_{odd}$ אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\sum_{\substack{I\subseteq[n]\\|I|=k}}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)$.
- $k\in\mathbb{N}_{even}$ אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\ge\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\sum_{\substack{I\subseteq[n]\\|I|=k}}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)$.

משפט רציפות פונקציית ההסתברות: יהיו $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ מאורעות אזי
- $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)$.
- $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)$.

פונקציית גיבוב/hash: יהיו $n,m\in\mathbb{N}_+$ אזי $h:[n]\to[m]$.

התנגשות: יהיו $n,m\in\mathbb{N}_+$ ותהא $h:[n]\to[m]$ פונקציית גיבוב אזי $i,j\in[n]$ שונים עבורם $h(i)=h(j)$.

פרדוקס יום ההולדת: יהיו $n,m\in\mathbb{N}_+$ ותהא $h:[n]\to[m]$ פונקציית גיבוב אזי $\frac{n(n-1)}{2m}\ge\mathbb{P}(\text{התנגשות})\ge1-e^{-\frac{n(n-1)}{2m}}$.

מספר ראמזי: נגדיר $R:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך $R(t)=\min\{n\mid$ בכל צביעה של K_n בשני צבעים יש K_t מונוכרומטית$\}$.

משפט: יהי $t\in\mathbb{N}_+$ אזי $2^{\frac{t-3}{2}}<R(t)\le c\cdot\frac{4^t}{\sqrt{t}}$.

פונקציית הסתברות מותנית: יהי F מאורע המקיים $\mathbb{P}(F)>0$ אזי $\mathbb{P}(\omega\mid F)=\begin{cases}\frac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}(F)} & \omega\in F\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

טענה: פונקציית הסתברות מותנית הינה פונקציית הסתברות.

מרחב הסתברות מותנה: יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $F\in2^{\Omega}$ אזי $(\Omega,\mathbb{P}(\cdot\mid F))$.

טענה: מרחב הסתברות מותנית הוא מרחב הסתברות.

משפט: יהיו E,F מאורעות אזי $\mathbb{P}(E\mid F)=\frac{\mathbb{P}(E\cap F)}{\mathbb{P}(F)}$.

כלל השרשרת: יהיו A,B מאורעות אזי $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A\mid B)\mathbb{P}(B)$.

כלל השרשרת: יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^{n}\mathbb{P}\left(A_i\mid\bigcap_{j=1}^{i-1}A_j\right)$.

נוסחת ההסתברות השלמה: יהיו A,B מאורעות אזי $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\mid B)\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}\left(A\mid B^{\mathcal{C}}\right)\mathbb{P}\left(B^{\mathcal{C}}\right)$.

הכללה: יהיו $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ המקיימות $\biguplus_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$ אזי $\mathbb{P}(B)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(B\mid A_i)\mathbb{P}(A_i)$.

כלל בייס: יהיו E,F מאורעות אזי $\mathbb{P}(E\mid F)=\frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F|E)}{\mathbb{P}(F)}$.

טענה: יהיו A,B מאורעות עבורם $\mathbb{P}(A),\mathbb{P}(B)>0$ אזי $\mathbb{P}((\cdot\mid B)\mid C)=\mathbb{P}(\cdot\mid B\cap C)\mathbb{P}(C\mid B)$.

מאורע מחזק: יהי B מאורע אזי מאורע A עבורו $\mathbb{P}(A)>0$ המקיים $\mathbb{P}(B\mid A)>\mathbb{P}(B)$.

מאורעות בלתי תלויים (ב"ת): מאורעות A,B המקיימים $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

סימון: $AB=A\cap B$.

טענה: יהי A מאורע אזי (A ב"ת עם עצמו)$\iff(\mathbb{P}(A)\in\{0,1\})$.

טענה: יהיו A,B מאורעות זרים וב"ת אזי $(\mathbb{P}(A)=0)\vee(\mathbb{P}(B)=0)$.

טענה: יהיו A,B מאורעות התב"ש

- A,B בלתי תלויים.
- $A^{\mathcal{C}},B$ בלתי תלויים.
- $A^{\mathcal{C}},B^{\mathcal{C}}$ בלתי תלויים.
- $A,B^{\mathcal{C}}$ בלתי תלויים.

אי תלות בזוגות: מאורעות $A_1\ldots A_n$ המקיימים $\forall i\neq j.\mathbb{P}(A_iA_j)=\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.

אי תלות בזוגות: מאורעות $\{A_i\}_{i\in I}$ המקיימים $\forall i\neq j.\mathbb{P}(A_iA_j)=\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.

מאורעות בלתי תלויים (ב"ת): מאורעות $A_1\ldots A_n$ המקיימים $\forall I\subseteq[n].\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)$.

הכללה: מאורעות $\{A_i\}_{i\in I}$ המקיימים $\forall J\subseteq I.(|J|\in\mathbb{N}_+)\implies\left(\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)\right)$.

הערה: נסמן זמנית $\left(A^1=A\right)\wedge\left(A^{-1}=A^{\mathcal{C}}\right)$.

טענה: ($A_1\ldots A_n$ בלתי תלויים)$\iff\left(\forall\varepsilon\in\{\pm1\}^n.\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i^{\varepsilon_i}\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(A_i^{\varepsilon_i}\right)\right)$.

מסקנה: יהיו $A_1\ldots A_n,B_1$ מאורעות ב"ת אזי כל איחוד/חיתוך/משלים של $A_1\ldots A_n$ ב"ת עם B_1.

פונקציית הסתברות מכפלה: יהיו $(\Omega_1,\mathbb{P}_1),(\Omega_2,\mathbb{P}_2)$ מ"ה אזי $\mathbb{P}_{\Omega_1\times\Omega_2}((\omega_1,\omega_2))=\mathbb{P}_1(\omega_1)\mathbb{P}_2(\omega_2)$.

טענה: פונקציית הסתברות מכפלה היא פונקציית הסתברות.

מרחב מכפלה: יהיו $(\Omega_1,\mathbb{P}_1),(\Omega_2,\mathbb{P}_2)$ מ"ה אזי $(\Omega_1,\mathbb{P}_1)\otimes(\Omega_2,\mathbb{P}_2)=\left(\Omega_1\times\Omega_2,\mathbb{P}_{\Omega_1\times\Omega_2}\right)$.

טענה: מרחב מכפלה הוא מרחב הסתברות.

טענה: יהיו $(\Omega_1,\mathbb{P}_1)\ldots(\Omega_n,\mathbb{P}_n)$ מ"ה אזי $\bigotimes_{i=1}^{n}(\Omega_i,\mathbb{P}_i)$ מרחב הסתברות.

מלבן: מאורע $C\subseteq\Omega_1\times\Omega_2$ המקיים $\exists A\subseteq\Omega_1.\exists B\subseteq\Omega_2.C=A\times B$.

טענה: יהי $A\times B\subseteq\Omega_1\times\Omega_2$ מלבן אזי $\mathbb{P}(A\times B)=\mathbb{P}_1(A)\mathbb{P}_2(B)$.

סימון: יהי $\bigotimes_{i=1}^{n}(\Omega_i,\mathbb{P}_i)$ מ"ה ויהי $A\subseteq\Omega_i$ אזי $\overline{A}=\Omega_1\times\ldots\times\Omega_{i-1}\times A\times\Omega_{i+1}\times\ldots\times\Omega_n$.

מסקנה: יהי $A\subseteq\Omega_i$ ויהי $B\subseteq\Omega_j$ אזי $\overline{A},\overline{B}$ ב"ת מעל $\bigotimes_{i=1}^{n}(\Omega_i,\mathbb{P}_i)$.

טענה: יהי $A\subseteq\Omega_i$ אזי $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)=\mathbb{P}_i(A)$.

מסקנה: $\mathbb{P}((\omega_1\ldots\omega_n))=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}_i(\omega_i)$.

משפט: יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות עבורם $A_i\subseteq\Omega_i$.$\forall i\in[n]$ אזי $\overline{A_1}\ldots\overline{A_n}$ ב"ת.

מאורעות בלתי תלויים בהתנייה: יהי $\mathbb{P}(C)>0$ אזי מאורעות A,B עבורם $\mathbb{P}(A\cap B\mid C)=\mathbb{P}(A\mid C)\mathbb{P}(B\mid C)$.

n ניסויי ברנולי: יהי $0\le p\le1$ נגדיר $f\in[0,1]^{\{0,1\}}$ כך $f(k)=\left\{\begin{smallmatrix}p & k=1\\ 1-p & k=0\end{smallmatrix}\right.$ אזי $\bigotimes_{i=1}^{n}(\{0,1\},f)$.

טענה: נסמן "הרצף הארוך ביותר של 1 ב־n ניסויי ברנולי" $=M_n$ אזי $\left(M_n-\log_{\frac{1}{p}}(n)\right)\to0$.

מטריצת שכנויות: יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון אזי $A\in M_{|V|}(\{0,1\})$ המקיים $A_{i,j}=\left\{\begin{smallmatrix}1 & \{i,j\}\in E\\ 0 & \text{else}\end{smallmatrix}\right.$.

גרפים על n קודקודים: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left\{(A_{i,j})_{1\le i<j\le n}\mid A_{i,j}\in\{0,1\}\right\}$.

הימצאות קשת בהתסברות p: יהי $p\in[0,1]$ אזי $\mathbb{P}(\{\omega\in$ גרפים על n קודקודים $\mid\omega_{i,j}=1\})=p$.

גרף מקרי: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $p\in[0,1]$ אזי (הימצאות קשת בהתסברות p, גרפים על n קודקודים) $=G(n,p)$.

טענה: יהי $\omega\in G(n,p)$ אזי $\mathbb{P}(\omega)=p^{|E_\omega|}\cdot(1-p)^{\binom{n}{2}-|E_\omega|}$.

מסקנה: גרף מקרי הינו מרחב הסתברות.

משתנה מקרי (מ"מ): יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מ"ה בדיד אזי $f\in\Omega\to S$.

סימון: יהי X מ"מ אזי $\mathbb{P}(X=s)=\mathbb{P}\left(X^{-1}(\{s\})\right)$.

אינדיקטור: יהי $A\subseteq\Omega$ מאורע אזי $\mathbb{1}_A\in\{0,1\}^{\Omega}$ המוגדרת $\mathbb{1}_A(\omega)=\left\{\begin{smallmatrix}1 & \omega\in A\\ 0 & \text{else}\end{smallmatrix}\right.$.

טענה: יהיו A,B מאורעות אזי $\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B=\mathbb{1}_{A\uplus B}$.

טענה: יהיו A,B מאורעות אזי $\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B=\mathbb{1}_{A\cap B}$.

תומך: תהא $f:S\to\mathbb{R}$ אזי $\text{supp}\left(f\right)=\left\{s\in S\mid f\left(s\right)\neq0\right\}$.

התפלגות בדידה: $\mu:S\to\left[0,1\right]$ המקיימת $\left(\sum_{s\in\text{supp}(\mu)}\mu\left(s\right)=1\right)\wedge\left(\left|\text{supp}\left(\mu\right)\right|\le\aleph_0\right)$.

התפלגות של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $\mu:\text{Im}\left(X\right)\to\left[0,1\right]$ המוגדרת $\mu_X\left(s\right)=\mathbb{P}\left(X=s\right)$.

טענה: ההתפלגות של משתנה מקרית היא התפלגות בדידה.

סימון: יהי X מ"מ אזי $\text{supp}\left(X\right)=\text{supp}\left(\mu_X\right)$.

משתנים מקריים שווים: $X,Y\in S^{\Omega}$ המקיימים $\forall\omega\in\Omega.X\left(\omega\right)=Y\left(\omega\right)$.

משתנים מקריים שווי התפלגות: X,Y מ"מ עם אותה תמונה המקיימים $\forall s\in S.\mu_X\left(s\right)=\mu_Y\left(s\right)$.

סימון: יהיו X,Y מ"מ שווי התפלגות אזי $X\sim Y$.

התפלגות אחידה בדידה: יהיו $a,b\in\mathbb{Z}$ אזי $\mu\in\left[0,1\right]^{\mathbb{R}}$ המקיימת $\mu\left(k\right)=\begin{cases}\frac{1}{b-a+1} & k\in[a,b]\cap\mathbb{Z}\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג אחיד בדיד אזי $X\sim\text{Uni}\left(a,b\right)$.

סימון: תהא μ התפלגות אזי $\left(\mu=\begin{cases}x_1 & p_1\\ \vdots & \vdots\\ x_n & p_n\end{cases}\right)\equiv\left(\mu\left(k\right)=\begin{cases}p_1 & k=x_1\\ \vdots & \vdots\\ p_n & k=x_n\\ 0 & \text{else}\end{cases}\right)$.

התפלגות ברנולי: יהי $p\in\left[0,1\right]$ אזי $\mu\in\left[0,1\right]^{\{0,1\}}$ המקיימת $\mu=\begin{cases}1 & p\\ 0 & 1-p\end{cases}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג ברנולי אזי $X\sim\text{Ber}\left(p\right)$.

התפלגות גאומטרית: יהי $p\in\left[0,1\right]$ אזי $\mu\in\left[0,1\right]^{\mathbb{N}_+}$ המקיימת $\mu\left(k\right)=\left(1-p\right)^{k-1}p$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג גאומטרית אזי $X\sim\text{Geo}\left(p\right)$.

התפלגות בינומית: יהי $p\in\left[0,1\right]$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\mu\in\left[0,1\right]^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\mu\left(k\right)=\binom{n}{k}p^k\left(1-p\right)^{n-k}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג בינומית אזי $X\sim\text{Bin}\left(n,p\right)$.

התפלגות פואסון: יהי $\lambda>0$ אזי $\mu\in\left[0,1\right]^{\mathbb{N}}$ המקיים $\mu\left(k\right)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג פואסונית אזי $X\sim\text{Pois}\left(\lambda\right)$.

משפט קירוב בינום־פואסון: יהי $k\in\mathbb{N}$ ויהי $\lambda>0$ אזי $\lim_{n\to\infty}\mu_{\text{Bin}\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)}\left(k\right)=\mu_{\text{Pois}(\lambda)}\left(k\right)$.

התפלגות היפרגאומטרית: יהיו $r,n,m\in\mathbb{N}$ אזי $\mu\in\left[0,1\right]^{\mathbb{N}}$ המקיים $\mu\left(k\right)=\frac{\binom{r}{k}\binom{m-r}{n-k}}{\binom{m}{n}}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג היפרגאומטרית אזי $X\sim\text{HG}\left(n,m,r\right)$.

התפלגות בינומית שלילית: יהי $r\in\mathbb{N}$ וכן $p\in\left[0,1\right]$ אזי $\mu\in\left[0,1\right]^{\mathbb{N}}$ המקיים $\mu\left(k\right)=\binom{k-1}{r-1}p^r\left(1-p\right)^{k-r}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג בינומית שלילית אזי $X\sim\text{NB}\left(r,p\right)$.

התפלגות היפרגאומטרית שלילית: יהיו $r,k,m\in\mathbb{N}$ אזי $\mu\in\left[0,1\right]^{\mathbb{N}}$ המקיים $\mu\left(x\right)=\frac{\binom{x-1}{k-1}\binom{m-x}{r-k}}{\binom{m}{r}}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג היפרגאומטרית שלילית אזי $X\sim\text{NHG}\left(r,k,m\right)$.

טרנספורמציה של משתנה מקרי: תהא $X\in A^{\Omega}$ ותהא $f\in B^A$ אזי $f\left(X\right)=f\circ X$.

משפט: יהי X מ"מ ויהי $f\in B^A$ אזי $\mu_{f(X)}\left(k\right)=\sum_{r\in f^{-1}(\{k\})}\mu_X\left(r\right)$.

מסקנה: יהי X מ"מ ויהי $f\in B^A$ אזי $\text{supp}\left(f\left(X\right)\right)=f\left(\text{supp}\left(X\right)\right)$.

זוג משתנים מקריים: יהיו $X:\Omega\to A$ וכן $Y:\Omega\to B$ משתנים מקריים אזי $\left(X,Y\right)$.

התפלגות משותפת: יהי $\left(X,Y\right)$ זוג מ"מ אזי $\mu_{X,Y}\left(x,y\right)=\mathbb{P}\left(X=x,Y=y\right)$.

הכללה: יהיו $X_1\ldots X_n$ מ"מ אזי $\mu_{X_1\ldots X_n}\left(x_1\ldots x_n\right)=\mathbb{P}\left(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\right)$.

התפלגויות שוליות: יהי $\left(X,Y\right)$ זוג מ"מ אזי μ_X,μ_Y.

טענה: $\mu_X\left(x\right)=\sum_{y\in S}\mu_{X,Y}\left(x,y\right)$.

משתנים מקריים בלתי תלויים: $\left(X,Y\right)$ זוג מ"מ עבורו $\mu_{X,Y}=\mu_X\mu_Y$.

הכללה: $X_1\ldots X_n$ מ"מ המקיימים $\mu_{X_1\ldots X_n}=\mu_{X_1}\cdot\ldots\cdot\mu_{X_n}$.

משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות: $X_1\ldots X_n$ מ"מ המקיימים X_i,X_j ב"ת לכל $i\neq j$.

משפט: יהיו $X_1\ldots X_n$ מ"מ ב"ת ויהיו $E_1\ldots E_n$ קבוצות אזי $\left\{X_i\in E_i\right\}$ מאורעות ב"ת.

משפט: יהיו X,Y מ"מ ב"ת ויהיו f,g טרנספורמציות של מ"מ אזי $f\left(X\right),g\left(Y\right)$ ב"ת.

משפט: ($A_1\ldots A_n$ מאורעות ב"ת)$\Longleftrightarrow$($\mathbb{1}_{A_1}\ldots\mathbb{1}_{A_n}$ מ"מ ב"ת).

טענה: יהיו μ_1,μ_2 התפלגויות אזי קיים מ"ה $\left(\Omega,\mathbb{P}\right)$ עבורו קיימים X,Y מ"מ ב"ת המקיימים $\left(\mu_X=\mu_1\right)\wedge\left(\mu_Y=\mu_2\right)$.

קונבולוציה: יהיו μ_1,μ_2 התפלגויות אזי $(\mu_1*\mu_2)(z)=\sum_x\mu_1(x)\mu_2(z-x)$.
טענה: יהיו μ_1,μ_2 התפלגויות אזי $\mu_1*\mu_2=\mu_2*\mu_1$.
משפט: יהיו X,Y מ"מ ב"ת אזי $\mu_{X+Y}=\mu_X*\mu_Y$.
טענה: $\text{Bin}(n,p)+\text{Bin}(m,p)\sim\text{Bin}(n+m,p)$.
מסקנה: $\text{Bin}(n,p)\sim\sum_{i=1}^n\text{Ber}(p)$.
טענה: $\text{Pois}(\lambda_1)+\text{Pois}(\lambda_2)\sim\text{Pois}(\lambda_1+\lambda_2)$.
טענה: $\text{NB}(n,p)\sim\sum_{i=1}^n\text{Geo}(p)$.
משתנה מקרי מותנה: יהי A מאורע ויהי X מ"מ אזי $X_{\restriction A}$.
התפלגות מותנית: יהי A מאורע ויהי X מ"מ אזי $\mu_{X_{\restriction A}}$.
טענה: יהיו X,Y מ"מ אזי $\mu_{X_{\restriction Y=y}}(x)=\frac{\mu_{X,Y}(x,y)}{\mu_Y(y)}$.
סימון: יהיו X,Y מ"מ אזי $\mu_{X_{\restriction Y}}(x\mid y)=\mu_{X_{\restriction Y=y}}(x)$.
התפלגות מולטינומית: יהיו $p_1\dots p_n$ אזי $\mu\in[0,1]^{\mathbb{N}^n}$ המקיים $\mu(k_1\dots k_n)=\binom{n}{k_1\dots k_n}\prod_{i=1}^n p_i^{k_i}$.
התפלגות מצטברת: יהי X מ"מ אזי $F_X:[0,1]^{\mathbb{R}}$ כך $F_X(x)=\mathbb{P}(X\le x)$.
טענה: יהי X מ"מ אזי

- F_X מונוטונית עולה.
- $\lim_{t\to\infty}F_X(t)=1$.
- $\lim_{t\to-\infty}F_X(t)=0$.
- יהי $s\in\text{supp}(X)$ אזי $\mu_X(s)=F_X(s)-\lim_{\varepsilon\to0^+}F_X(s-\varepsilon)$.

פונקציית ההישרדות: יהי X מ"מ אזי $\lambda_X(t)=1-F_X(t)$.
מסקנה: $\text{Geo}\left(1-\prod_{i=1}^n(1-p_i)\right)\sim\min_{i=1}^n\{\text{Geo}(p_i)\}$.
פיצול פואסון: יהיו X,Y מ"מ עבורם $X+Y\sim\text{Poiss}(\lambda)$ וכן $X_{\restriction X+Y=n}\sim\text{Bin}(n,p)$ אזי

- $Y_{\restriction X+Y=n}\sim\text{Bin}(n,1-p)$.
- $X\sim\text{Poiss}(p\lambda)$.
- $Y\sim\text{Poiss}((1-p)\lambda)$.
- X,Y ב"ת.

צימוד בין התפלגויות: יהיו $\mu_1,\mu_2:[0,1]^S$ התפלגויות אזי התפלגות $\mu:[0,1]^{S^2}$ המקיימת $\mu_1(\omega)=\sum_{s\in S}\mu(\omega,s)$ וכן $\mu_2(\omega)=\sum_{s\in S}\mu(s,\omega)$.
צימוד בין משתנים: יהיו X,Y מ"מ אזי זוג מ"מ (X',Y') המקיים $(X'\sim X)\wedge(Y'\sim Y)$.
טענה: יהי X מ"מ על Ω_1 ויהי Y מ"מ על Ω_2 נגדיר X',Y' מ"מ ב"ת על $\Omega_1\otimes\Omega_2$ כך $X'(\omega_1,\omega_2)=X(\omega_1)$ וכן $Y'(\omega_1,\omega_2)=Y(\omega_2)$ אזי (X',Y') צימוד של X,Y.
התפלגות שולטת סטוכסטית: יהי X מ"מ אזי מ"מ Y המקיים $\mathbb{P}(X>t)\ge\mathbb{P}(Y>t)$.
צימוד מונוטוני: יהיו X,Y מ"מ אזי צימוד (X',Y') המקיים $\mathbb{P}(Y'>X')=0$.
טענה: יהי X מ"מ בעל התפלגות שולטת סטוכסטית בהתפלגות Y אזי קיים צימוד מונוטוני.
מטריקת ההשתנות הכוללת: תהא $|S|\le\aleph_0$ ויהיו $\mu,\upsilon:[0,1]^S$ התפלגויות אזי $\delta(\mu,\upsilon)=\sum_{x\in S}|\mu(x)-\upsilon(x)|$.
למה: מטריקת ההשתנות הכוללת הינה מטריקה.
סימון: יהיו X,Y מ"מ אזי $\delta(X,Y)=\delta(\mu_X,\mu_Y)$.
טענה: יהיו X,Y מ"מ אזי $\delta(X,Y)=2\sup_{E\subseteq S}|\mathbb{P}(X\in E)-\mathbb{P}(Y\in E)|$.
טענה: יהיו X,Y מ"מ ויהי (X',Y') צימוד אזי $\delta(X,Y)=\delta(X',Y')\le2\mathbb{P}(X'\ne Y')$.
מסקנה: יהיו $X_1\dots X_{2n}$ מ"מ אזי $\delta\left(\sum_{i=1}^nX_i,\sum_{i=n+1}^{2n}X_i\right)\le2\sum_{i=1}^n\mathbb{P}(X_i\ne Y_i)$.
חוק המספרים הקטנים: יהיו $\{X_i\sim\text{Ber}(p_i)\}_{i=1}^n$ מ"מ ויהי $T\sim\text{Pois}\left(\sum_{i=1}^np_i\right)$ אזי $\delta\left(\sum_{i=1}^nX_i,T\right)\le2\sum_{i=1}^np_i^2$.
חציון של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $m\in\text{supp}(X)$ המקיים $\left(\mathbb{P}(X\ge m)\ge\frac12\right)\wedge\left(\mathbb{P}(X\le m)\ge\frac12\right)$.
משתנה בעל תוחלת: X מ"מ עבורו $\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\mathbb{P}(\omega)$ מתכנס בהחלט.
טענה: יהי X משתנה על מ"ה סופי אזי X בעל תוחלת.
תוחלת: יהי X מ"מ בעל תוחלת אזי $\mathbb{E}[X]=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\mathbb{P}(\omega)$.
למה: יהיו X,Y מ"מ ויהי $c\in\mathbb{R}$ אזי

- הומוגניות: $\mathbb{E}\left[cX\right]=c\mathbb{E}\left[X\right]$.
- חיבוריות: $\mathbb{E}\left[X+Y\right]=\mathbb{E}\left[X\right]+\mathbb{E}\left[Y\right]$.
- מונוטוניות: $(X\le Y)\Longrightarrow(\mathbb{E}\left[X\right]\le\mathbb{E}\left[Y\right])$.

מסקנה: יהיו $X_1\dots X_n$ מ"מ אזי $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[X_i\right]$.

משפט: יהי X מ"מ אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\sum_{s\in\text{supp}(X)}s\cdot\mu_X\left(s\right)$.

טענה: יהי X מ"מ אזי

- $(X\sim\text{Uni}\left(0,\dots,n\right))\Longrightarrow\left(\mathbb{E}\left[X\right]=\frac{n}{2}\right)$.
- $(X\sim\text{Ber}\left(p\right))\Longrightarrow\left(\mathbb{E}\left[X\right]=p\right)$.
- $(X\sim\text{Bin}\left(n,p\right))\Longrightarrow\left(\mathbb{E}\left[X\right]=np\right)$.
- $(X\sim\text{Geo}\left(p\right))\Longrightarrow\left(\mathbb{E}\left[X\right]=\frac{1}{p}\right)$.
- $(X\sim\text{HG}\left(n,m,r\right))\Longrightarrow\left(\mathbb{E}\left[X\right]=\frac{nr}{m}\right)$.
- $(X\sim\text{Pois}\left(\lambda\right))\Longrightarrow\left(\mathbb{E}\left[X\right]=\lambda\right)$.

משפט: יהי X מ"מ ותהא f טרנספורמציה אזי $\mathbb{E}\left[f\left(X\right)\right]=\sum_{s\in\text{supp}(X)}f\left(s\right)\mu_X\left(s\right)$.

נוסחאת הזנב: יהי X מ"מ עבורו $\text{supp}\left(X\right)=\mathbb{N}$ אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(X\ge n\right)$.

משפט: יהיו X,Y מ"מ ב"ת אזי $\mathbb{E}\left[XY\right]=\mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right]$.

תוחלת מותנית: יהי X מ"מ ויהי A מאורע אזי $\mathbb{E}\left[X\mid A\right]=\sum_{\omega\in\Omega}X\left(\omega\right)\mathbb{P}\left(\omega\mid A\right)$.

טענה: יהי X מ"מ ויהי A מאורע אזי $\mathbb{E}\left[X\mid A\right]=\frac{\mathbb{E}\left[X\cdot\mathbb{1}_A\right]}{\mathbb{P}(A)}$.

מסקנה: יהיו $X,\mathbb{1}_A$ מ"מ ב"ת אזי $\mathbb{E}\left[X\mid A\right]=\mathbb{E}\left[X\right]$.

נוסחאת התוחלת השלמה: יהי X מ"מ ויהי A מאורע אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\mathbb{E}\left[X\mid A\right]\mathbb{P}\left(A\right)+\mathbb{E}\left[X\mid A^{\mathcal{C}}\right]\mathbb{P}\left(A^{\mathcal{C}}\right)$.

הכללה: יהיו $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ המקיימות $\biguplus_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$ ויהי X מ"מ אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[X\mid A_i\right]\mathbb{P}\left(A_i\right)$.

תוחלת של משתנה מותנה במשתנה: יהיו X,Y מ"מ אזי $\mathbb{E}\left[X\mid Y\right](\omega)=\mathbb{E}\left[X\mid Y=Y\left(\omega\right)\right]$.

משפט/נוסחאת ההחלקה: יהיו X,Y מ"מ אזי $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X\mid Y\right]\right]=\mathbb{E}\left[X\right]$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ ותהא g טרנספורמציה אזי $\mathbb{E}\left[X\cdot g\left(Y\right)\mid Y\right]=g\left(Y\right)\cdot\mathbb{E}\left[X\mid Y\right]$.

משתנה בעל מומנט k: מ"מ X המקיים $\mathbb{E}\left[\left|X\right|^k\right]<\infty$.

סימון: יהי X משתנה בעל מומנט k אזי $X\in\ell^k$.

מומנט k: יהי $X\in\ell^k$ אזי $\mathbb{E}\left[X^k\right]$.

טענה: יהיו $m<k\in\mathbb{N}$ אזי $\ell^k\subseteq\ell^m$.

אי שיוויון קושי שוורץ: יהיו $X,Y\in\ell^2$ אזי $\left|\mathbb{E}\left[XY\right]\right|\le\sqrt{\mathbb{E}\left[X^2\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[Y^2\right]}$.

מסקנה: יהי $X\in\ell^2$ אזי $\mathbb{E}\left[X\right]^2\le\mathbb{E}\left[X^2\right]$.

שונות: יהי $X\in\ell^2$ אזי $\text{Var}\left[X\right]=\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2\right]$.

טענה: יהי $X\in\ell^2$ אזי $\text{Var}\left[X\right]=\mathbb{E}\left[X^2\right]-\mathbb{E}\left[X\right]^2$.

סטיית תקן: יהי $X\in\ell^2$ אזי $\sigma_X=\sqrt{\text{Var}\left[X\right]}$.

משתנה דטרמיניסטי: מ"מ X המקיים $\exists c.\mathbb{P}\left(X=c\right)=1$.

למה: יהי $X\in\ell^2$ ויהי a סקלר אזי

- $\text{Var}\left[X\right]\ge0$.
- (X דטרמיניסטי)$\Longleftrightarrow(\text{Var}\left[X\right]=0)$.
- $\text{Var}\left[aX\right]=a^2\text{Var}\left[X\right]$.
- $\text{Var}\left[X+a\right]=\text{Var}\left[X\right]$

פונקציית הפסד: יהי $X\in\ell^2$ אזי $\mathbb{E}\left[\left(X-a\right)^2\right]$.

משפט: יהי $X\in\ell^2$ אזי המינימום של פונקציית ההפסד מתקבלת בערך $\mathbb{E}\left[X\right]$.

חציון: יהי X מ"מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה $\mathbb{E}\left[\left|X-a\right|\right]$.

סימון: יהי X מ"מ אזי החציון הוא $\text{Median}\left(X\right)$.

ערך אמצעי/Mid Range: יהי X מ"מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה $\max\left|X-a\right|$.

סימון: יהי X מ"מ אזי הערך האמצעי הוא $\text{MR}\left(X\right)$.

שכיח: יהי X מ"מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה $\mathbb{P}\left(X\neq a\right)$.

סימון: יהי X מ"מ אזי השכיח הוא $\text{Mode}\left(X\right)$.

שונות משותפת: יהיו X,Y מ"מ אזי $\text{Cov}\left[X,Y\right]=\mathbb{E}\left[XY\right]-\mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right]$.

משפט: $\text{Var}\left[X+Y\right]=\text{Var}\left[X\right]+2\text{Cov}\left[X,Y\right]+\text{Var}\left[Y\right]$.

טענה: $\text{Cov}\left[X,Y\right]=\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}\left[X\right]\right)\left(Y-\mathbb{E}\left[Y\right]\right)\right]$.

משתנים בלתי מתואמים: X,Y המקיימים $\text{Cov}\left[X,Y\right]=0$.

משפט: יהיו X,Y ב"ת אזי X,Y בלתי מתואמים.

מסקנה: יהיו X,Y בלתי מתואמים אזי $\text{Var}\left[X+Y\right]=\text{Var}\left[X\right]+\text{Var}\left[Y\right]$.

למה: יהיו X,Y,Z מ"מ ויהיו α,β סקלרים אזי

- $\text{Cov}\left[X,X\right]=\text{Var}\left[X\right]$.
- סימטריות: $\text{Cov}\left[X,Y\right]=\text{Cov}\left[Y,X\right]$.
- בי־לינאריות: $\text{Cov}\left[\alpha X+\beta Y,Z\right]=\alpha\text{Cov}\left[X,Z\right]+\beta\text{Cov}\left[Y,Z\right]$.
- אינווריאנטיות להוספת סקלר: $\text{Cov}\left[X+\alpha,Y\right]=\text{Cov}\left[X,Y\right]$.
- $\left|\text{Cov}\left[X,Y\right]\right|\le\sqrt{\text{Var}\left[X\right]}\sqrt{\text{Var}\left[Y\right]}$.

מקדם המתאם: יהיו X,Y מ"מ אזי $\rho_{X,Y}=\frac{\text{Cov}\left[X,Y\right]}{\sqrt{\text{Var}\left[X\right]}\sqrt{\text{Var}\left[Y\right]}}$.

למה: יהיו X,Y מ"מ ויהיו a,b סקלרים אזי

- $\left|\rho_{X,Y}\right|\le1$.
- (X,Y בלתי מתואמים)$\iff\left(\rho_{X,Y}=0\right)$.
- $\left(\rho_{X,Y}=\pm1\right)\iff\left(Y=aX+b\right)$.

למה: יהי X מ"מ אזי

- $X\sim\text{Uni}\left(\left[n\right]\right)$ אזי $\text{Var}\left[X\right]=\frac{n^{2}-1}{12}$.
- $X\sim\text{Bin}\left(n,p\right)$ אזי $\text{Var}\left(X\right)=np\left(1-p\right)$.
- $X\sim\text{Pois}\left(\lambda\right)$ אזי $\text{Var}\left(X\right)=\lambda$.
- $X\sim\text{Geo}\left(p\right)$ אזי $\text{Var}\left(X\right)=\frac{1-p}{p^{2}}$.

פונקציה יוצרת: יהי X מ"מ עבורו $\text{supp}\left(X\right)=\mathbb{N}$ אזי $g_{X}\left(t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_{X}\left(n\right)t^{n}$.

טענה: יהי X מ"מ בעל פונקציה יוצרת אזי

- $g_{X}\left(t\right)$ מתכנס עבור $\left|t\right|\le1$.
- $g_{X}\in C^{\infty}\left(\left(-1,1\right)\right)$.
- יהי $t\in\left[-1,1\right]$ אזי t^{X} מ"מ בעל תוחלת.

משפט: יהי X מ"מ בעל פונקציה יוצרת אזי $g_{X}\left(t\right)=\mathbb{E}\left[t^{X}\right]$.

למה: יהיו X,Y מ"מ ב"ת בעלי פונקציה יוצרת אזי

- $\mu_{X}\left(n\right)=\frac{g_{X}^{\left(n\right)}\left(0\right)}{n!}$.
- $g_{X+Y}=g_{X}\cdot g_{Y}$.
- $\lim_{t\to1^{-}}g_{X}\left(t\right)=g_{X}\left(1\right)=1$.
- נניח כי X בעל מומנט k אזי $\lim_{t\to1^{-}}g_{X}^{\left(k\right)}\left(t\right)=\mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{k-1}\left(X-i\right)\right]$.

מסקנה: יהי $X\in\ell^{2}$ בעל פונקציה יוצרת אזי

- $\mathbb{E}\left[X\right]=\lim_{t\to1^{-}}g_{X}'\left(t\right)$.
- $\text{Var}\left[X\right]=\lim_{t\to1^{-}}\left(g_{X}''\left(t\right)+g_{X}'\left(t\right)-\left(g_{X}'\left(t\right)\right)^{2}\right)$.

פונקציה יוצרת מומנטים: יהי X מ"מ אזי $M_{X}\left(t\right)=\mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$.

טענה: יהי $X\sim\text{Bin}\left(n,p\right)$ אזי $M_{X}\left(t\right)=\left(1-p+pe^{t}\right)^{n}$.

למה: יהיו X,Y מ"מ ב"ת אזי

- $M_{X+Y}=M_{X}\cdot M_{Y}$.
- יהי I קטע עבורו $0\in I$ וכן $M_{X}\in C^{n}\left(I\right)$ אזי $M_{X}^{\left(n\right)}\left(0\right)=\mathbb{E}\left[X^{n}\right]$.

מסקנה: יהי I קטע עבורו $0\in I$ וכן $M_{X}\in C^{\infty}\left(I\right)$ אזי $M_{X}\left(t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbb{E}\left[X^{n}\right]}{n!}t^{n}$.

אי־שוויון מרקוב: יהי X מ"מ אי שלילי ויהי $a>0$ אזי $\mathbb{P}\left(X\ge a\right)\le\frac{\mathbb{E}\left[X\right]}{a}$.

מסקנה: תהא $f\in\left[0,\infty\right)^{\mathbb{R}}$ עולה ויהי X מ"מ עבורו $f\left(X\right)$ בעל תוחלת אזי $\mathbb{P}\left(X\ge t\right)\le\frac{\mathbb{E}\left[f\left(X\right)\right]}{f\left(t\right)}$.

אי־שוויון צ'בישב: יהי $X\in\ell^2$ ויהי $b>0$ אזי $\mathbb{P}\left(\left|X-\mathbb{E}\left[X\right]\right|\geq b\right)\leq\frac{\text{Var}[X]}{b^2}$.

סימון: יהיו $X_1\dots X_n$ מ"מ אזי $\mu=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right]$.

טענה: יהיו $X_1\sim\dots\sim X_n$ מ"מ בלתי מתואמים בזוגות עם תוחלת משותפת μ אזי $\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i-n\mu\right|\geq b\right)\leq\frac{n\sigma_1^2}{b^2}$.

אי־שוויון צ'רנוף: יהיו $\left\{X_i\sim\text{Ber}\left(p_i\right)\right\}_{i=1}^n$ אזי $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i\geq\left(1+t\right)\mu\right)\leq\exp\left(-\frac{t^2}{2+t}\mu\right)$.

הכללה: יהי X מ"מ ויהי $s\in\mathbb{R}$ אזי $\mathbb{P}\left(X\geq a\right)\leq\frac{M_X(s)}{e^{sa}}$.

פונקציה קמורה: יהי I קטע אזי $\varphi\in\mathbb{R}^I$ עבורה $\forall x,y\in I.\forall\lambda\in[0,1].\varphi\left(\lambda x+\left(1-\lambda\right)y\right)\leq\lambda\varphi\left(x\right)+\left(1-\lambda\right)\varphi\left(y\right)$.

טענה: תהא $\varphi\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קמורה ויהיו $x<y<z$ אזי $\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}\leq\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}$.

מסקנה: תהא $\varphi\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קמורה אזי $\varphi\in C\left(\left(a,b\right)\right)$.

למה: תהא $\varphi\in\mathbb{R}^I$ קמורה ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ אזי קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ עבורם $\left(\varphi\left(x_0\right)=ax_0+b\right)\wedge\left(\forall x\in I.\varphi\left(x\right)\geq ax+b\right)$.

אי־שוויון ינסן: יהי X מ"מ בעל תוחלת ותהא $\varphi\in\mathbb{R}^I$ קמורה עבורה $\varphi\left(X\right)$ בעל תוחלת אזי $\varphi\left(\mathbb{E}\left[X\right]\right)\leq\mathbb{E}\left[\varphi\left(X\right)\right]$.

אי־שוויון הממוצעים: יהיו $a_1\dots a_n>0$ אזי $\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}\geq\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$.

אי־שיוויון המשולש: יהי X מ"מ אזי $\left|\mathbb{E}\left[X\right]\right|\leq\mathbb{E}\left[\left|X\right|\right]$.

החוק החלש של המספרים הגדולים: יהיו $\left\{X_i\right\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת שקולי התפלגות עם תוחלת μ אזי $\forall\delta>0.\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}-\mu\right|\geq\delta\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

החוק החלש של המספרים הגדולים: יהי $X\in\ell^1$ מ"מ עם תוחלת μ אזי לכל $\varepsilon,\delta>0$ קיים $N_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N_0$ ולכל $\left\{X_i\sim X\right\}_{i=1}^n$ מ"מ בלתי מתואמים מתקיים $\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}-\mu\right|\geq\delta\right)<\varepsilon$.

מסקנה: יהי $X\sim\text{Bin}\left(n,p\right)$ ויהי $\delta>0$ אזי $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<\delta\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}1$.

למה: יהי $x\in[0,1]$ יהי $X\sim\text{Bin}\left(n,p\right)$ ויהי $\delta>0$ אזי $\sup_{x\in[0,1]}\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|\geq\delta\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

פולינום ברנשטיין: יהיו $k<n\in\mathbb{N}$ אזי $B_{k,n}\left(x\right)=\binom{n}{k}x^k\left(1-x\right)^{n-k}$.

הגדרה: תהא $f\in C\left(\left[0,1\right]\right)$ אזי $Q_n\left(t\right)=\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}t^k\left(1-t\right)^{n-k}$.

טענה: $Q_n\left(t\right)\in\mathbb{R}_n\left[x\right]$.

משפט: תהא $f\in C\left(\left[0,1\right]\right)$ אזי $\forall\varepsilon>0.\exists n\in\mathbb{N}.\sup_{t\in[0,1]}\left|f\left(t\right)-Q_n\left(t\right)\right|\leq\varepsilon$.

החוק החזק של המספרים הגדולים: יהי $X\in\ell^4$ מ"מ עם תוחלת μ אזי לכל $\varepsilon,\delta>0$ קיים $N_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N>N_0$ ולכל $\left\{X_i\sim X\right\}_{i=1}^N$ מ"מ ב"ת מתקיים $\mathbb{P}\left(\max_{n\in\{N_0\dots N\}}\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}-\mu\right|\geq\delta\right)<\varepsilon$.

פונקציית צפיפות רציפה: $f:I\to[0,1]$ רציפה המקיימת $\int_I f\left(x\right)dx=1$.

הסתברות רציפה: תהא $f:I\to[0,1]$ פונקציית צפיפות ותהא $[a,b]\subseteq I$ אזי $\mathbb{P}\left(\left[a,b\right]\right)=\int_a^b f\left(x\right)dx$.

משנה מקרי רציף: מ"מ X עבורו קיימת פונקצית צפיפות $f:\mathbb{R}\to[0,1]$ עבורה $\forall E\subseteq\mathbb{R}.\mathbb{P}\left(X\in E\right)=\int_E f\left(x\right)dx$.

פונקציית ההתפלגות המצטברת: יהי X מ"מ רציף אזי $F\left(t\right)=\mathbb{P}\left(X\leq t\right)=\int_{-\infty}^t f\left(x\right)dx$.

מסקנה: יהי X מ"מ רציף אזי $\mathbb{P}\left(a\leq X\leq b\right)=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

משתנה מקרי אחיד רציף: מ"מ רציף $X:I\to\mathbb{R}$ עבורו $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{|I|} & x\in I\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

תוחלת רציפה: יהי X מ"מ רציף אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\int_{\mathbb{R}}xf\left(x\right)dx$.

מומנט רציף: יהי X מ"מ רציף אזי $\mathbb{E}\left[X^p\right]=\int_{\mathbb{R}}x^pf\left(x\right)dx$.

התפלגות נורמלית: יהיו $\sigma^2,\mu\in\mathbb{R}$ אזי $f\in[0,1]^{\mathbb{R}}$ המקיימת $f\left(x\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

סימון: יהי Z מ"מ רציף עבורו $f\left(x\right)$ מתפלג נורמלית אזי $Z\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$.

גאוסיאן: $\phi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

טענה: יהי Z מ"מ רציף עם פונקציית צפיפות $\phi\left(x\right)$ אזי $Z\sim N\left(0,1\right)$.

הגדרה: יהי $Z\sim N\left(0,1\right)$ מ"מ רציף אזי $\Phi\left(x\right)=\mathbb{P}\left(Z\leq x\right)=\int_{-\infty}^x\phi\left(t\right)dt$.

טענה: יהי $t\in\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\lim_{x\to\infty}\Phi\left(x\right)=1\right)\wedge\left(\lim_{x\to-\infty}\Phi\left(x\right)=0\right)$.
- $\left(\Phi\in C\left(\mathbb{R}\right)\right)\wedge\left(\Phi>0\right)\wedge$($\Phi$ עולה ממש).
- $\Phi\left(t\right)=1-\Phi\left(-t\right)$.

הגדרה: $\left(\Phi\left(\infty\right)=1\right)\wedge\left(\Phi\left(-\infty\right)=0\right)$.

מסקנה: יהי $Z\sim N\left(0,1\right)$ מ"מ רציף אזי $\mathbb{P}\left(a\leq Z\leq b\right)=\Phi\left(b\right)-\Phi\left(a\right)=\int_a^b\phi\left(t\right)dt$.

משתנה מתוקנן: $X\in\ell^2$ המקיים $(\text{Var}[X]=1)\wedge(\mathbb{E}[X]=0)$.
תקנון: יהי $X\in\ell^2$ אזי $\widehat{X}=\frac{X-\mathbb{E}[X]}{\sigma}$.
טענה: יהי $X\in\ell^2$ אזי $\widehat{X}$ מתוקנן.
למה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}(x)\,dx=\frac{\pi}{4^n}\binom{2n}{n}\right)\wedge\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\right)$.
טענה: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{4^n}\binom{2n}{n}}{\frac{2}{2n+1}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}}=1$.
משפט דה־מואבר לפלס: יהיו $a\le b$ ויהי $\{S_N\sim\text{Bin}(N,p)\}_{N=1}^{\infty}$ אזי $\mathbb{P}\left(a\le\widehat{S_N}\le b\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}\Phi(b)-\Phi(a)$.
טענה: תהא $f\in C(\mathbb{R})$ חסומה יהיו $a\le b$ ויהי $\{S_N\sim\text{Bin}(N,p)\}_{N=1}^{\infty}$ אזי $\mathbb{P}\left(f\left(\frac{S_N-Np}{p\sqrt{N}}\right)\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}\int_a^b f(t)\,\phi(t)\,dt$.
הגדרה: תהא $f\in C(\mathbb{R})$ חסומה אזי $\|f\|=\max_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$.
למה: תהא $f\in C^3(\mathbb{R})$ יהי X מ"מ ויהי $Z\sim 2\text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)-1$ אזי
$\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{X}{\sqrt{N}}\right)\right]-\mathbb{E}\left[f\left(\frac{Z}{\sqrt{N}}\right)\right]\right|\le\frac{1}{6N^{\frac{3}{2}}}\left\|f^{(3)}\right\|\left(1+\mathbb{E}\left[|X-\mathbb{E}[X]|^3\right]\right)$.
הגדרה: נגדיר $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך $\psi(x)=\begin{cases}1 & x\ge0\\ 1+x-\frac{2\sin(2\pi x)}{3\pi}+\frac{\sin(4\pi x)}{12\pi} & -1\le x\le0\\ 0 & x\le-1\end{cases}$.
טענה: $\left(\psi\in C^3(\mathbb{R})\right)\wedge$($\psi$ חסומה).
הגדרה: יהי $\varepsilon>0$ ויהיו $a\le b$ אזי $I_{a,b,\varepsilon}(x)=\psi\left(\frac{b-x}{\varepsilon}\right)\psi\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right)$.
טענה: יהי $\varepsilon>0$ ויהיו $a\le b$ אזי $\left(I_{a,b,\varepsilon}\in C^3(\mathbb{R})\right)\wedge$($I_{a,b,\varepsilon}$ חסומה).
למה: קיים $B>0$ עבורו לכל $a\le b$ ולכל $\varepsilon>0$ מתקיים $\left\|I_{a,b,\varepsilon}^{(3)}\right\|\le\frac{B}{\varepsilon^3}$.
מסקנה: יהיו $a\le b$ ויהי $0<\varepsilon<\frac{b-a}{2}$ אזי $\mathbb{1}_{[a+\varepsilon,b-\varepsilon]}\le I_{a+\varepsilon,b-\varepsilon,\varepsilon}\le\mathbb{1}_{[a,b]}\le I_{a,b,\varepsilon}\le\mathbb{1}_{[a-\varepsilon,b+\varepsilon]}$.
משפט הגבול המרכזי: יהיו $a\le b$ נניח כי לכל $N\in\mathbb{N}$ יהיו $X_1\sim\ldots\sim X_N$ מ"מ ב"ת עם תוחלת משותפת אזי
$\mathbb{P}\left(a\le\widehat{\sum_{i=1}^{N}X_i}\le b\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}\Phi(b)-\Phi(a)$.
מרחב מצבים: קבוצה S.
מטריצת מצבים: $\mathcal{P}:S^2\to[0,1]$ המקיימת $\forall x\in S.\sum_{y\in S}\mathcal{P}(x,y)=1$.
שרשרת מרקוב הומוגנית בזמן ובעלת מרחב מצבים סופי: מ"מ $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ ומטריצת מצבים $\mathcal{P}$ עבורם
$\mathbb{P}(X_0=s_0\ldots X_n=s_n)=\mu_{X_0}(s_0)\prod_{i=0}^{n-1}\mathcal{P}(s_i,s_{i+1})$.
טענה: תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי $\mathbb{P}(X_{n+1}=s_{n+1}\mid X_n=s_n\ldots X_0=s_0)=\mathcal{P}(s_n,s_{n+1})$.
הערה: נתייחס אל התפלגות μ_X כאל וקטור שורה כך $(\mu_X)_i=\mathbb{P}(X=i-1)$.
משפט: תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי $\mu_{X_k}=\mu_{X_0}\cdot\mathcal{P}^k$.
טענה: תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי $\mathbb{P}(X_n=y\mid X_k=x)=\mathcal{P}^{n-k}(x,y)$.
התפלגות סטציונרית/עמידה: התפלגות π על S המקיימת $\pi\cdot\mathcal{P}=\pi$.
וקטור עצמי שמאלי: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $v\in M_{1,n}(\mathbb{F})$ המקיים $v\cdot A=\alpha v$.
טענה: תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי $\left(\mu_{X_0}\mathcal{P}^n\to\pi\right)\Longleftarrow$($\pi$ התפלגות סטציונרית).
משפט: תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי קיימת התפלגות סטציונרית π.
סימון: יהיו $x,y\in S$ עבורם $\exists n\in\mathbb{N}_+.\mathcal{P}^n(x,y)>0$ אזי $x\to y$.
מטריצת מעברים אי פריקה: שרשרת עבורה $\forall x,y\in S.x\to y$.
למה: תהא $\mathcal{P}$ מטריצת מעברים אי פריקה ותהא π התפלגות סטציונרית אזי $\forall x\in S.\pi(x)>0$.
משפט: תהא $\mathcal{P}$ מטריצת מעברים אי פריקה אזי קיימת התפלגות סטציונרית יחידה π.
משפט התכנסות ממוצעים: תהא $\mathcal{P}$ מטריצת מעברים בעלת התפלגות סטציונרית יחידה π אזי $\pi\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu_{X_0}\cdot\mathcal{P}^k$.
הערה: נתייחס אל טרנספורמציה f כאל וקטור עמודה כך $(f)_i=f(i)$.
משפט: תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בעלת התפלגות סטציונרית יחידה π ותהא f טרנספורמציה אזי
$\pi\cdot f\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(X_k)\right]$.
מחזור: יהי $x\in S$ אזי $\gcd\left(\{n\in\mathbb{N}_+\mid\mathcal{P}^n(x,x)>0\}\right)$.
מצב חסר מחזור: $x\in S$ אשר מחזורו 1.
שרשרת חסרת מחזור: שרשרת $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ עבורה כל מצב חסר מחזור.
המשפט הארגודי לשרשראות מרקוב: תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת אי פריקה וחסרת מחזור אזי $\pi\xrightarrow[n\to\infty]{}\mu_{X_0}\cdot\mathcal{P}^n$.

זמן החזרה: יהי $x \in S$ אזי T_x מ"מ הזמן הראשון בו חזרנו ל־x בהילוך שמתחיל ב־x.

משפט: תהא שרשרת אי פריקה בעלת התפלגות סטציונרית יחידה π אזי $\mathbb{E}\left[T_x\right] = \frac{1}{\pi(x)}$.

זמן הפגיעה: יהיו $x, y \in S$ אזי $T_{x,y}$ מספר הפעמים שנגיע למצב y בהילוך שמתחיל ב־x עד לחזרה הראשונה אל x.

משפט: תהא שרשרת אי פריקה בעלת התפלגות סטציונרית יחידה π אזי $\mathbb{E}\left[T_{x,y}\right] = \frac{\pi(y)}{\pi(x)}$.