סימון: יהי Σ אלפבית ויהיו $\psi_1 \dots \psi_n$ פרידיקטים על Σ^* אזי $\Sigma^*_{\psi_1 \dots \psi_n} = \{w \in \Sigma^* \mid \psi_1(w) \wedge \dots \wedge \psi_n(w)\}$.

טיפוס נתונים מופשט (ADT): יהי Σ אלפבית יהיו $\psi_1 \dots \psi_n$ פרידיקטים על Σ^* ותהיינה $f_1 \dots f_m$ פונקציות אזי $\left(\Sigma, \Sigma^*_{\psi_1 \dots \psi_n}, f_1, \dots, f_m\right)$.

תחום של טיפוס נתונים מופשט: יהי $\left(\Sigma^*_{\psi_1 \dots \psi_n}, f_1 \dots f_m\right)$ טיפוס נתונים מופשט אזי Σ.

אקסיומות של טיפוס נתונים מופשט: יהי $\left(\Sigma^*_{\psi_1 \dots \psi_n}, f_1 \dots f_m\right)$ טיפוס נתונים מופשט אזי $\psi_1 \dots \psi_n$.

אובייקטים של טיפוס נתונים מופשט: יהי $\left(\Sigma^*_{\psi_1 \dots \psi_n}, f_1 \dots f_m\right)$ טיפוס נתונים מופשט אזי $\Sigma^*_{\psi_1 \dots \psi_n}$.

הערה: יהי A טיפוס נתונים מופשט אזי נסמן $a \in A$ עבור a ששייך לקבוצת האובייקטים של A.

פונקציות של טיפוס נתונים מופשט: יהי $\left(\Sigma^*_{\psi_1 \dots \psi_n}, f_1 \dots f_m\right)$ טיפוס נתונים מופשט אזי $\{f_1 \dots f_m\}$.

סימון: יהי A טיפוס נתונים מופשט ותהא f פונקציה של A אזי $A.f = f$.

הערה: יהי A טיפוס נתונים מופשט עבורו ε אובייקט של A אזי נאמר כי A הינה פונקציה באשר $A() = \varepsilon$.

רשימה: יהי Σ אלפבית אזי $\text{List} = (\Sigma^*, \text{Length}, \text{Retrieve}, \text{Insert}, \text{Delete})$ באשר

- אורך: $\text{Length} : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ מוגדרת כך $\text{Length}(x) = n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in \Sigma^n$.
- קבלת איבר: $\text{Retrieve} : \bigcup_{n=0}^{\infty} (\Sigma^n \times [n]) \to \Sigma$ מוגדרת כך $\text{Retrieve}(x, i) = x_i$ לכל $n \in \mathbb{N}$ לכל $x \in \Sigma^n$ ולכל $i \in [n]$.
- הוספת איבר: $\text{Insert} : \bigcup_{n=0}^{\infty} (\Sigma^n \times [n+1] \times \Sigma) \to \Sigma^*$ מוגדרת כך $\text{Insert}(x, i, \sigma) = \langle x_1 \dots x_{i-1}, \sigma, x_i \dots x_n \rangle$ לכל $n \in \mathbb{N}$ לכל $x \in \Sigma^n$ לכל $i \in [n+1]$ ולכל $\sigma \in \Sigma$.
- מחיקת איבר: $\text{Delete} : \bigcup_{n=0}^{\infty} (\Sigma^n \times [n]) \to (\Sigma^* \times \Sigma)$ מוגדרת כך $\text{Delete}(x, i) = (\langle x_1 \dots x_{i-1}, x_{i+1} \dots x_n \rangle, x_i)$ לכל $n \in \mathbb{N}$ לכל $x \in \Sigma^n$ ולכל $i \in [n]$.

טענה: יהי Σ אלפבית אזי List הינו טיפוס נתונים מופשט.

הגדרה: יהי Σ אלפבית אזי

- קבלת איבר ראשון: $\text{RetrieveFirst} : \text{List} \to \Sigma$ מוגדרת כך $\text{RetrieveFirst}(x) = \text{Retrieve}(x, 1)$ לכל $x \in \text{List}$.
- הוספת איבר ראשון: $\text{InsertFirst} : (\text{List} \times \Sigma) \to \text{List}$ מוגדרת כך $\text{RetrieveFirst}(x, \sigma) = \text{List.Insert}(x, 1, \sigma)$ לכל $x \in \text{List}$ ולכל $\sigma \in \Sigma$.
- מחיקת איבר ראשון: $\text{DeleteFirst} : \text{List} \to (\text{List} \times \Sigma)$ מוגדרת כך $\text{DeleteFirst}(x) = \text{List.Delete}(x, 1)$ לכל $x \in \text{List}$ ולכל $\sigma \in \Sigma$.
- קבלת איבר אחרון: $\text{RetrieveLast} : \text{List} \to \Sigma$ מוגדרת כך $\text{RetrieveLast}(x) = \text{List.Retrieve}(x, \text{List.Length}(x))$ לכל $x \in \text{List}$.
- הוספת איבר אחרון: $\text{InsertLast} : (\text{List} \times \Sigma) \to \text{List}$ מוגדרת כך $\text{InsertLast}(x, \sigma) = \text{List.Insert}(x, \text{List.Length}(x) + 1, \sigma)$ לכל $x \in \text{List}$ ולכל $\sigma \in \Sigma$.
- מחיקת איבר אחרון: $\text{DeleteLast} : \text{List} \to (\text{List} \times \Sigma)$ מוגדרת כך $\text{DeleteLast}(x) = \text{List.Delete}(x, \text{List.Length}(x))$ לכל $x \in \text{List}$ ולכל $\sigma \in \Sigma$.
- חיפוש איבר: $\text{Search} : (\text{List} \times \Sigma) \to \mathbb{N} \cup \{-1\}$ מוגדרת כך $\text{Search}(x, \sigma) = \begin{cases} \min\{i \in [n] \mid x_i = \sigma\} & \exists i \in [n]. x_i = \sigma \\ -1 & \text{else} \end{cases}$ לכל $n \in \mathbb{N}$ לכל $x \in \Sigma^n$ ולכל $\sigma \in \Sigma$.
- הוספת רשימה ברשימה: $\text{Plant} : \bigcup_{n=0}^{\infty} (\Sigma^n \times [n+1] \times \text{List}) \to \text{List}$ מוגדרת כך $\text{Plant}(x, i, y) = \langle x_1 \dots x_{i-1}, y, x_i \dots x_n \rangle$ לכל $n \in \mathbb{N}$ לכל $x \in \Sigma^n$ לכל $i \in [n+1]$ ולכל $y \in \text{List}$.
- פיצול רשימה: $\text{Split} : \bigcup_{n=0}^{\infty} (\Sigma^n \times [n+1]) \to (\text{List} \times \text{List})$ מוגדרת כך $\text{Plant}(x, i) = (\langle x_1 \dots x_{i-1} \rangle, \langle x_i \dots x_n \rangle)$ לכל $n \in \mathbb{N}$ לכל $x \in \Sigma^n$ ולכל $i \in [n+1]$.

מימוש של טיפוס נתונים מופשט: יהי A טיפוס נתונים מופשט אזי פסאודו־קוד הממש את A.

הגדרה מימוש רשימה בעזרת מערך: יהי $M \in \mathbb{N}$ אזי

```
class List(M, a_1, ..., a_n):
    if M >= n then Error
    self.Array <- [a_1, ..., a_n, -, ..., -] // The array is of fixed size M
    self.MaxLen <- M
    self.Length <- n
```

```
function Retrieve(L, i):
    return L.Array[i - 1]
```

```
function Insert(L, i, σ):
    if L.Length = L.MaxLen then Error
    for j ← [L.Length − 1, ..., i − 1] do
        L.Array[j + 1] ← L.Array[j]
    end
    L.Array[i − 1] ← σ
    L.Length ← L.Length + 1

function Delete(L, i):
    for j ← [L.Length − 1, ..., i] do
        L.Array[j − 1] ← L.Array[j]
    end
    L.Length ← L.Length − 1
```

טענה: יהי $M \in \mathbb{N}$ אזי מימוש רשימה בעזרת מערך הינו מימוש של רשימה.

טענה: יהי $M \in \mathbb{N}$ ותהא L רשימה הממומשת בעזרת מערך אזי

- יהי $i \in [\text{List.Length}(L)]$ אזי $\text{Retrieve}(L, i)$ בעל סיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}(1)$.
- יהי $i \in [\text{List.Length}(L) + 1]$ ויהי $\sigma \in \Sigma$ אזי $\text{Insert}(L, i, \sigma)$ בעל סיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}(n - i + 1)$.
- יהי $i \in [\text{List.Length}(L)]$ אזי $\text{Delete}(L, i)$ בעל סיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}(n - i + 1)$.

מסקנה: יהי $M \in \mathbb{N}$ ותהא L רשימה הממומשת בעזרת מערך אזי

- יהי $\sigma \in \Sigma$ אזי $\text{InsertFirst}(L, \sigma)$ בעל סיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}(n)$.
- $\text{DeleteFirst}(L)$ בעל סיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}(n)$.
- יהי $\sigma \in \Sigma$ אזי $\text{InsertLast}(L, \sigma)$ בעל סיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}(1)$.
- $\text{DeleteLast}(L)$ בעל סיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}(1)$.