הגדרה: תהא $\mathbb{C}\supseteq G$ פתוחה אזי $\text{Hol}(G)=\{f:G\to\mathbb{C}\mid f\text{ הולומורפית}\}$.

סימון: תהא $\mathbb{C}\supseteq G$ פתוחה אזי $A(G)=H(G)=\text{Hol}(G)$.

הגדרה: תהא $\mathbb{C}\supseteq G$ פתוחה תהא $f:G\to\mathbb{C}$ מרומורפית ותהא $G\supseteq K$ קומפקטית אזי $\|f\|_{C(K)}=\max|f(K)|$.

טור פונקציות מתכנס נורמלית: תהא $\mathbb{C}\supseteq G$ פתוחה ותהיינה $\langle f_n\in\text{Hol}(G)\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ אזי $\sum_{n=0}^{\infty}f_n$ עבורה לכל $G\supseteq K$ קומפקטית קיים $m\in\mathbb{N}$ עבורו $\sum_{m\le n}\|f_n\|_{C(K)}$ מתכנס.

טענה אוילר: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-n)^2}=\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2$.

מסקנה אוילר: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי $\pi\cdot\cot(\pi z)=\frac{1}{z}+\sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$.

מסקנה אוילר: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}=\lim_{m\to\infty}\sum_{|n|\le m}\frac{(-1)^n}{z-n}$.

מכפלה מתכנסת: יהיו $\langle p_n\in\mathbb{C}\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ ויהי $P\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ באשר $P=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{n}p_i$ אזי $P=\prod_{i=0}^{\infty}p_i$.

טענה: יהיו $\langle p_n\in\mathbb{C}\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ עבורם $\prod_{i=0}^{\infty}p_i$ מתכנסת אזי $p_n\xrightarrow[n\to\infty]{}1$.

הענף הראשי של log: יהי $r\in\mathbb{R}_+$ ויהי $\theta\in\mathbb{R}$ אזי $\text{Log}\left(re^{i\theta}\right)=\log(r)+\text{Arg}\left(e^{i\theta}\right)$.

טענה: Log ענף של log על $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

טענה: יהיו $\langle p_n\in\mathbb{C}\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ ויהי $P\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ התב"ש

- $\prod_{i=0}^{\infty}p_i=P$.
- $\sum_{i=0}^{\infty}\text{Log}(p_i)$ מתכנס וכן $P=\exp\left(\sum_{i=0}^{\infty}\text{Log}(p_i)\right)$.

טענה: יהיו $\langle a_n\in\mathbb{C}\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ באשר $\sum_{i=0}^{\infty}|a_i|^2$ מתכנס אזי ($\prod_{i=0}^{\infty}(1+a_i)$ מתכנסת)$\Longleftrightarrow$($\sum_{i=0}^{\infty}a_i$ מתכנס).

טענה: קיימים $\langle a_n\in\mathbb{C}\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ עבורם $\sum_{i=0}^{\infty}a_i$ מתכנס אך $\prod_{i=0}^{\infty}(1+a_i)$ אינה מתכנסת.

טענה: קיימים $\langle a_n\in\mathbb{C}\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ עבורם $\prod_{i=0}^{\infty}(1+a_i)$ מתכנסת אך $\sum_{i=0}^{\infty}a_i$ אינה מתכנס.

טענה: יהיו $\langle a_n\in\mathbb{C}\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ באשר $\sum_{i=0}^{\infty}|a_i|$ מתכנס אזי $\prod_{i=0}^{\infty}(1+a_i)$ מתכנסת.

מכפלת פונקציות מתכנסת באופן נורמלי: תהא $\mathbb{C}\subseteq G$ פתוחה ותהיינה $\langle a_n\in\text{Hol}(G)\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ אזי $\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$ עבורה $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס באופן נורמלי.

טענה: תהא $\mathbb{C}\supseteq G$ פתוחה ותהיינה $\langle p_n\in\text{Hol}(G)\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ באשר $\prod_{i=0}^{\infty}p_i$ מתכנסת באופן נורמלי אזי לכל $\sigma\in S_{\mathbb{N}}$ מתקיים $\prod_{i=0}^{\infty}p_i=\prod_{i=0}^{\infty}p_{\sigma(i)}$.

טענה: תהא $\mathbb{C}\supseteq G$ פתוחה ותהיינה $\langle p_n\in\text{Hol}(G)\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ באשר $\prod_{i=0}^{\infty}p_i$ מתכנסת באופן נורמלי אזי $\prod_{i=0}^{\infty}p_i\in\text{Hol}(G)$.

טענה: תהא $\mathbb{C}\supseteq G$ פתוחה ותהיינה $\langle p_n\in\text{Hol}(G)\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ באשר $\prod_{i=0}^{\infty}p_i$ מתכנסת באופן נורמלי אזי $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{p_i'}{p_i}$ מתכנס באופן נורמלי.

למה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי $\prod_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}}\left(\left(1-\frac{z}{n}\right)\cdot e^{\frac{z}{n}}\right)$ מתכנסת באופן נורמלי.

למה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי $\sin(\pi z)=\pi z\cdot\prod_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}}\left(\left(1-\frac{z}{n}\right)\cdot e^{\frac{z}{n}}\right)$.

טענה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי $\sin(\pi z)=\pi z\cdot\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$.

מסקנה ואליס: $1=\frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$ וכן $\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$.

פונקציית Γ: נגדיר $\Gamma:\{\text{Re}(z)>0\}\to\mathbb{C}$ כך $\Gamma(s)=\int_0^{\infty}t^{s-1}e^{-t}\text{d}t$.

טענה: תהא $\mathbb{C}\supseteq G$ פתוחה ותהא $F:G\times[0,1]\to\mathbb{C}$ רציפה עבורה לכל $s\in[0,1]$ מתקיים כי $F(z,s)\in\text{Hol}(G)$ אזי $\int_0^1F(z,s)\,\text{d}s\in\text{Hol}(G)$.

טענה: $\Gamma\in\text{Hol}(\{\text{Re}(z)>0\})$.

טענה: יהי $s\in\mathbb{C}$ באשר $\text{Re}(s)>0$ אזי $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\Gamma(n+1)=n!$.

טענה: יהי $s\in\mathbb{C}$ אזי $\int_0^1t^{s-1}e^{-t}\text{d}t=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\cdot\frac{1}{s+j}$.

טענה: קיימת $f:\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})\to\mathbb{C}$ מרומורפית עבורה לכל $z\in\mathbb{C}$ באשר $\text{Re}(z)>0$ מתקיים $f(z)=\Gamma(z)$.

הערה: נסמן את ההמשכה של Γ ל-$\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$ גם כ-Γ.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $-n$ קוטב פשוט של Γ.

מסקנה: $\{z\in\mathbb{C}\mid z\text{ קוטב של }\Gamma\}=-\mathbb{N}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\text{Res}_{-n}(\Gamma)=\frac{(-1)^n}{n!}$.

למה: יהי $z\in\mathbb{C}$ באשר $\text{Re}(z)>0$ אזי $\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!\cdot n^z}{\prod_{i=0}^{n}(z+i)}\right)$.

קבוע אוילר־מסקרוני: $\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(-\log(n)+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right)$.

טענה: יהי $s\in\mathbb{C}$ אזי $\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$.

מסקנה: $\frac{1}{\Gamma}\in\mathrm{Hol}\left(\mathbb{C}\right)$.

טענה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי $\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(1-z\right)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$.

מסקנה: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

מסקנה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי $\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)\left(z\right)=-\gamma-\frac{1}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{z}\right)$.

מסקנה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי $\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)'\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^{2}}$.

טענה נוסחת גאוס: יהי $z\in\mathbb{C}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(2\pi\right)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(z\right)=n^{z-\frac{1}{2}}\prod_{i=0}^{n-1}\Gamma\left(\frac{z+i}{n}\right)$.

מסקנה נוסחת לג'נדר: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי $\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(2z\right)=2^{2z-1}\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$.

מסקנה נוסחת אויילר: יהי $z\in\mathbb{C}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(2\pi\right)^{\frac{n-1}{2}}=\sqrt{n}\cdot\prod_{i=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{i}{n}\right)$.

משפט בוהר־מולרופ:
- $\log\left(\Gamma_{\restriction_{\mathbb{R}_{+}}}\right)$ קמורה.
- תהא $F:\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{R}$ באשר $F\left(x+1\right)=xF\left(x\right)$ וכן $\log\left(F\right)$ קמורה אזי $F=F\left(1\right)\cdot\Gamma_{\restriction_{\mathbb{R}_{+}}}$.

משפט Wielandt: תהא $F\in\mathrm{Hol}\left(\left\{ \mathrm{Re}\left(z\right)>0\right\} \right)$ באשר $F\left(z+1\right)=zF\left(z\right)$ וכן F חסומה ב־$\left\{ 1\le\mathrm{Re}\left(z\right)\le2\right\}$ אזי $F=F\left(1\right)\cdot\Gamma$.

פונקציית המסור: נגדיר $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך $\psi\left(t\right)=t-\left\lfloor t\right\rfloor -\frac{1}{2}$.

למה אויילר־מקלורן: יהי $a,b\in\mathbb{R}$ באשר $a<b$ ותהא $f\in C^{1}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\sum_{a<n\le b}f\left(n\right)=\int_{a}^{b}f+\int_{a}^{b}\left(\psi\cdot f'\right)+\psi\left(a\right)f\left(a\right)-\psi\left(b\right)f\left(b\right)$.

משפט סטרלינג: יהי $z\in\mathbb{C}$ באשר $z\in\mathbb{C}\backslash\left[-\infty,0\right)$ ונגדיר $\mu:\mathbb{C}\backslash\left[-\infty,0\right)\to\mathbb{C}$ כך $\mu\left(z\right)=-\int_{0}^{\infty}\frac{\psi(t)}{t+z}\mathrm{d}t$ אזי $\Gamma\left(z\right)=\sqrt{2\pi}z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}\cdot e^{\mu(z)}$.

מסקנה נוסחת סטרלינג: יהי $z\in\mathbb{C}$ באשר $z\in\mathbb{C}\backslash\left[-\infty,0\right)$ אזי $\Gamma\left(z\right)=\sqrt{2\pi}z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\left|z\right|}\right)\right)$.

פונקציית ζ: נגדיר $\zeta:\left\{ \mathrm{Re}\left(z\right)>1\right\} \to\mathbb{C}$ כך $\zeta\left(s\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}$.

טענה: $\zeta\in\mathrm{Hol}\left(\left\{ \mathrm{Re}\left(z\right)>1\right\} \right)$.

למה: יהי $s\in\mathbb{C}$ באשר $\mathrm{Re}\left(s\right)>1$ אזי $\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)^{-1}$ מתכנסת באופן נורמלי.

משפט אויילר: יהי $s\in\mathbb{C}$ באשר $\mathrm{Re}\left(s\right)>1$ אזי $\zeta\left(s\right)=\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)^{-1}$.

מסקנה: $\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p}=\infty$.

מסקנה: יהי $s\in\mathbb{C}$ באשר $\mathrm{Re}\left(s\right)>1$ אזי $\zeta\left(s\right)\ne0$.

פונקציית מוביוס: נגדיר $\mu:\mathbb{N}\to\left\{ 0,\pm1\right\}$ כך $\mu\left(1\right)=1$ וכן $\mu\left(n\right)=\begin{cases} (-1)^{k} & \exists S\subseteq\mathbb{P}.(\left|S\right|=k)\wedge\left(n=\prod_{p\in S}p\right)\\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

מסקנה: יהי $s\in\mathbb{C}$ באשר $\mathrm{Re}\left(s\right)>1$ אזי $\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^{s}}$.

פונקציית Mangoldt: נגדיר $\Lambda:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ כך $\Lambda\left(n\right)=\begin{cases} \log(p) & \exists p\in\mathbb{P}.\exists m\in\mathbb{N}_{+}.n=p^{m}\\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

מסקנה: יהי $s\in\mathbb{C}$ באשר $\mathrm{Re}\left(s\right)>1$ אזי $\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)\left(s\right)=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{s}}$.

טענה: יהי $s\in\mathbb{C}$ באשר $\mathrm{Re}\left(s\right)>1$ אזי $\zeta\left(s\right)=-s\int_{1}^{\infty}\frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\mathrm{d}x+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}$.

טענה: יהי $\delta>0$ ויהי $s\in\mathbb{C}$ באשר $\mathrm{Re}\left(s\right)>-1+\delta$ אזי $\int_{1}^{\infty}\frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\mathrm{d}x$ מתכנס.

טענה: קיימת $f:\left\{ \mathrm{Re}\left(s\right)>-1\right\} \to\mathbb{C}$ מרומורפית עבורה לכל $z\in\mathbb{C}$ באשר $\mathrm{Re}\left(z\right)>1$ מתקיים $f\left(z\right)=\zeta\left(z\right)$.

הערה: נסמן את ההמשכה של ζ ל־$\left\{ \mathrm{Re}\left(s\right)>-1\right\}$ גם כ־ζ.

טענה: 1 הינו קוטב פשוט של ζ.

מסקנה: $\left\{ z\in\mathbb{C}\mid\zeta\text{ קוטב של }z\right\} =\left\{ 1\right\}$.

טענה: $\mathrm{Res}_{1}\left(\zeta\right)=1$.

טענה: יהי $s\in\mathbb{C}$ באשר $-1<\mathrm{Re}\left(s\right)<0$ אזי $\int_{0}^{1}\frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}$.

מסקנה: יהי $s\in\mathbb{C}$ באשר $-1<\mathrm{Re}\left(s\right)<0$ אזי $\zeta\left(s\right)=-s\int_{0}^{\infty}\frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\mathrm{d}x$.