פעולות בינאריות: תהא A קבוצה אזי $A\times A\to A$.

סימון: תהא A קבוצה ותהא $*$ פעולה בינארית על A אזי $a*b=*\left(a,b\right)$.

חבורה: תהא G קבוצה ותהא $*$ פעולה בינארית אזי $\left(G,*\right)$ עבורה קיים $e\in G$ המקיים
- אסוציאטיביות: לכל $a,b,c\in G$ מתקיים $a*\left(b*c\right)=\left(a*b\right)*c$.
- איבר יחידה: לכל $a\in G$ מתקיים $a*e=e*a=a$.
- איבר הופכי: לכל $a\in G$ קיים $b\in G$ עבורו $a*b=e=b*a$.

הגדרה: תהא X קבוצה אזי $S\left(X\right)=\left\{ f:X\to X\mid \text{הפיכה } f\right\}$.

חבורת התמורות: תהא X קבוצה אזי $\left(S\left(X\right),\circ\right)$.

טענה: תהא X קבוצה אזי חבורת התמורות מעל X הינה חבורה.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $S_{n}=S\left(\left[n\right]\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|S_{n}\right|=n!$.

חבורת המטריצות: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\left(\text{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי חבורת המטריצות בגודל n מעל $\mathbb{F}$ הינה חבורה.

החבורות החיבוריות: תהא $\mathbb{F}\in\left\{ \mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\right\}$ אזי $\left(\mathbb{F},+\right)$.

סימון: תהא $A\subseteq\mathbb{C}$ אזי $A^{*}=A^{\times}=A\backslash\left\{ 0\right\}$.

החבורות הכפליות: תהא $\mathbb{F}^{*}\in\left\{ \mathbb{Q}^{*},\mathbb{R}^{*},\mathbb{C}^{*}\right\}$ אזי $\left(\mathbb{F}^{*},\cdot\right)$.

החבורה הטריוואלית: יהי x אזי $\left(\left\{ x\right\},\text{Id}\right)$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sim_{n}\subseteq\mathbb{Z}^{2}$ המוגדרת $\left(x\sim_{n}y\right)\iff\left(n|\left(x-y\right)\right)$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\mathbb{Z}_{n}={}^{\mathbb{Z}^{2}}/_{\sim_{n}}$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $C_{n}=\mathbb{Z}_{n}$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $+:C_{n}\times C_{n}\to C_{n}$ המוגדרת $\left[x\right]_{\sim_{n}}+\left[y\right]_{\sim_{n}}=\left[x+y\right]_{\sim_{n}}$.

חבורת שאריות החלוקה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(C_{n},+\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי חבורת שאריות החלוקה ב־n הינה חבורה.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|C_{n}\right|=n$.

הערה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי נשכן $\left\{ 0,\ldots,n-1\right\} \hookrightarrow\mathbb{Z}_{n}$ כך $\left(i\%n\right)\mapsto\left[i\right]_{\sim_{n}}$.

חבורה אבלית/חילופית/קומוטטיבית: חבורה $\left(G,*\right)$ עבורה לכל $g,h\in G$ מתקיים $g*h=h*g$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge3}$ אזי $\left(S_{n},\circ\right)$ אינה אבלית.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\left(\text{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)$ אינה אבלית.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\left(C_{n},+\right)$ אבלית.

חבורה סופית: חבורה $\left(G,*\right)$ עבורה $\left|G\right|\in\mathbb{N}$.

חבורה אינסופית: חבורה $\left(G,*\right)$ עבורה $\left|G\right|\ge\aleph_{0}$.

סדר של חבורה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה סופית אזי $\text{ord}\left(G\right)=\left|G\right|$.

סדר של חבורה: תהא G חבורה אינסופית אזי $\text{ord}\left(G\right)=\infty$.

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה אזי $o\left(G\right)=\text{ord}\left(G\right)$.

תת־חבורה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $H\subseteq G$ אזי $\left(H,*\restriction_{H\times H}\right)$ עבורה
- סגירות לכפל: לכל $a,b\in H$ מתקיים $a*b\in H$.
- סגירות להופכי: לכל $a\in H$ מתקיים $a^{-1}\in H$.
- איבר יחידה: יהי e איבר היחידה של G אזי $e\in H$.

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $H\subseteq G$ עבורה $\left(H,*\restriction_{H\times H}\right)$ תת־חבורה אזי $H\le G$.

למה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $H\in\mathcal{P}\left(G\right)\backslash\left\{ \varnothing\right\}$ אזי $(H\le G)\Longleftrightarrow$(לכל $a,b\in H$ מתקיים $a*b^{-1}\in H$).

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהיינה $A,B\subseteq G$ אזי $A*B=\left\{ a*b\mid\left(a\in A\right)\wedge\left(b\in B\right)\right\}$.

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה תהא $H\subseteq G$ ויהי $g\in G$ אזי $g*H=\left\{ g\right\} *H$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(n\mathbb{Z},+\right)\le\left(\mathbb{Z},+\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ ויהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\left(\text{SL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)\le\left(\text{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $R_{n}=\left\{ z\in\mathbb{C}\mid z^{n}=1\right\}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $(R_n,\cdot)\le(\mathbb{C}^*,\cdot)$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה אזי $G\le G$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה אזי $\{e\}\le G$.

הערה: מכאן והלאה כאשר ברור מהי הפעולה של החבורה נסמנה על ידי הקבוצה בלבד.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה אזי קיים ויחיד $e\in G$ עבורו $a*e=e*a=a$ לכל $a\in G$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a\in G$ אזי קיים ויחיד $b\in G$ עבורו $a*b=e=b*a$.

סימון: תהא $(G,*)$ חבורה יהי $a\in G$ ויהי $b\in G$ איבר הופכי ל־a אזי $a^{-1}=b$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ויהיו $a,b\in G$ אזי $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a\in G$ אזי $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$.

מסקנה כלל צמצום משמאל: תהא $(G,*)$ חבורה ויהיו $a,b,c\in G$ עבורם $a*b=a*c$ אזי $b=c$.

מסקנה כלל צמצום מימין: תהא $(G,*)$ חבורה ויהיו $a,b,c\in G$ עבורם $b*a=c*a$ אזי $b=c$.

סימון: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $g\in G$ אזי $g^0=e$.

הגדרה: תהא $(G,*)$ חבורה יהי $n\in\mathbb{N}_+$ ויהי $g\in G$ אזי $g^n=g*g^{n-1}$.

סימון: תהא G חבורה יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $g\in G$ אזי $g^{-n}=(g^n)^{-1}$.

טענה: תהא G חבורה יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $g\in G$ אזי $g^{-n}=\left(g^{-1}\right)^n$.

חבורת המכפלה: תהיינה $(G,*),(H,\otimes)$ חבורות נגדיר $(g,h)\cdot(g',h')=(g*g',h\otimes h')$ לכל $g,g'\in G$ ולכל $h,h'\in H$ אזי $(G\times H,\cdot)$.

טענה: תהיינה $(G,*),(H,\otimes)$ חבורות אזי חבורת המכפלה של G,H הינה חבורה.

טענה: תהיינה $(G,*),(H,\otimes)$ חבורות אזי (חבורת המכפלה של H,G אבלית)$\Longleftrightarrow$(H,G אבליות).

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ותהיינה $H,K\le G$ אזי ($H*K\le G$)$\Longleftrightarrow$($HK=KH$).

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ותהיינה $H,K\le G$ אזי $(H\cup K\le G)\iff((K\subseteq H)\vee(H\subseteq K))$.

הגדרה: תהא X קבוצה ותהא $Y\subseteq X$ אזי $\text{Stab}\left(Y\right)=\{\pi\in S\left(X\right)\mid\forall y\in Y.\pi\left(y\right)=y\}$.

טענה: תהא X קבוצה ותהא $Y\subseteq X$ אזי $\text{Stab}\left(Y\right)\le S\left(X\right)$.

מסקנה: תהא G חבורה תהא I ותהא $\{H_i\}_{I\in I}\subseteq\mathcal{P}\left(G\right)$ באשר $H_i\le G$ לכל $i\in I$ אזי $\bigcap_{i\in I}H_i\le G$.

הגדרה: תהא G חבורה ותהא $X\subseteq G$ אזי $\mathcal{F}\left(X\right)=\{H\le G\mid X\subseteq H\}$.

החבורה שנוצרת על ידי תת־קבוצה: תהא G חבורה ותהא $X\subseteq G$ אזי $\langle X\rangle=\bigcap_{H\in\mathcal{F}(X)}H$.

למה: תהא G חבורה ותהא $X\subseteq G$ אזי $\langle X\rangle\le G$.

טענה מינימליות החבורה הנוצרת: תהא G חבורה תהא $X\subseteq G$ ותהא $H\le G$ עבורה $X\subseteq H$ אזי $\langle X\rangle\subseteq H$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $X\subseteq G$ אזי $\langle X\rangle=\left\{\prod_{i=1}^k x_i^{s_i}\;\middle|\;(k\in\mathbb{N})\wedge\left(x\in X^k\right)\wedge\left(s\in\{\pm1\}^k\right)\right\}$.

קבוצת יוצרים של חבורה: תהא G חבורה אזי $X\subseteq G$ עבורה $\langle X\rangle=G$.

חבורה נוצרת סופית (נ"ס): חבורה G עבורה קיימת קבוצת יוצרים סופית.

חבורה ציקלית: חבורה G עבורה קיים $g\in G$ המקיים $\langle g\rangle=G$.

למה: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ אזי $\langle g\rangle=\left\{g^k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

טענה: תהא G חבורה יהיו $n,m\in\mathbb{Z}$ ויהי $g\in G$ אזי $g^{n+m}=g^n*g^m$.

טענה: תהא G חבורה יהיו $n,m\in\mathbb{Z}$ ויהי $g\in G$ אזי $(g^n)^m=g^{n\cdot m}$.

למה: תהא G חבורה אזי (G ציקלית)$\Longleftrightarrow$(קיים $g\in G$ עבורו $G=\left\{g^k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$).

מסקנה: תהא G חבורה ציקלית אזי G אבלית.

סדר של איבר: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ אזי $\text{ord}\left(g\right)=\text{ord}\left(\langle g\rangle\right)$.

טענה: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ אזי $\text{ord}\left(g\right)=\min\{n\in\mathbb{N}_+\mid g^n=e\}$.

טענה: תהא G חבורה יהי $n\in\mathbb{N}_+$ ויהי $g\in G$ באשר $\text{ord}\left(g\right)<\infty$ אזי $(\text{ord}\left(g\right)|n)\iff(g^n=e)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ ויהי $i\in\mathbb{Z}_n$ אזי ($\langle i\rangle=\mathbb{Z}_n$)$\Longleftrightarrow$($i,n$ זרים).

טענה: תהא G חבורה ציקלית ותהא $H\le G$ אזי H ציקלית.

טענה: $(\mathbb{Q},+)$ אינה נ"ס.

קוסט ימני: תהא G חבורה תהא $H\le G$ ויהי $g\in G$ אזי $H*g$.

קוסט שמאלי: תהא G חבורה תהא $H\le G$ ויהי $g\in G$ אזי $g*H$.

נציג של קוסט ימני: תהא G חבורה ויהי Hg קוסט ימני אזי g.

נציג של קוסט שמאלי: תהא G חבורה ויהי gH קוסט שמאלי אזי g.

מסקנה: תהא G חבורה אבלית תהא $H \leq G$ ויהי $g \in G$ אזי $Hg = gH$.

מסקנה: תהא G חבורה תהא $H \leq G$ ויהי $g \in G$ אזי $(gH)^{-1} = Hg^{-1}$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \leq G$ ויהי $g \in G$ אזי $(g \in H) \Longleftrightarrow (gH = H)$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \leq G$ ויהי $g \in G$ אזי $(g \in H) \Longleftrightarrow (Hg = H)$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $G/H = \{gH \mid g \in G\}$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $H\backslash G = \{Hg \mid g \in G\}$.

משפט: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי G/H חלוקה של G.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \leq G$ ויהיו $g_1, g_2 \in G$ אזי $\left(g_2^{-1} g_1 \in H\right) \Longleftrightarrow (g_1 H = g_2 H)$.

הקוסט הטריוואלית: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי eH.

אינדקס של תת־חבורה בחבורה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $[G : H] = |G/H|$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $[G : H] = |H\backslash G|$.

טענה: תהא G חבורה סופית ותהא $H \leq G$ אזי $\text{ord}(G) = \text{ord}(H) \cdot [G : H]$.

משפט לגראנז': תהא G חבורה סופית ותהא $H \leq G$ אזי $\text{ord}(H) \mid \text{ord}(G)$.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(g) \mid \text{ord}(G)$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \leq G$ ותהא $K \leq H$ אזי $[G : K] = [G : H] \cdot [H : K]$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית באשר $\text{ord}(G) = p$ אזי לכל $g \in G \backslash \{e\}$ מתקיים $G = \langle g \rangle$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית באשר $\text{ord}(G) = p$ אזי G ציקלית.

מסקנה משפט פרמה הקטן: יהי $p \in \mathbb{P}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ באשר $\gcd(n, p) = 1$ אזי $n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

למה: תהא G חבורה ותהיינה $H, K \leq G$ חבורות סופיות אזי $|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$.

טענה: יהיו $p, q \in \mathbb{P}$ באשר $q > p$ ותהא G חבורה באשר $|G| = pq$ אזי לכל $H, K \leq G$ באשר $\text{ord}(H) = p$ וכן $\text{ord}(K) = p$ מתקיים $H = K$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ אזי $\left(S_n/\text{Stab}(1)\right) \cap \left(\text{Stab}(1)\backslash S_n\right) = \{\text{Stab}(1)\}$.

קוסט כפול: תהא G חבורה תהיינה $H, K \leq G$ ויהי $g \in G$ אזי HgK.

טענה: תהא G חבורה ותהיינה $H, K \leq G$ אזי $\{HgK \mid g \in G\}$ חלוקה של G.

הומומורפיזם: תהיינה G, H חבורות אזי $\varphi : G \to H$ המקיימת

- שימור איבר יחידה: $\varphi(e_G) = e_H$.
- שימור כפל: לכל $a, b \in G$ מתקיים $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.
- שימור הופכי: לכל $g \in G$ מתקיים $\varphi\left(g^{-1}\right) = \varphi(g)^{-1}$.

טענה: תהיינה G, H חבורות ותהא $\varphi : G \to H$ אזי (φ הומומורפיזם)$\Longleftrightarrow$(לכל $a, b \in G$ מתקיים $\varphi\left(a \cdot b^{-1}\right) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)^{-1}$).

גרעין של הומומורפיזם: תהיינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם אזי $\ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}$.

למה: תהיינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם אזי

- $\text{Im}(\varphi) \leq H$.
- $\ker(\varphi) \leq G$.
- (φ חח"ע)$\Longleftrightarrow$($\ker(\varphi) = \{e_G\}$).

טענה: תהיינה G, H, K חבורות יהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם ויהי $\psi : H \to K$ הומומורפיזם אזי $\psi \circ \varphi$ הומומורפיזם.

טענה: תהיינה G, H חבורות יהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(\varphi(g)) \mid \text{ord}(g)$.

טענה: תהא G חבורה אזי Id הינו הומומורפיזם.

טענה ההומומורפיזם הטריוויאלי: תהא G חבורה אזי $\varphi : G \to \{e\}$ המוגדרת $\varphi(g) = e$ לכל $g \in G$ הינה הומומורפיזם.

טענה ההומומורפיזם ההכלה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $\text{Id} : H \to G$ הינו הומומורפיזם.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $\det : \text{GL}(V) \to \mathbb{F}^*$ הינו הומומורפיזם.

מטריצת תמורה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\rho : S_n \to \text{GL}_n(\mathbb{R})$ המוגדרת $(\rho(\sigma))_{i,j} = \begin{cases} 1 & j = \sigma(i) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ לכל $i, j \in [n]$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}$ תהא $\sigma \in S_n$ ויהי $v \in \mathbb{R}^n$ אזי $\rho(\sigma) \cdot v = \begin{pmatrix} v_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ v_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\rho:S_n\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ הינה הומומורפיזם.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\sigma\in S_n$ אזי $\det(\rho(\sigma))\in\{\pm1\}$.

סימן של תמורה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\mathrm{sign}:S_n\to\{\pm1\}$ המוגדרת $\mathrm{sign}=\det\circ\rho$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי sign הינה הומומורפיזם.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\sigma\in S_n$ אזי $\mathrm{sign}(\sigma)=\frac{\prod_{i<j}(\sigma(i)-\sigma(j))}{\prod_{i<j}(i-j)}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\sigma\in S_n$ אזי $\mathrm{sign}(\sigma)=(-1)^{\left|\left\{(i,j)\in[n]^2\mid(i<j)\wedge(\sigma(i)>\sigma(j))\right\}\right|}$.

חבורת התמורות הזוגיות: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $A_n=\ker(\mathrm{sign})$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $A_n\le S_n$.

איזומורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם הפיך $\varphi:G\to H$.

סימון: תהיינה G,H חבורות איזומורפיות אזי $G\cong H$.

למה: תהיינה G,H חבורות ויהי $\varphi:G\to H$ איזומורפיזם אזי φ^{-1} איזומורפיזם.

למה: תהיינה G,H,K חבורות יהי $\varphi:G\to H$ איזומורפיזם ויהי $\psi:H\to K$ איזומורפיזם אזי $\psi\circ\varphi$ איזומורפיזם.

טענה: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה של חבורות אזי $\cong$ יחס שקילות על $\mathcal{A}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $C_n\cong R_n$.

טענה: תהיינה G,H חבורות תהא $S\subseteq G$ באשר $\langle S\rangle=G$ ויהיו $\varphi,\psi:G\to H$ הומומורפיזמים באשר $\varphi_{\restriction S}=\psi_{\restriction S}$ אזי $\varphi=\psi$.

מונומורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם חח"ע $\varphi:G\to H$.

אפימורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם על $\varphi:G\to H$.

אוטומורפיזם: תהא G חבורה אזי איזומורפיזם $\varphi:G\to G$.

סימון: תהא G חבורה אזי $\mathrm{Aut}(G)=\{\varphi:G\to G\mid \text{אוטומורפיזם } \varphi\}$.

טענה: תהא G חבורה אזי $(\mathrm{Aut}(G),\circ)$ חבורה.

חבורת קליין: $K=C_2\times C_2$.

טענה: חבורת קליין הינה אבלית.

טענה: חבורת קליין אינה ציקלית.

טענה: חבורת קליין אינה איזומורפית ל־C_4.

פונקציית הצמדה: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ אזי $c_g:G\to G$ המוגדרת $c_g(x)=gxg^{-1}$ לכל $x\in G$.

טענה: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ אזי c_g אוטומורפיזם.

אוטומורפיזם פנימי: תהא G חבורה אזי אוטומורפיזם $\varphi:G\to G$ עבורו קיים $g\in G$ המקיים $\varphi=c_g$.

סימון: תהא G חבורה אזי $\mathrm{Inn}(G)=\{c_g\mid g\in G\}$.

תת־חבורה נורמלית: תהא G חבורה אזי $H\le G$ עבורה לכל $g\in G$ מתקיים $c_g(H)=H$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $H\le G$ נורמלית אזי $H\trianglelefteq G$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H\le G$ התב"ש
- $H\trianglelefteq G$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $g^{-1}Hg=H$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $gHg^{-1}=H$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $gH=Hg$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $g^{-1}Hg\subseteq H$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $H\subseteq g^{-1}Hg$.
- $G/H={}_H\backslash G$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H\le G$ באשר $[G:H]=2$ אזי $H\trianglelefteq G$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathrm{Inn}(G)\trianglelefteq\mathrm{Aut}(G)$.

תת־חבורה אופיינית: תהא G חבורה אזי $K\le G$ עבורה לכל $\varphi\in\mathrm{Aut}(G)$ מתקיים $\varphi(K)=K$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $K\le G$ אופיינית אזי $K\ \mathrm{char}\ G$.

מסקנה: תהא G חבורה ותהא $K\ \mathrm{char}\ G$ אזי $K\trianglelefteq G$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H\trianglelefteq G$ ותהא $K\ \mathrm{char}\ H$ אזי $K\trianglelefteq G$.

מרכז של חבורה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}(G)=\{g\in G\mid\forall h\in G.gh=hg\}$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}(G) \trianglelefteq G$.

חבורת הייזנברג: יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי אזי $\mathcal{H}(\mathbb{F}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{smallmatrix} \right) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{F} \right\}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי אזי $\mathcal{H}(\mathbb{F})$ חבורה.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי אזי $\mathcal{Z}(\mathcal{H}(\mathbb{F})) \cong (\mathbb{F}, +)$.

למה: תהיינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם אזי $\ker(\varphi) \trianglelefteq G$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $A_n \trianglelefteq S_n$.

חבורה פשוטה: חבורה G עבורה לכל $H \trianglelefteq G$ מתקיים $H \in \{\{e\}, G\}$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי C_p פשוטה.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ אזי $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ פשוטה.

הגדרה: תהא $(G, *)$ חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ נגדיר $* : G/N \times G/N \to G/N$ כך $(gN) * (hN) = (g * h) N$.

חבורת המנה: תהא $(G, *)$ חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי $(G/N, *)$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי חבורת המנה הינה חבורה.

העתקת המנה: תהא G חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי $q : G \to G/N$ המוגדרת $q(g) = gN$.

טענה: תהא G חבורה תהא $N \trianglelefteq G$ ותהא q העתקת המנה אזי

- q הינה הומומורפיזם.
- $\ker(q) = N$.
- q על.

משפט: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $(H \trianglelefteq G) \Longleftrightarrow$(קיים אוטומורפיזם $\varphi : G \to G$ עבורו $H = \ker(\varphi)$).

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.

משפט האיזומורפיזם הראשון/אמי נת'ר: תהיינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם אזי $G/\ker(\varphi) \cong \text{Im}(\varphi)$.

טענה: תהא G חבורה ציקלית אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

- $G \cong \mathbb{Z}$.
- קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו $G \cong \mathbb{Z}_n$.

טענה: תהא G חבורה אזי $|G/\mathcal{Z}(G)| \notin \mathbb{P}$.

טענה מכפלה פנימית: תהא G חבורה ותהיינה $H, K \trianglelefteq G$ באשר $HK = G$ וכן $H \cap K = \{e\}$ אזי $G \cong H \times K$.

מסקנה משפט השאריות הסיני: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ זרים אזי $\mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית תהא $H \leq G$ מאינדקס p ותהא $N \trianglelefteq G$ מאינדקס p באשר $H \neq N$ אזי $G = HN$ וכן $p^2 | \text{ord}(G)$.

חבורת המכפלה החצי ישרה: תהיינה H, K חבורות ויהי $\varphi : K \to \text{Aut}(H)$ הומומורפיזם נגדיר $(h, k) \cdot (h', k') = (h \cdot \varphi(k)(h'), k \cdot k')$ לכל $h, h' \in H$ ולכל $k, k' \in K$ אזי $(H \times K, \cdot)$.

סימון: תהיינה H, K חבורות ויהי $\varphi : K \to \text{Aut}(H)$ אזי חבורת המכפלה החצי ישרה הינה $H \rtimes_\varphi K$.

טענה: תהיינה H, K חבורות ויהי $\varphi : K \to \text{Aut}(H)$ אזי $H \rtimes_\varphi K$ הינה חבורה.

טענה: תהיינה H, K חבורות נגדיר $\varphi : K \to \text{Aut}(H)$ כך $\varphi(k) = \text{Id}_H$ לכל $k \in K$ אזי $H \rtimes_\varphi K \cong H \times K$.

סימון: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\text{Aff}(\mathbb{F}) = \{f : \mathbb{F} \to \mathbb{F} \mid \exists a \in \mathbb{F}^\times (\exists b \in \mathbb{F} (\forall x \in \mathbb{F} (f(x) = ax + b)))\}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $(\text{Aff}(\mathbb{F}), \circ)$ חבורה.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה נגדיר $\varphi : \mathbb{F}^\times \to \text{Aut}(\mathbb{F})$ כך $\varphi(a)(b) = ab$ לכל $a \in \mathbb{F}^\times$ ולכל $b \in \mathbb{F}$ אזי $\text{Aff}(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F} \rtimes_\varphi \mathbb{F}^\times$.

סימון: יהי $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל אזי $\text{Iso}(P) = \{\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid (\text{איזומטריה } \varphi) \wedge (\varphi(P) = P)\}$.

החבורה הדיהדרלית: יהי $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל בעל n קודקודים אזי $D_n = \text{Iso}(P)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $(D_n, \circ)$ חבורה.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $D_n \cong \langle r, s \mid s^2 = e, r^n = e, srs = r^{-1} \rangle$.

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי

- אם $n \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ אזי $\{D_n, \langle sr, r^2 \rangle, \langle s, r^2 \rangle\} \cup \{H \leq \langle r \rangle\}$ הן כל תתי החבורות הנורמליות של D_n.
- אם $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ אזי $\{D_n\} \cup \{H \leq \langle r \rangle\}$ הן כל תתי החבורות הנורמליות של D_n.

טענה: $\mathcal{H}(\mathbb{F}_2) \cong D_4$.

טענה מכפלה חצי ישרה פנימית: תהא G חבורה תהא $K \le G$ תהא $H \trianglelefteq G$ באשר $HK = G$ וכן $H \cap K = \{e\}$ ונגדיר $\varphi : K \to \text{Aut}(H)$ כך $\varphi(k) = c_k$ לכל $k \in K$ אזי $G \cong H \rtimes_\varphi K$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ ונגדיר $\varphi : C_2 \to \text{Aut}(C_n)$ כך $\varphi(k) = c_k$ לכל $k \in K$ אזי $D_n \cong C_n \rtimes_\varphi C_2$.

טענה: $K \trianglelefteq A_4$.

חבורה פתירה: חבורה G עבורה קיים $n \in \mathbb{N}_+$ וקיימות $G_0 \ldots G_n \le G$ המקיימות

- $G_n = G$ וכן $G_0 = \{e\}$.
- $G_{i-1} \trianglelefteq G_i$ לכל $i \in [n]$.
- ${}^{G_i}/_{G_{i-1}}$ אבלית לכל $i \in [n]$.

טענה: תהא G חבורה אבלית אזי G פתירה.

טענה: תהא G חבורה פשוטה באשר G אינה אבלית אזי G אינה פתירה.

משפט: יהי $n \in [4]$ אזי S_n פתירה.

חבורה נילפוטנטית: חבורה G עבורה קיים $n \in \mathbb{N}_+$ וקיימות $G_0 \ldots G_n \le G$ המקיימות

- $G_n = G$ וכן $G_0 = \{e\}$.
- $G_{i-1} \trianglelefteq G$ לכל $i \in [n]$.
- ${}^{G_i}/_{G_{i-1}} \le \mathcal{Z}\left({}^{G}/_{G_{i-1}}\right)$ לכל $i \in [n]$.

טענה: תהא G חבורה נילפוטנטית אזי G פתירה.

משפט האיזומורפיזם השני: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי ${}^{(HN)}/_{N} \cong {}^{H}/_{(H\cap N)}$.

טענה: תהא G חבורה ותהיינה $N, K \trianglelefteq G$ באשר $K \le N$ אזי ${}^{N}/_{K} \trianglelefteq {}^{G}/_{K}$.

משפט האיזומורפיזם השלישי: תהא G חבורה ותהיינה $N, K \trianglelefteq G$ באשר $K \le N$ אזי ${}^{G}/_{N} \cong {}^{(G/K)}/_{(N/K)}$.

משפט ההתאמה: תהא G חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי קיימת $\Phi : \{H \le G \mid N \le H\} \to \{H \mid H \le {}^{G}/_{N}\}$ חח"ע ועל המקיימת

- משמרת נורמליות: לכל $K \trianglelefteq G$ המקיימת $N \le K$ מתקיים $\Phi(K) \trianglelefteq {}^{G}/_{N}$.
- משמרת מנות: לכל $K \trianglelefteq G$ המקיימת $N \le K$ מתקיים ${}^{G}/_{K} \cong {}^{\Phi(G)}/_{\Phi(K)}$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי (N נורמלית מקסימלית)$\Longleftrightarrow$(${}^{G}/_{N}$ פשוטה).

פעולה שמאלית של חבורה על קבוצה: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי פונקציה $f : G \times X \to X$ המקיימת

- לכל $x \in X$ מתקיים $f(e, x) = x$.
- לכל $g, h \in G$ ולכל $x \in X$ מתקיים $f(g \cdot h, x) = f(g, f(h, x))$.

הערה: מכאן והלאה המונח פעולה יתאר פעולה שמאלית בלבד.

סימון: תהא G חבורה תהא X קבוצה ותהא $f : G \times X \to X$ פעולה על G אזי $f(g, x) = g.x$.

סימון: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $\{f : G \times X \to X \mid \text{פעולה } f\} = G \curvearrowright X$.

הפעולה השמאלית: תהא G חבורה נגדיר $f \in G \curvearrowright G$ כך $f(g, x) = gx$ אזי f.

טענה: תהא G חבורה אזי הפעולה השמאלית הינה פעולה.

הפעולה הימנית: תהא G חבורה נגדיר $f \in G \curvearrowright G$ כך $f(g, x) = xg^{-1}$ אזי f.

טענה: תהא G חבורה אזי הפעולה הימנית הינה פעולה.

הערה: מכאן והלאה נאמר כי G פועלת על X ונסמן $g.x$ את הפעולה.

מסלולים: תהא X קבוצה תהא G חבורה תהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ ויהי $x \in X$ אזי $\text{orb}_\alpha(x) = \{g.x \mid g \in G\}$.

סימון: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x \in X$ אזי $o(x) = \text{orb}(x)$.

פעולה טרנזיטיבית: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $f \in G \curvearrowright X$ עבורה קיים $x \in X$ המקיים $o(x) = X$.

מייצב: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x \in X$ אזי $\text{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid g.x = x\}$.

אוסף נקודות השבת: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $g \in G$ אזי $\text{Fix}_X(g) = \{x \in X \mid g.x = x\}$.

טענה: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x \in X$ אזי $\text{Stab}_G(x) \le G$.

פעולה חופשית: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $f \in G \curvearrowright X$ עבורה לכל $x \in X$ מתקיים $\text{Stab}_G(x) = \{e\}$.

למה: תהא G חבורה תהא X קבוצה תהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ ויהי $g \in G$ אזי $\alpha(g) \in S(X)$.

הגדרה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ אזי $\varphi_\alpha : G \to S(X)$ המוגדרת $\varphi_\alpha(g)(x) = \alpha(g, x)$.

טענה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ אזי φ_α הומומורפיזם.

הגדרה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ויהי $\varphi : G \to S(X)$ הומומורפיזם אזי $\alpha_\varphi : G \times X \to X$ המוגדרת $\alpha_\varphi(g, x) = \varphi(g)(x)$.

טענה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ויהי $\varphi: G \to S(X)$ הומומורפיזם אזי α_φ פעולה.

למה מסלול מייצב: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x \in X$ אזי $|o(x)| = [G : \text{Stab}_G(x)]$.

למה של ברנסייד: תהא X קבוצה ותהא G חבורה סופית הפועלת על X אזי $|\{o(x) \mid x \in X\}| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\text{Fix}_X(g)|$.

הפעולה על הקוסטים השמאליים: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי $\alpha \in G \curvearrowright {}^{G}/_{H}$ המוגדרת $\alpha(g, g'H) = gg'H$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי הפעולה על הקוסטים השמאליים הינה פעולה טרנזיטיבית.

פעולות אקוואריאנטיות/שקולות: תהיינה X, Y קבוצות ותהא G חבורה אזי $(\alpha, \beta) \in (G \curvearrowright X) \times (G \curvearrowright Y)$ עבורן קיימת $F: X \to Y$ חח"ע ועל המקיימת $F(\alpha(g,x)) = \beta(g, F(x))$ לכל $g \in G$ ולכל $x \in X$.

טענה: תהא X קבוצה תהא G חבורה תהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ טרנזיטיבית ויהי $x \in X$ עבורו $o(x) = X$ אזי הפעולה על הקוסטים השמאליים של ${}^{G}/_{\text{Stab}_G(x)}$ אקוואריאנטית ל־α.

מסקנה: תהא X קבוצה תהא G חבורה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ טרנזיטיבית אזי קיימת $H \le G$ עבורה הפעולה על הקוסטים השמאליים אקוואריאנטית ל־α.

טענה: תהא X קבוצה ותהא G חבורה הפועלת על X אזי $\{o(x) \mid x \in X\}$ חלוקה של X.

מסקנה: תהא X קבוצה תהא G חבורה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ טרנזיטיבית אזי לכל $x \in X$ מתקיים $o(x) = X$.

סימון: יהי $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל יהיו $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ איזומטריות של $\mathbb{R}^3$ ותהא $p \in \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(P \times \{0\})$ אזי $\text{Poly}(p) = |\{\varphi_i(P \times \{0\}) \mid p \in \varphi_i(P \times \{0\})\}|$.

גוף אפלטוני: קבוצה קמורה לא זניחה $K \subseteq \mathbb{R}^3$ עבורה קיים מצולע משוכלל $P \subseteq \mathbb{R}^2$ וקיימות איזומטריות $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ של $\mathbb{R}^3$ עבורן

- פאות איזומטריות: $\partial K = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(P \times \{0\})$.
- קודקוד משותף זהה כמות: לכל קודקודים $v_1, v_2 \in K$ מתקיים $\text{Poly}(v_1) = \text{Poly}(v_2)$.

מספר פאות של גוף אפלטוני: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $n \in \mathbb{N}$ מינימלי עבורו קיימות איזומטריות $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ של $\mathbb{R}^3$ עבורן $\partial K = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(P \times \{0\})$ באשר $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל.

סימון: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $\text{Iso}(P) = \left\{\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (\text{איזומטריה } \varphi) \wedge (\varphi(K) = K)\right\}$.

סימון: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $\text{Iso}_+(P) = \left\{\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (\text{איזומטריה משמרת אוריינטציה } \varphi) \wedge (\varphi(K) = K)\right\}$.

הגדרה סימון שלפלי: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני בעל $n \in \mathbb{N}$ פאות ויהי $v \in K$ קודקוד אזי $\{n, \text{Poly}(k)\}$.

הערה: סימון שלפלי אינו קבוצה אלא סימון.

דודקהדרון: גוף אפלטוני $K \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל סימון שלפלי $\{5, 3\}$.

טענה: יהי D דודקהדרון אזי $\text{Iso}_+(D) \cong A_5$.

מסקנה: יהי D דודקהדרון אזי $\text{ord}(\text{Iso}_+(D)) = 60$.

משפט קיילי: תהא G חבורה אזי קיימת קבוצה X וקיימת $H \le S(X)$ עבורה $G \cong H$.

מסקנה: תהא G חבורה באשר $\text{ord}(G) = \aleph_0$ אזי קיימת $H \le S(\mathbb{N})$ עבורה $G \cong H$.

משפט קושי: תהא G חבורה סופית ויהי $p \in \mathbb{P}$ עבורו $p|\text{ord}(G)$ אזי קיים $g \in G$ עבורו $\text{ord}(g) = p$.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $p \in \mathbb{P}$ עבורו $p|\text{ord}(G)$ אזי קיימת $H \le G$ ציקלית עבורה $\text{ord}(H) = p$.

טענה: תהא G חבורה באשר $\text{ord}(G) = 6$ אזי $G \cong \mathbb{Z}_6$ או $G \cong S_3$.

פעולת ההצמדה: תהא G חבורה אזי $\alpha \in G \curvearrowright G$ המוגדרת $\alpha(g, h) = c_g(h)$.

סימון: תהא G חבורה ויהיו $h, g \in G$ אזי $h^g = g^{-1}hg$.

טענה: תהא G חבורה ויהיו $g, h, k \in G$ אזי $h^{g \cdot k} = (h^g)^k$.

מחלקת הצמידות: תהא G חבורה ויהי $h \in G$ אזי $[h] = \left\{ghg^{-1} \mid g \in G\right\}$.

טענה: תהא G חבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי $h \in G$ אזי $[h] = o(h)$.

מסקנה: תהא G חבורה אזי $\{[h] \mid h \in G\}$ חלוקה של G.

הממרכז של איבר: תהא G חבורה ויהי $h \in G$ אזי $C_G(h) = \{g \in G \mid gh = hg\}$.

טענה: תהא G חבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי $h \in G$ אזי $C_G(h) = \text{Stab}_G(h)$.

מסקנה: תהא G חבורה ויהי $h \in G$ אזי $C_G(h) \le G$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}(G) = \bigcap_{g \in G} C_G(g)$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}(G)$ אופיינית.

טענה: תהא G חבורה אזי ${}^{G}/_{\mathcal{Z}(G)} \cong \text{Inn}(G)$.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $g \in G$ אזי $|[g]| = [G : C_G(g)]$.

טענה: תהא G חבורה ויהיו g,h,k באשר $k=ghg^{-1}$ אזי $\left|C_G\left(k\right)\right|=\left|C_G\left(h\right)\right|$.

משפט משוואת מחלקות הצמידות: תהא G חבורה סופית ותהא $C\subseteq G$ קבוצת נציגים של $\left\{[h]\mid h\in G\right\}$ אזי $\sum_{g\in C}\frac{1}{\left|C_G(g)\right|}=1$.

טענה: תהא G חבורה סופית אזי $\mathcal{Z}\left(G\right)=\bigcup\left\{[g]\mid\left(g\in G\right)\wedge\left(\left|[g]\right|=1\right)\right\}$.

למה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ תהיינה $\alpha,\beta\in S_n$ באשר $\beta=\left(\begin{smallmatrix}m_{1,1}&\dots&m_{1,\ell_1}\end{smallmatrix}\right)\circ\ldots\circ\left(\begin{smallmatrix}m_{b,1}&\dots&m_{b,\ell_b}\end{smallmatrix}\right)$ פירוק למעגלים זרים אזי $\alpha\beta\alpha^{-1}=\left(\begin{smallmatrix}\alpha(m_{1,1})&\dots&\alpha(m_{1,\ell_1})\end{smallmatrix}\right)\circ\ldots\circ\left(\begin{smallmatrix}\alpha(m_{b,1})&\dots&\alpha(m_{b,\ell_b})\end{smallmatrix}\right)$.

למה: A_5 פשוטה.

למה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq5}$ ותהא $H\trianglelefteq A_n$ עבורה קיים מעגל π בגודל שלוש המקיים $\pi\in H$ אזי $H=A_n$.

למה: A_6 פשוטה.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq5}$ אזי A_n פשוטה ואינה אבלית.

הישר הפרויקטיבי: יהי $\mathbb{F}$ שדה ונגדיר $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{F}^2\backslash\left\{0\right\}\;\middle|\;\exists\lambda\in\mathbb{F}^\times\left(x=\lambda y\right)\right\}$ אזי $\mathbb{FP}=\left(\mathbb{F}^2\backslash\{0\}\right)/R$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}_{\geq2}$ אזי $\mathcal{Z}\left(\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{F}\right)\right)=\left\{\lambda I_n\mid\lambda\in\mathbb{F}^\times\right\}$.

סימון: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}_{\geq2}$ אזי $\mathrm{PGL}_n\left(\mathbb{F}\right)=\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})/\mathcal{Z}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}))$.

חבורת־p: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי חבורה G עבורה קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $|G|=p^n$.

משפט: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורת־p אזי $\mathcal{Z}\left(G\right)\neq\left\{e\right\}$.

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה מסדר p^2 אזי G אבלית.

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורת־p אזי G נילפוטנטית.

תת־חבורת p־סילו: יהי $p\in\mathbb{P}$ ויהיו $m,k\in\mathbb{N}$ באשר $\gcd\left(p,m\right)=1$ ותהא G חבורה באשר $|G|=p^k\cdot m$ אזי $H\leq G$ באשר $|H|=p^k$.

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית ותהא $H\leq G$ אזי (H תת־חבורה־p סילו)$\Longleftrightarrow$(H חבורת־p וכן לכל $K\leq G$ חבורה־p מתקיים $|K|\leq|H|$).

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא G חבורה ותהא $H\leq G$ אזי (H תת־חבורה־p סילו)$\Longleftrightarrow$(H חבורת־p וכן $p\nmid[G:H]$).

סימון: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $\mathrm{Syl}_p\left(G\right)=\left\{H\leq G\mid G\text{ תת־חבורה־}p\text{ סילו של }H\right\}$.

סימון: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p=\left|\mathrm{Syl}_p\left(G\right)\right|$.

למה: יהי $p\in\mathbb{P}$ ויהיו $n,m\in\mathbb{N}_+$ באשר $\gcd\left(p,m\right)=1$ אזי $p\nmid\binom{p^n\cdot m}{p^n}$.

משפט סילו הראשון: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי קיימת $H\leq G$ באשר H תת־חבורה־p סילו של G.

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p\geq1$.

המנרמל של חבורה: תהא G חבורה ותהא $H\leq G$ אזי $N_G\left(H\right)=\left\{g\in G\mid gHg^{-1}=H\right\}$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H\leq G$ אזי $N_G\left(H\right)\leq G$ וכן $H\trianglelefteq N_G\left(H\right)$.

למה: יהי $p\in\mathbb{P}$ ויהיו $m,k\in\mathbb{N}$ באשר $\gcd\left(p,m\right)=1$ תהא G חבורה באשר $|G|=p^k\cdot m$ ותהיינה $H,K\leq G$ חבורות־p־סילו באשר $H\neq K$ אזי $H\nsubseteq N_G\left(K\right)$.

משפט סילו השני: יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית ותהיינה H,K תת־חבורות־p סילו של G אזי קיים $g\in G$ עבורו $gHg^{-1}=K$.

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית ותהא H תת־חבורה־p סילו של G אזי $\left(H\trianglelefteq G\right)\Longleftrightarrow\left(n_p=1\right)$.

קבוצה אינווריאנטית/שמורה לפעולה: תהא X קבוצה ותהא G חבורה הפועלת על X אזי $Y\subseteq X$ עבורה לכל $g\in G$ ולכל $y\in Y$ מתקיים $g.y\in Y$.

טענה: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ותהא $Y\subseteq X$ אזי (Y הינה G־שמורה)$\Longleftrightarrow$(קיימת $\mathcal{O}\subseteq X$ עבורה $Y=\bigcup_{x\in\mathcal{O}}o\left(x\right)$).

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית ונגדיר $\alpha\in G\curvearrowright\mathrm{Syl}_p\left(G\right)$ כך $\alpha\left(g,H\right)=gHg^{-1}$ אזי α טרנזיטיבית.

למה: יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא G חבורה תהא $H\leq G$ תת־חבורת־p סילו תהא $R\subseteq\mathrm{Syl}_p\left(G\right)$ באשר $H\in R$ וכן R הינה H־שמורה אזי $|R|\equiv1\mod p$.

משפט סילו השלישי: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p\equiv1\mod p$.

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ ויהיו $m,k\in\mathbb{N}$ באשר $\gcd\left(p,m\right)=1$ ותהא G חבורה באשר $|G|=p^k\cdot m$ אזי $n_p|m$.

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p|\mathrm{ord}\left(G\right)$.

מסקנה משפטי סילו: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי

1. קיימת $H\leq G$ באשר H תת־חבורה־p סילו של G.
2. תהיינה H,K תת־חבורות־p סילו של G אזי קיים $g\in G$ עבורו $gHg^{-1}=K$.

3. $n_p \equiv 1 \mod p$.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא $H \le S_p$ באשר $|H| = p$ אזי קיים p־מעגל $\pi \in S_p$ עבורו $H = \langle \pi \rangle$.

מסקנה משפט ווילסון: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי $(p-1)! \equiv -1 \mod p$.

טענה: יהיו $p, q \in \mathbb{P}$ באשר $p < q$ וכן $q \neq 1 \mod p$ ותהא G חבורה מסדר pq אזי G ציקלית.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}_{>2}$ ותהא G חבורה מסדר $2p$ אזי $G \cong C_{2p}$ או $G \cong D_p$.

טענה: תהא G חבורה סופית יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא $P \le G$ תת־חבורת־p אזי $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$.

סימון: תהא $(A, +)$ חבורה אזי $e_A = 0$ וכן $-x = x^{-1}$ לכל $x \in A$ וכן $g^n = ng$ לכל $n \in \mathbb{Z}$ ולכל $g \in A$.

חבורת המכפלה: תהא I קבוצה ותהיינה $\{G_i \mid i \in I\}$ חבורות נגדיר $(g \cdot h)_i = g_i \cdot h_i$ לכל $g, h \in \prod_{i \in I} G_i$ ולכל $i \in I$ אזי $(\prod_{i \in I} G_i, \cdot)$.

טענה: תהא I קבוצה ותהיינה $\{G_i \mid i \in I\}$ חבורות אזי $\prod_{i \in I} G_i$ חבורה.

חבורת הסכום הישר: תהא I קבוצה ותהיינה $\{G_i \mid i \in I\}$ חבורות אזי $\bigoplus_{i \in I} G_n = \left\{g \in \prod_{i \in I} G_i \mid |\{i \in I \mid g_i \neq e_{G_i}\}| \in \mathbb{N}\right\}$.

טענה: תהא I קבוצה ותהיינה $\{G_i \mid i \in I\}$ חבורות אזי $\bigoplus_{i \in I} G_n \le \prod_{i \in I} G_i$.

איבר פיתול: תהא G חבורה אזי $g \in G$ עבורו קיים $n \in \mathbb{N}_+$ המקיים $g^n = e$.

סימון: תהא G חבורה אזי $T(G) = \{g \in G \mid \text{איבר פיתול } g\}$.

טענה: תהא G חבורה אבלית אזי $T(G) \le G$.

חבורת פיתול: חבורה G עבורה $T(G) = G$.

חבורה חסרת פיתול: חבורה G עבורה $T(G) = \{e\}$.

טענה: תהא A חבורה אבלית אזי ${}^{A}/_{T(A)}$ חסרת פיתול.

טענה: תהא G חבורה נ"ס ותהא $H \trianglelefteq G$ אזי ${}^{G}/_{H}$ נ"ס.

מסקנה: תהיינה G, H, K חבורות באשר $G \cong H \times K$ אזי (G נ"ס)$\Longleftrightarrow$(H, K נ"ס).

חבורה אבלית חופשית: תהא X קבוצה אזי $\bigoplus_X \mathbb{Z}$.

בסיס של חבורה אבלית חופשית: תהא X קבוצה ותהא $\bigoplus_X \mathbb{Z}$ חבורה אבלית חופשית אזי X.

דרגה של חבורה אבלית חופשית: תהא X קבוצה ותהא $\bigoplus_X \mathbb{Z}$ חבורה אבלית חופשית אזי $|X|$.

הערה: תהא X קבוצה אזי נשכן בצורה טבעית את X בתוך החבורה האבלית החופשית עם בסיס X כך $x \mapsto e_x$.

משפט התכונה האוניברסלית: תהא X קבוצה תהא G חבורה ותהא $f : X \to G$ אזי קיים ויחיד הומומורפיזם $\varphi : \bigoplus_X \mathbb{Z} \to G$ עבורו $\varphi(x) = f(x)$ לכל $x \in X$.

משפט תכונת ההרמה: תהא F חבורה אבלית חופשית תהיינה A, B חבורות אבליות יהי $\varphi : A \to B$ אפימורפיזם ויהי $\psi : F \to B$ הומומורפיזם אזי קיים הומומורפיזם $\hat{\psi} : F \to A$ עבורו $\varphi \circ \hat{\psi} = \psi$.

טענה תכונת הפיצול: תהא A חבורה אבלית ותהא $B \le A$ באשר ${}^{A}/_{B}$ אבלית חופשית אזי $A \cong B \oplus {}^{A}/_{B}$.

משפט: תהא A אבלית נ"ס וחסרת פיתול אזי A אבלית חופשית עם בסיס סופי.

מסקנה: תהא A אבלית נ"ס וחסרת פיתול אזי קיים $k \in \mathbb{N}$ עבורו $A \cong \mathbb{Z}^k$.

למה: תהא A חבורת פיתול אבלית נ"ס אזי A סופית.

משפט: תהא A אבלית נ"ס אזי

- $A \cong {}^{A}/_{T(A)} \oplus T(A)$.
- קיים $k \in \mathbb{N}$ עבורו ${}^{A}/_{T(A)} \cong \mathbb{Z}^k$.
- $T(A)$ סופית.

מסקנה: תהא A אבלית נ"ס אזי קיימת חבורה אבלית סופית B וקיים $k \in \mathbb{N}$ עבורם $A \cong \mathbb{Z}^k \oplus B$.

סימון: תהא G חבורה ויהי $p \in \mathbb{P}$ אזי $G_p = \{x \in G \mid p | \mathrm{ord}(x)\}$.

טענה: תהא A חבורה אבלית ויהי $p \in \mathbb{P}$ אזי $A_p \le A$.

טענה: תהא A חבורה אבלית ויהי $p \in \mathbb{P}$ אזי A_p חבורת־p.

משפט גאוס: תהא A אבלית סופית אזי $A \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$.

מסקנה: תהא A אבלית סופית ויהי $p \in \mathbb{P}$ אזי $n_p = 1$.

מסקנה: תהא A אבלית סופית אזי $A = \bigoplus \left\{P \le A \mid \exists p \in \mathbb{P}\left(P \in \mathrm{Syl}_p(A)\right)\right\}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא A חבורה אבלית מסדר p^n ויהיו $x_1\dots x_{n+1}\in A$ אזי קיימים $a_1\dots a_{n+1}\in\mathbb{N}$ עבורם $\sum_{i=1}^{n+1}a_ix_i=0$ וכן קיים $i\in[n+1]$ עבורו $a_i\not\equiv 0 \mod p$.

הומומורפיזם נשג: תהיינה G,H חבורות באשר $H\le G$ אזי הומומורפיזם $\pi:G\to H$ עבורו $\pi_{\restriction_H}=\mathrm{Id}_H$.

טענה: תהא G אבלית ותהא $A\le G$ התב"ש

- קיימת $B\le G$ עבורה $B\cap A=\{e\}$ וכן $A+B=G$.
- קיימת $B\le G$ עבורה לכל $g\in G$ קיים ויחיד $a\in A$ וקיים ויחיד $b\in B$ עבורם $g=a+b$.
- קיים הומומורפיזם $\varphi:{}^{G}/_{A}\to G$ עבורו $\nu\circ\varphi=\mathrm{Id}_{G/A}$ באשר $\nu:G\to{}^{G}/_{A}$ העתקת המנה.
- קיימת נשג $\pi:G\to A$.

טענה: תהא A אבלית אזי (A נ"ס)$\Longleftrightarrow$(קיים $k\in\mathbb{N}$ וקיימת $G\le\mathbb{Z}^k$ עבורם $A\cong{}^{\mathbb{Z}^k}/_{G}$).

חבורה p־אלמנטרית: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי חבורה G עבורה לכל $g\in G$ מתקיים $\mathrm{ord}(g)\in\{1,p\}$.

משפט המבנה לחבורות־p אבליות סופיות: יהי $n\in\mathbb{N}$ יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא A אבלית סופית בעלת סדר p^n אזי קיים ויחיד $k\in\mathbb{N}$ וקיימים ויחידים $n_1\dots n_k\in\mathbb{N}_+$ באשר $n_{i+1}\le n_i$ לכל $i\in[k-1]$ וכן $\sum_{i=1}^k n_i=n$ עבורם $A\cong\bigoplus_{i=1}^k C_{p^{n_i}}$.

מסקנה משפט המיון לחבורות אבליות סופיות: תהא A אבלית סופית אזי קיים ויחיד $k\in\mathbb{N}$ וקיימים ויחידים $m_1\dots m_k\in\mathbb{N}_+$ באשר $m_i|m_{i+1}$ לכל $i\in[k-1]$ עבורם $A\cong\bigoplus_{i=1}^k C_{m_i}$.

מסקנה: תהא A אבלית סופית אזי קיים ויחיד $k\in\mathbb{N}$ קיימים ויחידים $p_1\dots p_k\in\mathbb{P}$ באשר $p_i\le p_{i+1}$ לכל $i\in[k-1]$ וקיימים ויחידים $t_1\dots t_k\in\mathbb{N}$ עבורם $A\cong\bigoplus_{i=1}^k C_{p_i^{t_i}}$.

מסקנה: תהיינה A,B,C אבליות סופיות באשר $A\oplus C\cong B\oplus C$ אזי $A\cong B$.

מסקנה: תהיינה A,B אבליות סופיות באשר $A\oplus A\cong B\oplus B$ אזי $A\cong B$.

מסקנה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא $A\le\mathbb{F}^\times$ סופית אזי A ציקלית.

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}_p^\times$ ציקלית.

טענה: תהא A אבלית סופית ותהא $B\le A$ אזי קיימת $C\le A$ עבורה $C\cong{}^{A}/_{B}$.

קרקטר: תהא A אבלית אזי הומומורפיזם $\chi:A\to\mathbb{S}^1$.

החבורה הדואלית: תהא A חבורה אבלית אזי $\hat{A}=\left\{\chi:A\to\mathbb{S}^1\;\middle|\;\text{קרקטר } \chi\right\}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $C_n\cong\widehat{C_n}$.

טענה: תהיינה A,B אבליות סופיות אזי $\widehat{A\times B}=\hat{A}\times\hat{B}$.

מסקנה: תהא A אלבית סופית אזי $A\cong\hat{A}$.

סימון: יהי $p\in\mathbb{P}\backslash\{2\}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $U\left({}^{\mathbb{Z}}/_{p^n\mathbb{Z}}\right)=\left\{a\in{}^{\mathbb{Z}}/_{p^n\mathbb{Z}}\mid\exists b\in{}^{\mathbb{Z}}/_{p^n\mathbb{Z}}\left(a\cdot b=1\right)\right\}$.

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}\backslash\{2\}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $U\left({}^{\mathbb{Z}}/_{p^n\mathbb{Z}}\right)$ ציקלית.

משפט גאוס: תהא T חבורת פיתול אזי $T\cong\bigoplus_{p\in\mathbb{P}}T_p$.

סימון: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}\left(p^\infty\right)=\left\{\frac{k}{p^n}\;\middle|\;(n\in\mathbb{N})\wedge\left(k\in\{0,\dots,p^n-1\}\right)\right\}$.

חבורת פרופר: יהי $p\in\mathbb{P}$ נגדיר $\star:\mathbb{Z}\left(p^\infty\right)\times\mathbb{Z}\left(p^\infty\right)\to\mathbb{Z}\left(p^\infty\right)$ כך $a\star b=(a+b)-\lfloor a+b\rfloor$ אזי $\left(\mathbb{Z}\left(p^\infty\right),\star\right)$.

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}\left(p^\infty\right)$ חבורה.

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}\left(p^\infty\right)\cong\left\{2^{\pi i\cdot\frac{k}{p^n}}\;\middle|\;(n\in\mathbb{N})\wedge\left(k\in\{0,\dots,p^n-1\}\right)\right\}$.

טענה: ${}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}\cong\bigoplus_{p\in\mathbb{P}}\mathbb{Z}\left(p^\infty\right)$.

איבר מתחלק במספר: תהא G חבורה אבלית ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $a\in G$ עבורו קיים $b\in G$ המקיים $n\cdot b=a$.

חבורה חליקה: חבורה אבלית G עבורה לכל $a\in G$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי a מתחלק ב־n.

מסקנה: ${}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$ חליקה.

טענה: תהיינה D,G חבורות אבליות באשר D חליקה ויהי $\varphi:D\to G$ הומומורפיזם אזי $\mathrm{Im}\left(\varphi\right)$ חליקה.

טענה: תהא I קבוצה ותהא A_i חבורה אבלית לכל $i\in I$ אזי ($\bigoplus_{i\in I}A_i$ חליקה)$\Longleftrightarrow$(A_i חליקה לכל $i\in I$).

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}\left(p^\infty\right)$ חליקה.

חבורה מצומצמת: חבורה G עבורה לכל $H\le G$ מתקיים כי H אינה חליקה.

טענה: תהא A אבלית תהא $B\le A$ אבלית ויהי $f:A\to B$ הומומורפיזם נשג אזי קיימת $C\le A$ באשר $C\cap B=\{0\}$ וכן $A=C\oplus B$.

מסקנה: תהא A אבלית ותהא $D\le A$ חליקה אזי קיימת $K\le A$ באשר $D\cap K=\{0\}$ וכן $A=D\oplus K$.

טענה: תהא A אבלית אזי קיימת $D\le A$ חליקה וקיימת $R\le A$ מצומצמת באשר $D\cap R=\{0\}$ וכן $A=D\oplus R$.

טענה: תהא D אבלית חליקה אזי $T\left(D\right)$ חליקה.

מסקנה: תהא A אבלית אזי קיימת $R\le A$ מצומצמת קיימת $D\le A$ חליקה וקיימת $F\le D$ חסרת פיתול באשר $D\cap R=\{0\}$ וכן $A=D\oplus R$ וכן $T\left(D\right)\cap F=\{0\}$ וכן $D=T\left(D\right)\oplus F$ וכן $A=T\left(D\right)\oplus F\oplus R$.

משפט: תהא F חבורה אבלית חליקה חסרת פיתול אזי קיימת קבוצה I עבורה $F\cong\bigoplus_{I}\mathbb{Q}$.

משפט: תהא T חבורת פיתול חליקה אבלית אזי קיים $p\in\mathbb{P}$ וקיימת קבוצה I עבורה $T\cong\bigoplus_{I}\mathbb{Z}\left(p^{\infty}\right)$.

משפט ארדש־טוראן: תהא G חבורה סופית לא אבלית אזי $\mathbb{P}\left(xy=yx\right)\le\frac{5}{8}$.

טענה: קיימת חבורה סופית לא אבלית G עבורה $\mathbb{P}\left(xy=yx\right)=\frac{5}{8}$.

קומוטטור: תהא G חבורה ויהיו $g,h\in G$ אזי $[g,h]=g^{-1}h^{-1}gh$.

מסקנה: תהא G חבורה ויהיו $g,h\in G$ אזי $\left(gh=hg\right)\Longleftrightarrow\left([g,h]=e\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהיו $i,j,k\in[n]$ אזי $[I+e_{i,j},I+e_{j,k}]=e_{i,k}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהיו $i,j,k,\ell\in[n]$ שונים אזי $[I+e_{i,j},I+e_{j,\ell}]=I$.

משפט הסיבובים של אויילר: תהא $A\in\mathrm{SO}\left(3\right)$ אזי קיים ויחיד $v\in\mathbb{S}_{+}^{2}$ עבורו $Av=v$.

למה: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהיו $g,h\in G$ באשר $[g,h]=e$ אזי $g\cdot\mathrm{Fix}\left(h\right)=\mathrm{Fix}\left(h\right)$.

הגדרה: תהא G חבורה אזי $[G,G]=\{[g,h]\mid g,h\in G\}$.

חבורת הנגזרת: תהא G חבורה אזי $G'=\langle[G,G]\rangle$.

למה: תהא G חבורה ותהא $X\subseteq G$ עבורה $\varphi\left(X\right)=X$ לכל $\varphi\in\mathrm{Aut}\left(G\right)$ אזי $\langle X\rangle\ \mathrm{char}\ G$.

למה: תהא G חבורה אזי $G'\ \mathrm{char}\ G$.

אבליזציה של חבורה: תהא G חבורה אזי $G^{ab}={}^{G}/_{G'}$.

חבורה מושלמת: חבורה G עבורה $G=G'$.

טענה: תהא G חבורה פשוטה לא אבלית אזי G מושלמת.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge5}$ אזי A_{n} מושלמת.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי $\mathrm{SL}_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ מושלמת.

טענה אור: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge5}$ ויהי $x\in A_{n}$ אזי קיימות $\pi,\sigma\in S_{n}$ עבורן $x=[\pi,\sigma]$.

למה אבליזציה: תהא G חבורה אזי

- G^{ab} אבלית.
- לכל חבורה H ולכל אפימורפיזם $\varphi:G\to H$ מתקיים (H אבלית)$\Longleftrightarrow$($G'\le\ker\left(\varphi\right)$).
- לכל $N\trianglelefteq G$ מתקיים (${}^{N}/_{G}$ אבלית)$\Longleftrightarrow$($G'\le N$).

מסקנה: תהא G חבורה מושלמת תהא A חבורה אבלית ויהי $\varphi:G\to A$ הומומורפיזם אזי φ טריוואלי.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $S_{n}'=A_{n}$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $S_{n}^{ab}\cong\{\pm1\}$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי $\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{R}\right)\right)'=\mathrm{SL}_{n}\left(\mathbb{R}\right)$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי $\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{R}\right)\right)^{ab}=\mathbb{R}^{\times}$.

סדרת הנגזרת: תהא G חבורה אזי $G^{(0)}=G$ וכן $G^{(n+1)}=\left(G^{(n)}\right)'$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

מסקנה: תהא G חבורה עבורה קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $G^{(n)}=\{e\}$ אזי G פתירה.

סדרה נורמלית: תהא G חבורה ויהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $G_{0}\ldots G_{n}\le G$ המקיימות

- $G_{n}=G$ וכן $G_{0}=\{e\}$.
- $G_{i}\trianglelefteq G_{i-1}$ לכל $i\in[n]$.

משפט: תהא G חבורה אזי (G פתירה)$\Longleftrightarrow$(קיים $n\in\mathbb{N}$ עבורו $G^{(n)}=\{e\}$).

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי D_{n} פתירה.

חבורה מטאבלית: חבורה G עבורה $G^{(2)}=\{e\}$.

טענה: תהא G חבורה אזי (G מטאבלית)$\Longleftrightarrow$(קיימת $N\trianglelefteq G$ אבלית עבורה ${}^{G}/_{N}$ אבלית).

תת־חבורה מקסימלית: תהא G חבורה אזי $M\lneq G$ עבורה לכל $N\le G$ מתקיים $M\not\lneq N$.

תת־חבורת פרטיני: תהא G חבורה אזי M $\Phi\left(G\right)=\bigcap_{\substack{M\le G\\ \text{מקסימלית } M}}$.

איבר לא־יוצר: תהא G חבורה אזי $g\in G$ עבורו לכל $X\subseteq G$ המקיימת $\langle X\cup\{g\}\rangle=G$ מתקיים $\langle X\rangle=G$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\Phi\left(G\right)=\{g\in G\mid \text{לא־יוצר } g\}$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\Phi\left(G\right)\ \mathrm{char}\ G$.

טענה: תהא G חבורה באשר $G/\mathcal{Z}(G)$ ציקלית אזי G אבלית.

הרחבה של חבורה אבלית בחבורה אבלית: תהא K חבורה אבלית ותהא L חבורה אבלית אזי חבורה G עבורה קיים אפימורפיזם $\varphi:G\to K$ המקיים $\ker\left(\varphi\right)\cong L$.

הרחבה של חבורה בחבורה: תהא Q חבורה ותהא N חבורה אזי חבורה G עבורה $N\trianglelefteq G$ וכן $Q\cong G/N$.

משפט: תהא G חבורה סופית אזי

- לכל $H\le G$ מתקיים כי H סופית.
- לכל $N\trianglelefteq G$ מתקיים כי G/N סופית.
- לכל הרחבה H של G ב־N מתקיים כי H סופית.

משפט: תהא G חבורת פיתול אזי

- לכל $H\le G$ מתקיים כי H פיתול.
- לכל $N\trianglelefteq G$ מתקיים כי G/N פיתול.
- לכל הרחבה H של G ב־N מתקיים כי H פיתול.

משפט: תהא G חבורה פתירה אזי

- לכל $H\le G$ מתקיים כי H פתירה.
- לכל $N\trianglelefteq G$ מתקיים כי G/N פתירה.
- לכל הרחבה H של G ב־N מתקיים כי H פתירה.

סדרת הרכב: תהא G חבורה ויהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי סדרה נורמלית $G_{0}\ldots G_{n}\le G$ עבורה G_{i}/G_{i-1} פשוטה לכל $i\in\left[n\right]$.

גורמי הרכב: תהא G חבורה ותהא $G_{0}\ldots G_{n}\le G$ סדרת הרכב אזי $\left\{ G_{1}/G_{0},\ldots,G_{n}/G_{n-1}\right\}$.

סדרה מקסימלית: תהא G חבורה ויהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי סדרה נורמלית $G_{0}\ldots G_{n}\le G$ עבורה לכל $i\in\left[n\right]$ לא קיים $H\le G$ עבורו $G_{i}\lhd H\lhd G_{i-1}$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $G_{0}\ldots G_{n}\le G$ סדרה נורמלית אזי ($G_{0}\ldots G_{n}$ סדרת הרכב)$\iff$($G_{0}\ldots G_{n}$ סדרה מקסימלית).

סדרות הרכב שקולות: תהא G חבורה אזי סדרות הרכב $G_{0}\ldots G_{n}\le G$ וכן $H_{0}\ldots H_{m}\le G$ עבורן קיימת הפיכה $\pi:\left[n\right]\to\left[m\right]$ המקיימת $G_{i}/G_{i-1}\cong H_{\pi(i)}/H_{\pi(i-1)}$ לכל $i\in\left[n\right]$.

עידון של סדרה נורמלית: תהא G חבורה ותהא $G_{0}\ldots G_{n}\le G$ סדרה נורמלית אזי סדרה נורמלית $\tilde{G}_{0}\ldots\tilde{G}_{m}\le G$ עבורה $m\ge n$ וכן קיימת סדרה עולה ממש $i:\left\{ 0\ldots n\right\} \to\left\{ 0\ldots m\right\}$ באשר $i_{0}=0$ וכן $i_{n}=m$ וכן $\tilde{G}_{i_{j}}=G_{j}$ לכל $j\in\left\{ 0\ldots n\right\}$.

למה למת הפרפר של זסנאוס: תהא G חבורה תהיינה $A,B,A^{\star},B^{\star}\le G$ באשר $A\trianglelefteq A^{\star}$ וכן $B\trianglelefteq B^{\star}$ אזי

- $A\left(B\cap A^{\star}\right)\trianglelefteq A\left(B^{\star}\cap A^{\star}\right)$ וכן $B\left(A\cap B^{\star}\right)\trianglelefteq B\left(A^{\star}\cap B^{\star}\right)$.
- $\left(A\left(B^{\star}\cap A^{\star}\right)\right)/\left(A\left(B\cap A^{\star}\right)\right)\cong\left(B\left(A^{\star}\cap B^{\star}\right)\right)/\left(B\left(A\cap B^{\star}\right)\right)$.

משפט העידון של שרייר: תהא G חבורה תהיינה $G_{0}\ldots G_{n}\le G$ וכן $H_{0}\ldots H_{m}\le G$ סדרות הרכב אזי קיים עידון $\tilde{G}_{0}\ldots\tilde{G}_{N}\le G$ של $G_{0}\ldots G_{n}$ וקיים עידון $\tilde{H}_{0}\ldots\tilde{H}_{M}\le G$ של $H_{0}\ldots H_{m}$ באשר $\tilde{G}_{0}\ldots\tilde{G}_{N}$ שקולה ל־$\tilde{H}_{0}\ldots\tilde{H}_{M}$.

משפט ז'ורדן־הולדר: תהא G חבורה אזי

- אם G סופית אזי G בעלת סדרת הרכב.
- לכל סדרות הרכב $G_{0}\ldots G_{n}\le G$ וכן $H_{0}\ldots H_{m}\le G$ מתקיים כי $G_{0}\ldots G_{n}$ שקולה ל־$H_{0}\ldots H_{m}$.

טענה: תהא G פתירה אזי (G בעלת סדרת הרכב)$\iff$(G סופית).

טענה: תהא G חבורה סופית ותהא $H\trianglelefteq G$ אזי קיימת סדרת הרכב $G_{0}\ldots G_{n}\le G$ עבורה קיים $i\in\left\{ 0\ldots n\right\}$ המקיים $G_{i}=H$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $G_{0}\ldots G_{n}\le G$ סדרת הרכב באשר קיים $i\in\left[n\right]$ עבורו G_{i}/G_{i-1} אינה אבלית אזי G אינה פתירה.

הסדרה המרכזית העולה: תהא G חבורה אזי $G^{0}=\left\{ e\right\}$ וכן $G^{i+1}\le G$ מקיימת $G^{i+1}/G^{i}\cong\mathcal{Z}\left(G/G^{i}\right)$ לכל $i\in\mathbb{N}$.

טענה: תהא G חבורה אזי הסדרה המרכזית העולה יחידה.

הסדרה המרכזית היורדת: תהא G חבורה אזי $G_{0}=G$ וכן $G_{i+1}=\left\langle \left[G,G_{i}\right]\right\rangle$ לכל $i\in\mathbb{N}$.

טענה: תהא G חבורה אזי (G נילפוטנטית)$\iff$(קיים $n\in\mathbb{N}$ עבורו $G^{n}=G$).

טענה: תהא G חבורה ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(G^{n}=G\right)\iff\left(G_{n}=\left\{ e\right\} \right)$.

טענה: תהא G נילפוטנטית ונגדיר $n=\min\left\{ m\in\mathbb{N}\mid G^{m}=G\right\}$ אזי $G_{i}\le G^{n-i}$ לכל $i\in\left\{ 0\ldots n\right\}$.

טענה: תהיינה N,Q חבורות תהא G הרחבה של Q ב־N ותהא K פשוטה אזי (K גורם הרכב של G)$\iff$(K גורם הרכב של Q או N).

טענה: יהיו $n,m\in\mathbb{N}_+$ ותהיינה $H_1\dots H_n,K_1\dots K_m$ פשוטות לא טריוואליות באשר $\prod_{i=1}^{n}H_i\cong\prod_{i=1}^{m}K_i$ אזי $n=m$ וכן קיימת $\pi\in S_n$ עבורה $H_i\cong K_{\pi(i)}$ לכל $i\in[n]$.

סימון: יהי G גרף מכוון ותהא $e\in E(G)$ אזי $o(e)=e_1$ וכן $t(e)=e_2$.

מסלול מצומצם: יהי G גרף מכוון אזי מסלול σ עבורו לכל $e\in E(G)$ לא מתקיים כי $\left(e,e^{-1}\right)$ תת־מסלול של σ.

החבורה היסודית של גרף: יהי G גרף מכוון ויהי $v\in V(G)$ אזי $\pi_1(G,v)=\{\sigma\mid G\text{ מעגל מצומצם מ־}v\text{ ל־}v\text{ ב־}\sigma\}$.

טענה: יהי G גרף מכוון ויהי $v\in V(G)$ אזי $\pi_1(G,v)$ המצויידת עם שרשור מסלולים הינה חבורה.

הערה: כאשר משרשרים מסלולים יש לצמצם תתי מסלולים מהצורה $\left(e,e^{-1}\right)$.

מסקנה: $\pi_1((\{v\},\{(v,v)\}),v)\cong\mathbb{Z}$.

גרף השושנים: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $B_n=(\{v\},\{(v,v,1)\dots(v,v,n)\})$.

הערה: גרף השושנים הינו מולטי גרף בעל n לולאות עצמיות של v.

חבורה חופשית: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $F_n=\pi_1(B_n,v)$.

גרף קיילי: תהא G חבורה ותהא $S\subseteq G$ קבוצה יוצרת אזי $\text{Cay}(G,S)=(G,\{(g,gs)\mid(g\in G)\wedge(s\in S)\})$.

גרף טרנזיטיבי: גרף מכוון G המקיים כי $\text{Aut}(G)$ פועלת טרנזיטיבית על $V(G)$.

גרף רגולרי: גרף מכוון G המקיים כי לכל $v,u\in V(G)$ מתקיים $\deg(v)=\deg(u)$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $S\subseteq G$ קבוצה יוצרת אזי $\text{Cay}(G,S)$ גרף טרנזיטיבי ורגולרי.

מילים ביוצרים: תהא G חבורה ותהא $S\subseteq G$ קבוצה יוצרת אזי $\bigcup_{n=0}^{\infty}\left(S\cup S^{-1}\right)^n$.

יחס ביוצרים: תהא G חבורה ותהא $S\subseteq G$ קבוצה יוצרת אזי מילה w עבורה $\prod_{i=1}^{\text{len}(w)}w_i=e$.

חבורת היחסים ביוצרים: תהא G חבורה ותהא $S\subseteq G$ קבוצה יוצרת אזי $R=\{w\mid S\text{ יחס ב־}w\}$.

מילה מצומצמת ביוצרים: תהא G חבורה ותהא $S\subseteq G$ קבוצה יוצרת אזי מילה w עבורה לכל $x\in S$ לא מתקיים כי xx^{-1} תת־מילה של w וכן לא מתקיים כי $x^{-1}x$ תת־מילה של w.

חבורה חופשית: תהא X קבוצה אזי $F(X)=\{w\mid X\text{ מילה מצומצמת ב־}w\}$.

טענה: תהא X קבוצה אזי $F(X)$ המצויידת עם שרשור מילים הינה חבורה.

הערה: כאשר משרשרים מילים יש לצמצם תתי מילים מהצורה xx^{-1} וכן מילים מהצורה $x^{-1}x$.

הגדרה: תהא X קבוצה ויהי $x\in X$ נגדיר $\hat{x}\in S(F(X))$ כך $\hat{x}(\ell_1\dots\ell_n)=\begin{cases}x\ell_1\dots\ell_n & \ell_1\neq x^{-1}\\ \ell_2\dots\ell_n & \text{else}\end{cases}$.

הגדרה: תהא X קבוצה ויהי $x\in X$ נגדיר $\widehat{x^{-1}}\in S(F(X))$ כך $\widehat{x^{-1}}(\ell_1\dots\ell_n)=\begin{cases}x^{-1}\ell_1\dots\ell_n & \ell_1\neq x\\ \ell_2\dots\ell_n & \text{else}\end{cases}$.

הגדרה: תהא X קבוצה אזי $\hat{F}(X)=\left\langle\{\hat{x}\mid x\in X\}\cup\left\{\widehat{x^{-1}}\,\middle|\,x\in X\right\}\right\rangle$.

טענה: תהא X קבוצה תהא G חבורה ותהא $f:X\to G$ אזי קיים ויחיד הומומורפיזם $\varphi:F(X)\to G$ עבורו $\varphi_{\restriction X}=f$.

מסקנה: תהא G חבורה ותהא $S\subseteq G$ קבוצה יוצרת אזי R חבורה.

מסקנה: תהא G חבורה ותהא $S\subseteq G$ קבוצה יוצרת אזי $G\cong{}^{F(S)}/_{R}$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $S\subseteq G$ קבוצה יוצרת אזי $\langle S\mid R\rangle={}^{F(S)}/_{R}$.