מרוכבים: $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$.

הערה: יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי נשכן $(\alpha,0)\mapsto\alpha$.

הגדרה: נגדיר $i\in\mathbb{C}$ כך $i=(0,1)$.

מסקנה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי קיימים ויחידים $a,b\in\mathbb{R}$ עבורם $z=a+ib$.

מטריצה קונפורמית: מטריצה $A\in M_2(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ עבורה קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ המקיימים $A=\left(\begin{smallmatrix}a&-b\\b&a\end{smallmatrix}\right)$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $O(n)=\{A\in M_n(\mathbb{R})\mid \text{קונפורמית } A\}$.

טענה: נגדיר $T:\mathbb{C}\to O(2)$ כך $T(a+ib)=\left(\begin{smallmatrix}a&-b\\b&a\end{smallmatrix}\right)$ אזי $T\in\text{Hom}(\mathbb{C},O(2))$ וכן T הינה איזומורפיזם.

טענה: תהא $A\in M_2(\mathbb{R})$ אזי (A קונפורמית)$\Longleftrightarrow$(A הפיכה ושומרת זווית).

מטריצה אנטי־קונפורמית: מטריצה $A\in M_2(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ עבורה קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ המקיימים $A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&-a\end{smallmatrix}\right)$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\overline{O(n)}=\{A\in M_n(\mathbb{R})\mid \text{אנטי־קונפורמית } A\}$.

טענה: תהא $A\in M_2(\mathbb{R})$ אזי (A אנטי־קונפורמית)$\Longleftrightarrow$(A הפיכה והופכת זווית).

משפט: תהא $A\in M_2(\mathbb{R})$ אזי קיימות ויחידות $B\in O(2)\cup\{0\}$ וכן $C\in\overline{O(2)}\cup\{0\}$ עבורן $A=B+C$.

מכפלת מרוכבים: יהיו $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ אזי $(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$.

הערה: מכאן והלאה $\mathbb{C}$ תמיד מצויידת במכפלת מרוכבים.

טענה: $i^2=-1$.

החלק הממשי: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $\text{Re}(a+ib)=a$.

החלק המדומה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $\text{Im}(a+ib)=b$.

הצמוד: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $\overline{a+ib}=a-ib$.

הערך המוחלט: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$.

מספר מדומה טהור: מספר $z\in\mathbb{C}$ המקיים $\text{Re}(z)=0$.

מספר ממשי טהור: מספר $z\in\mathbb{C}$ המקיים $\text{Im}(z)=0$.

למה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי $\overline{(\overline{z})}=z$ וכן $|\overline{z}|=|z|$ וכן $z\overline{z}=|z|^2$

מסקנה: יהי $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ אזי $z^{-1}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

טענה: $\mathbb{C}$ המצויידת במכפלת מרוכבים הינה אלגברה מעל $\mathbb{R}$.

טענה: יהיו $z,w\in\mathbb{C}$ אזי

- $\text{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}$ וכן $\text{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}$.
- $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$ וכן $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$.
- נניח כי $w\neq 0$ אזי $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
- $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$.
- נניח כי $w\neq 0$ אזי $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$.
- $-|z|\le\text{Re}(z)\le|z|$ וכן $-|z|\le\text{Im}(z)\le|z|$.

טענה אי־שיוויון המשולש: יהיו $z,w\in\mathbb{C}$ אזי $|z+w|\le|z|+|w|$.

טענה אי־שיוויון קושי שוורץ: יהיו $z_1\ldots z_n,w_1\ldots w_n\in\mathbb{C}$ אזי $\left|\sum_{i=1}^n z_iw_i\right|\le\left(\sum_{i=1}^n|z_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^n|w_i|^2\right)$.

מסקנה: יהיו $z,w\in\mathbb{C}$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי

- $|z|-|w|\le|z-w|$.
- $|a+ib|\le|a|+|b|$.

הצגה פולרית/הצגה קוטבית: יהי $\theta\in\mathbb{R}$ אזי $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.

הארגומנט: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי $\arg(z)=\left\{\theta\in\mathbb{R}\mid z=|z|e^{i\theta}\right\}$.

מסקנה: יהי $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ אזי קיים ויחיד $\theta\in(-\pi,\pi]$ עבורו $z=|z|\cdot e^{i\theta}$.

הארגומנט העיקרי: יהי $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ויהי $\theta\in\arg(z)\cap(-\pi,\pi]$ אזי $\text{Arg}(z)=\theta$.

מסקנה: יהי $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ אזי $\text{Arg}(z)$ קיים ויחיד.

טענה: יהי $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ אזי $\arg(z)=\{\text{Arg}(z)+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$.

טענה: יהיו $\theta,\phi\in\mathbb{R}$ ויהיו $r,s\ge 0$ אזי $\overline{r\cdot e^{i\theta}}=r\cdot e^{-i\theta}$ וכן $\left(r\cdot e^{i\theta}\right)\cdot\left(s\cdot e^{i\phi}\right)=rs\cdot e^{i(\theta+\phi)}$.

מסקנה: יהיו $w,z\in\mathbb{C}$ אזי $\arg(zw)=\arg(z)+\arg(w)$.

טענה: יהי $\theta\in\mathbb{R}$ ויהי $r>0$ אזי $\left(r\cdot e^{i\theta}\right)^{-1}=\frac{1}{r}\cdot e^{-i\theta}$.

טענה: יהי $\theta\in\mathbb{R}$ יהי $r\ge0$ ויהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $\left(r\cdot e^{i\theta}\right)^{n}=r^{n}\cdot e^{in\theta}$.

מסקנה נוסחת דה מואבר: יהי $\theta\in\mathbb{R}$ ויהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $\left(\cos\left(\theta\right)+i\sin\left(\theta\right)\right)^{n}=\cos\left(n\theta\right)+i\sin\left(n\theta\right)$.

טענה: יהי $\theta\in\mathbb{R}$ יהי $r\ge0$ ויהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\sqrt[n]{re^{i\theta}}=\left\{ \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)}\mid k\in\left\{ 0,\ldots,n-1\right\} \right\}$.

מסקנה שורשי יחידה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\sqrt[n]{1}=\left\{ e^{\frac{2i\pi k}{n}}\mid k\in\left\{ 0,\ldots,n-1\right\} \right\}$.

משפט המשפט היסודי של האלגברה: יהי $p\in\mathbb{C}_{\ge1}\left[x\right]$ אזי קיים $x\in\mathbb{C}$ עבורו $p\left(x\right)=0$.

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{C}_{\ge1}\left[x\right]$ אזי קיימים $a_{0}\ldots a_{n}\in\mathbb{C}$ עבורם $p\left(x\right)=a_{0}\prod_{i=1}^{n}\left(x-a_{i}\right)$.

כדור: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ יהי $r\in\mathbb{R}_{+}$ ותהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $B_{r}^{n}\left(a\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}^{n}\mid\left\Vert x-a\right\Vert <r\right\}$.

ספירה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\mathbb{S}^{n}=\left\{ x\in\mathbb{R}^{n+1}\mid\left\Vert x\right\Vert =1\right\}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\partial B_{1}^{n+1}\left(0\right)=\mathbb{S}^{n}$.

הקוטב הצפוני: נגדיר $N\in\mathbb{S}^{2}$ כך $N=\left(0,0,1\right)$.

ההמיספרה העליונה: $\mathbb{H}^{+}=\left\{ \left(x,y,z\right)\in\mathbb{S}^{2}\bigm|z>0\right\}$.

ההמיספרה התחתונה: $\mathbb{H}^{-}=\left\{ \left(x,y,z\right)\in\mathbb{S}^{2}\bigm|z<0\right\}$.

הטלה סטריאוגרפית: נגדיר $f:\mathbb{C}\to\mathbb{S}^{2}\backslash\left\{ N\right\}$ כך $f\left(x+iy\right)=\left(\frac{2x}{x^{2}+y^{2}+1},\frac{2y}{x^{2}+y^{2}+1},1-\frac{2}{x^{2}+y^{2}+1}\right)$.

הערה: במרחב $\mathbb{R}^{3}$ נגדיר את $\mathbb{C}$ להיות שני הצירים הראשונים אזי $f\left(p\right)=\text{line}_{p,N}\cap\mathbb{S}^{1}$.

טענה: f רציפה.

טענה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי

- $\left(z\in\mathbb{S}^{1}\right)\iff\left(f\left(z\right)=z\right)$.
- $\left(\left|z\right|>1\right)\iff\left(f\left(z\right)\in\mathbb{H}^{+}\right)$.
- $\left(\left|z\right|<1\right)\iff\left(f\left(z\right)\in\mathbb{H}^{-}\right)$.

טענה: נגדיר $g:\mathbb{S}^{2}\backslash\left\{ N\right\} \to\mathbb{C}$ כך $g\left(x,y,z\right)=\frac{x}{1-z}+i\frac{y}{1-z}$ אזי $g=f^{-1}$.

סימון: $\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\left\{ \infty\right\}$.

הספירה של רימן: נגדיר $\hat{f}:\hat{\mathbb{C}}\to\mathbb{S}^{2}$ כך $\hat{f}_{\upharpoonright\mathbb{C}}=f$ וכן $\hat{f}\left(\infty\right)=N$.

הערה: נסמן את ההרחבה של f לקוטב הצפוני כך $f=\hat{f}$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{S}^{2}\backslash\left\{ N\right\}$ אזי (A מעגל)$\Longleftrightarrow$($f^{-1}\left[A\right]$ מעגל או ישר).

מסקנה: יהי $C\subseteq\mathbb{S}^{2}\backslash\left\{ N\right\}$ מעגל ויהי P מישור עבורו $C=P\cap\mathbb{S}^{2}$ אזי ($f^{-1}\left[C\right]$ ישר)$\Longleftrightarrow$($N\in P$).

גבול: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ויהי $z\in\mathbb{C}$ עבורם $\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\ge N.\left|a_{n}-z\right|<\varepsilon$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_{n}=z$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ויהי $z\in\mathbb{C}$ אזי $\left(a_{n}\to z\right)\iff\left(\left|a_{n}-z\right|\to0\right)$.

גבול אינסופי: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\forall M\in\mathbb{R}.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\ge N.M<\left|a_{n}\right|$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_{n}=\infty$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(a_{n}\to\infty\right)\iff\left(\left|a_{n}\right|\to\infty\right)$.

טענה: תהיינה $a,b\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ויהיו $z,w\in\widehat{\mathbb{C}}$ עבורם $a_{n}\to z$ וכן $b_{n}\to w$ אזי

- $a_{n}+b_{n}\to z+w$.
- $a_{n}\cdot b_{n}\to z\cdot w$.
- נניח כי $w\neq0$ אזי $\frac{a_{n}}{b_{n}}\to\frac{z}{w}$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ויהי $z\in\widehat{\mathbb{C}}$ עבורם $a_{n}\to z$ אזי

- $\overline{a_{n}}\to\overline{z}$.
- $\left|a_{n}\right|\to\left|z\right|$.
- $\text{Re}\left(a_{n}\right)\to\text{Re}\left(z\right)$.
- $\text{Im}\left(a_{n}\right)\to\text{Im}\left(z\right)$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow$($\text{Re}\left(a\right),\text{Im}\left(a\right)$ מתכנסות).

מסקנה: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow$$\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n,m\ge N.\left|a_{n}-a_{m}\right|<\varepsilon\right)$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\left|a_{n}\right|\to0$ אזי $a_{n}\to0$.

מסקנה: תהיינה $a,b\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ באשר a חסומה וכן $b_{n}\to0$ אזי $a_{n}b_{n}\to0$.

הערה: מכאן והלאה הסימון $\mathbb{F}$ יתאר שדה מבין $\mathbb{R},\mathbb{C}$ וכאשר נאמר כי $\mathcal{U}$ פתוחה הכוונה היא ביחס לשדה.

גבול: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{F}_{1}$ פתוחה תהא $a\in\mathbb{F}_{1}$ תהא $A\in\mathbb{F}_{2}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{F}_{2}$ עבורה $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall z\in\mathcal{U}\backslash\left\{ a\right\} .\left|z-a\right|<\delta\Longrightarrow\left|f\left(z\right)-A\right|<\varepsilon$ אזי $\lim_{z\to a}f\left(z\right)=A$.

משפט היינה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$ פתוחה אזי $\left(\lim_{z\to a} f(z) = A\right) \iff \left(\forall b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.\left(b_n \to a\right) \implies \left(f\left(b_n\right) \to A\right)\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$ פתוחה ותהיינה $f,g : \mathcal{U} \to \mathbb{F}_2$ באשר $\lim_{z\to a} f(z) = A$ וכן $\lim_{z\to a} g(z) = B$ אזי

- $\lim_{z\to a} (f+g)(z) = A+B$.
- $\lim_{z\to a} (fg)(z) = AB$.
- נניח $B \neq 0$ אזי $\lim_{z\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{A}{B}$.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}$ פתוחה ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ באשר $\lim_{z\to a} f(z) = A$ אזי

- $\lim_{z\to a} \overline{f(z)} = \overline{A}$.
- $\lim_{z\to a} |f(z)| = |A|$.
- $\lim_{z\to a} \mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Re}(A)$.
- $\lim_{z\to a} \mathrm{Im}(f(z)) = \mathrm{Im}(A)$.

גבול אינסופי: תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ויהי $a \in \mathbb{C}$ אזי

- שאיפה לאינסוף בנקודה: אם $\forall M > 0.\exists\delta > 0.\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{a\}.|z-a| < \delta \implies M < |f(z)|$ אזי $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$.
- שאיפה לנקודה באינסוף: אם $\forall\varepsilon > 0.\exists R > 0.\forall z \in \mathbb{C}.R < |z| \implies |f(z) - a| < \varepsilon$ אזי $\lim_{z\to\infty} f(z) = a$.
- שאיפה לאינסוף באינסוף: אם $\forall M > 0.\exists R > 0.\forall z \in \mathbb{C}.R < |z| \implies M < |f(z)|$ אזי $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

פונקציה רציפה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$ פתוחה יהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $f : \mathcal{U} \to \mathbb{F}_2$ המקיימת $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$.

הערה: כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.

נגזרת: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$ פתוחה יהי $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{F}_2$ אזי $f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$.

פונקציה הולומורפית: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה אזי $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ גזירה על כל $\mathcal{U}$.

מסקנה: כל מניפולציות הנגזרת של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.

הערה: תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ נסמן $f = u + iv$ עבור $v,u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

טענה: תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ אזי (f גזירה)$\iff$(v,u גזירות).

למה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ גזירה אזי $(f' = 0) \iff (\exists c \in \mathbb{C}.f = c)$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ גזירה ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a)$.

מסקנה משוואות קושי־רימן: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ גזירה אזי $\left(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\right) \wedge \left(\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

הגדרה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ דיפרנציאבילית אזי

- $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.
- $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ גזירה אזי (f הולומורפית)$\iff\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0\right)$.

טענה: תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ אזי (f גזירה)$\iff(\exists c \in \mathbb{R}.f = c)$.

משפט: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ אזי (f גזירה ברציפות)$\iff\left(\left(u,v \in C^1(\mathcal{U})\right) \wedge \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\right) \wedge \left(\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)\right)$.

לפלסיאן: תהא $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ גזירה פעמיים אזי $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

פונקציה הרמונית: $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ גזירה פעמיים המקיימת $\Delta g = 0$.

טענה: תהא $f \in C^2(\mathbb{C},\mathbb{C})$ אזי u,v הרמוניות.

פונקציה צמודה הרמונית: תהא $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ אזי $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ עבורה $u + iv$ הולומורפית.

טענה: תהא $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ותהא $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ צמודה הרמונית ל־u אזי u צמודה הרמונית ל־$(-v)$.

טענה: יהי $\sum_{i=0}^{n} a_i z^i \in \mathbb{C}[z]$ אזי $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i z^i\right)' = \sum_{i=1}^{n} a_i i z^{i-1}$.

טענה: יהי $f \in \mathbb{R}[z]$ אזי $\forall z \in \mathbb{C}.f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

התכנסות טור: תהא $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{i=0}^{\infty} a_n$ עבורה $\sum_{i=0}^{n} a_n$ מתכנסת.

התכנסות נקודתית: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה ויהי $a \in \mathbb{C}$ אזי $\langle f_n : \mathcal{U} \to \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ עבורה $\langle f_n(a) \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ מתכנסת.

התכנסות במידה שווה (במ"ש): תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה ותהא $\langle f_n : \mathcal{U} \to \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ אזי $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ עבורה $\forall\varepsilon > 0.\exists N \in \mathbb{N}.\forall x \in \mathcal{U}.\forall n > N.|f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה ותהא $\langle f_n : \mathcal{U} \to \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ אזי (f מתכנסת במ"ש)$\iff$ $(\forall\varepsilon > 0.\exists N \in \mathbb{N}.\forall n,m \geq N.\forall z \in \mathcal{U}\,|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon)$.

טענה מבחן M של ויירשטראס להתכנסות: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה תהא $\langle u_n : \mathcal{U} \to \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ ותהא $M : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ באשר $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ וכן $\forall z \in \mathbb{C}. \forall n \in \mathbb{N}. |u_n(z)| \leq M_n$ אזי $\sum_{i=0}^{n} u_i$ מתכנסת בהחלט ובמ"ש.

טענה: תהא $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ותהא $\langle f_n \in C(\mathcal{U}) \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ המקיימת $f_n \xrightarrow{u} g$ אזי $g \in C(\mathcal{U})$.

טור חזקות: תהא $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ סדרה ויהי $b \in \mathbb{C}$ אזי $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-b)^i$.

משפט אבל: יהי $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ טור חזקות אזי קיים $R \in [0, \infty]$ המקיים

- הטור מתכנס בהחלט על $|z| < R$.
- יהי $0 \leq \rho < R$ אזי הטור מתכנס במ"ש על $|z| < \rho$.
- יהי $|z| > R$ אזי $\sum a_n z^n$ לא מתכנס.

טענה: יהי $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ טור חזקות אזי $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ הולומורפית על $\{|z| < R\}$ וכן $\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i\right)' = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i z^{i-1}$.

משפט קושי־הדמר: יהי $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ טור חזקות ויהי R רדיוס ההתכנסות אזי $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

טענה: יהיו $g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ פתרונות של המד"ר $(f'(z) = f(z)) \wedge (f(0) = 1)$ אזי $g = h$.

פונקציה מעריכית: נגדיר $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ להיות פתרון של המד"ר $(f'(z) = f(z)) \wedge (f(0) = 1)$.

טענה: $\exp(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}$.

מסקנה: $\exp$ מתכנסת על $\mathbb{C}$.

טענה: $e^0 = 1$, $(e^z)' = e^z$ על כל $\mathbb{C}$.

מסקנה: $\exp(z) = e^z$.

מסקנה: יהיו $a, b \in \mathbb{C}$ אזי $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$.

מסקנה: יהי $z \in \mathbb{C}$ אזי $e^z \neq 0$.

מסקנה: יהי $z \in \mathbb{C}$ אזי $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$.

קוסינוס: יהי $z \in \mathbb{C}$ אזי $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$.

סינוס: יהי $z \in \mathbb{C}$ אזי $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

מסקנה: e^z הינה $2\pi i$־מחזורית, $\cos, \sin$ הן 2π־מחזוריות.

טענה: על כל $\mathbb{C}$ מתקיים $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n)!}$, $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

מסקנה: על כל $\mathbb{C}$ מתקיים $\sin(z)' = \cos(z)$, $\cos(z)' = -\sin(z)$.

log: יהי $w \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ אזי $\log(w) = \text{sols}(e^z = w)$.

טענה: יהי $w \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ אזי $\log(w) = \{\log|w| + i\theta \mid \theta \in \arg(w)\}$.

חזקה: יהי $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ ויהי $b \in \mathbb{C}$ אזי $a^b = e^{b \log a}$.

ענף של arg: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום עבורו $0 \notin \mathcal{U}$ אזי $\alpha \in C(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ המקיימת $\forall z \in \mathcal{U}. \alpha(z) \in \arg(z)$.

ענף של log: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום עבורו $0 \notin \mathcal{U}$ אזי $\ell \in C(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ המקיימת $\forall z \in \mathcal{U}. \ell(z) \in \log(z)$.

ענף של $\sqrt[n]{}$: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום אזי $\rho \in C(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ המקיימת $\forall z \in \mathcal{U}. \rho(z) \in \sqrt[n]{z}$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום עבורו $0 \notin \mathcal{U}$ אזי (קיים ענף של $\arg$ על $\mathcal{U}$)$\Longleftrightarrow$(קיים ענף של $\log$ על $\mathcal{U}$).

טענה: בתחום $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ לא קיים ענף של $\log$.

טענה: יהי $\ell : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ ענף של $\log$ אזי ℓ הולומורפית וכן $\ell'(z) = \frac{1}{z}$.

טענה: יהי $\ell : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ ענף של $\sqrt[n]{}$ אזי ℓ הולומורפית וכן $\ell'(z) = \frac{1}{n\ell(z)^{n-1}}$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום אזי (קיים ענף של $\log$ על $\mathcal{U}$)$\Longrightarrow$(קיים ענף של $\sqrt[n]{}$ על $\mathcal{U}$).

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום עבורו $0 \notin \mathcal{U}$ אזי (קיים ענף של $\sqrt[n]{}$ על $\mathcal{U}$)$\Longrightarrow$(קיים ענף של $\log$ על $\mathcal{U}$).

טענה: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ ענף של $\log(1+z)$ בתחום $|z| < 1$.

אינטגרל: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע ותהא $f \in C(I, \mathbb{C})$ אזי $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I u(t)\,\mathrm{d}t + i\int_I v(t)\,\mathrm{d}t$.

טענה: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע ותהא $f \in C(I, \mathbb{C})$ אזי $\left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

מסילה: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע אזי $\gamma \in C(I, \mathbb{C})$.

מסילה חלקה למקוטעין: מסילה γ אשר חלקה עד כדי מספר סופי של נקודות ובהן קיימות נגזרות חד־צדדיות מכל סדר.

אינטגרל מסילתי: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע תהא $\gamma \in C^1(I, \mathbb{C})$ מסילה ותהא $f \in C(\gamma(I), \mathbb{C})$ אזי $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_I f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$.

רפרמטריזציה: תהא $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ מסילה ותהא $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ רציפה ועולה עבורה $\varphi(c) = a$ וכן $\varphi(d) = b$ אזי $\gamma \circ \varphi$.

טענה: תהא $\gamma : (a,b) \to \mathbb{C}$ מסילה ותהא $\gamma \circ \varphi$ רפרמטריזציה גזירה ברציפות אזי $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z$.

המסילה ההפוכה: תהא $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ מסילה אזי $-\gamma : [-b,-a] \to \mathbb{C}$ המוגדרת $-\gamma(t) = \gamma(-t)$.

טענה: תהא γ מסילה אזי $\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$.

סכום מסילות: תהיינה $\gamma_i : [a_i, a_{i+1}] \to \mathbb{C}$ מסילות אזי $\left(\sum \gamma_i\right)(t) = \begin{cases} \gamma_0(t) & t\in[a_0,a_1] \\ \vdots \\ \gamma_n(t) & t\in[a_n,a_{n+1}] \end{cases}$.

טענה: תהיינה $\gamma_i : [a_i, a_{i+1}] \to \mathbb{C}$ מסילות אזי $\sum \gamma_i$ מסילה.

מסקנה: תהיינה $\gamma_i : [a_i, a_{i+1}] \to \mathbb{C}$ מסילות אזי $\int_{\sum \gamma_i} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum \int_{\gamma_i} f(z)\,\mathrm{d}z$.

מסילה סגורה: מסילה $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ המקיימת $\gamma(a) = \gamma(b)$.

סימון: תהא $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ מסילה סגורה אזי $\oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$.

אינטגרל לפי אורך קשת: תהא γ מסילה אזי $\int_{\gamma} f(z)\,|\mathrm{d}z| = \int_I f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$.

הערה: מקובל מאוד גם הסימון $\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}s = \int_{\gamma} f(z)\,|\mathrm{d}z|$.

אורך מסילה: תהא γ מסילה אזי $\int_{\gamma} |\mathrm{d}z|$.

טענה: תהא γ מסילה אזי $\int_{\gamma} (f+g)(z)\,|\mathrm{d}z| = \int_{\gamma} f(z)\,|\mathrm{d}z| + \int_{\gamma} g(z)\,|\mathrm{d}z|$.

טענה: תהא γ מסילה ותהא $\gamma \circ \varphi$ רפרמטריזציה אזי $\int_{\gamma} f(z)\,|\mathrm{d}z| = \int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,|\mathrm{d}z|$.

טענה: תהא γ מסילה אזי $\left|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_{\gamma} |f(z)|\,|\mathrm{d}z|$.

מסקנה: תהא $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ מסילה אזי $\left|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \left(\int_{\gamma} |\mathrm{d}z|\right) \max_{z\in\gamma([a,b])} |f(z)|$.

אינטגרל על פי צמוד: תהא γ מסילה אזי $\int_{\gamma} f(z)\,\overline{\mathrm{d}z} = \overline{\int_I \overline{f}(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t}$.

הגדרה: תהא γ מסילה אזי

- $\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma} f(z)\,\overline{\mathrm{d}z}\right)$.
- $\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2i}\left(\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma} f(z)\,\overline{\mathrm{d}z}\right)$.

טענה: תהא γ מסילה אזי $\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \left(\int_{\gamma} u(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_{\gamma} v(x,y)\,\mathrm{d}y\right) + i\left(\int_{\gamma} u(x,y)\,\mathrm{d}y - \int_{\gamma} v(x,y)\,\mathrm{d}x\right)$.

הערה: מהמשוואה מלעיל ניתן לחשוב על כך שמתקיים $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ ותהא $g : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ הולומורפית עבורה $g' = f$ אזי לכל מסילה $\gamma : [a,b] \to \mathcal{U}$ מתקיים $\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$.

משפט קושי למלבן: יהי $R \subseteq \mathbb{C}$ מלבן סגור תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה עבורה $R \subseteq \mathcal{U}$ ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ הולומורפית אזי $\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

משפט קושי למלבן משופר: יהי $R \subseteq \mathbb{C}$ מלבן סגור תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה עבורה $R \subseteq \mathcal{U}$ יהיו $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_k\} \subseteq R\backslash\partial R$ ותהא $f : \mathcal{U}\backslash\{\zeta_1, \ldots, \zeta_k\} \to \mathbb{C}$ הולומורפית עבורה לכל $i \in [k]$ מתקיים $\lim_{z\to\zeta_i} (z-\zeta_i) f(z) = 0$ אזי $\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

למה: תהא מסילה $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ סגורה חלקה למקוטעין ותהא $a \in \mathbb{C}\backslash\gamma([a,b])$ אזי קיים $k \in \mathbb{Z}$ עבורו $\int_{\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 2\pi i k$.

מספר הליפופים: תהא מסילה $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ סגורה חלקה למקוטעין ותהא $a \in \mathbb{C}\backslash\gamma([a,b])$ אזי מספר הליפופים של γ סביב a הינו $n(\gamma,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z-a}$.

ענף של $\log(f)$: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ הולומורפית אזי $\ell \in C(\mathcal{U},\mathbb{C})$ המקיימת $\forall z \in \mathcal{U}.\ell(z) \in \log(f(z))$.

ענף של $\sqrt[n]{f}$: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ הולומורפית אזי $\rho \in C(\mathcal{U},\mathbb{C})$ המקיימת $\forall z \in \mathcal{U}.\rho(z) \in \sqrt[n]{f(z)}$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ הולומורפית ויהי $\ell : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ ענף של $\log(f)$ אזי ℓ הולומורפית וכן $\ell'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $\ell : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ ענף של $\sqrt[n]{f}$ אזי ℓ הולומורפית וכן $\ell'(z) = \frac{f'(z)}{n\ell(z)^{n-1}}$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $f \in C^1(\mathcal{U},\mathbb{C}\backslash\{0\})$ אזי

- (קיים ענף של $\log(f)$ על $\mathcal{U}$)$\Longleftrightarrow$(לכל γ מסילה סגורה גזירה ברציפות למקוטעין מתקיים $n(f\circ\gamma,0) = 0$).
- (קיים ענף של $\sqrt[n]{f}$ על $\mathcal{U}$)$\Longleftrightarrow$(לכל γ מסילה סגורה גזירה ברציפות למקוטעין מתקיים $n(f\circ\gamma,0) \in n\mathbb{Z}$).

טענה: תהא $f \in C([\alpha,\beta],\mathbb{C})$ נגדיר $F : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ כך $F(t) = \int_{\alpha}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ אזי F גזירה וכן $\frac{dF}{dt} = f$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $f \in C(\mathcal{U},\mathbb{C})$ עבורה לכל γ סגורה מתקיים $\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ אזי f בעלת קדומה.

למה: יהי $D \subseteq \mathbb{C}$ דיסק תהא $f : D \to \mathbb{C}$ הולומורפית אזי קיימת $F : D \to \mathbb{C}$ הולומורפית המקיימת $F' = f$.

משפט קושי לדיסק: יהי $D \subseteq \mathbb{C}$ דיסק פתוח תהא $f : D \to \mathbb{C}$ הולומורפית ותהא $\gamma : [a,b] \to D$ מסילה סגורה אזי $\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

משפט קושי לדיסק משופר: יהי $D \subseteq \mathbb{C}$ דיסק פתוח יהיו $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_k\} \subseteq D$ תהא $f : D\backslash\{\zeta_1, \ldots, \zeta_k\} \to \mathbb{C}$ הולומורפית עבורה לכל $i \in [k]$ מתקיים $\lim_{z\to\zeta_i} (z-\zeta_i) f(z) = 0$ ותהא $\gamma : [\alpha,\beta] \to D\backslash\{\zeta_1, \ldots, \zeta_k\}$ מסילה סגורה אזי $\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

טענה: יהי $D \subseteq \mathbb{C}$ דיסק פתוח תהא $\gamma : [\alpha,\beta] \to D$ מסילה סגורה ויהי $a \in \mathbb{C}\backslash D$ אזי $n(\gamma,a) = 0$.

טענה: תהא $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ מסילה ויהיו $a,b \in \mathbb{C}\backslash\gamma([\alpha,\beta])$ עבורן $[a,b]$ לא נחתכת עם γ אזי $n(\gamma,a) = n(\gamma,b)$.

משפט נוסחת האינטגרל של קושי: יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ דיסק פתוח תהא $\gamma:[\alpha,\beta]\to D$ מסילה סגורה תהא $f:D\to\mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $a\in D\backslash\gamma([\alpha,\beta])$ אזי $n(\gamma,a)\cdot f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$.

מסקנה משפט הערך הממוצע: יהי $r>0$ יהי $a\in\mathbb{C}$ ותהא $f:B_a(r)\to\mathbb{C}$ הולומורפית אזי $f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{it})\,\mathrm{d}t$.

סימון: יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ דיסק פתוח תהא $\gamma:[\alpha,\beta]\to D$ מסילה סגורה תהא $\varphi\in C(\gamma([\alpha,\beta]),\mathbb{C})$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $F_n:D\backslash\gamma([\alpha,\beta])\to\mathbb{C}$ כך $F_n(z)=\int_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^n}\mathrm{d}\zeta$.

טענה: יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ דיסק פתוח תהא $\gamma:[\alpha,\beta]\to D$ מסילה סגורה תהא $\varphi\in C(\gamma([\alpha,\beta]),\mathbb{C})$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי

- F_n רציפה.
- F_n גזירה.
- $F_n'=n\cdot F_{n+1}$.

מסקנה: יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ דיסק פתוח ותהא $f:D\to\mathbb{C}$ הולומורפית אזי $f\in C^{\infty}(D)$.

מסקנה: יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ דיסק פתוח תהא $f:D\to\mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $C_r\subseteq D$ מעגל סביב z אזי $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$.

מסקנה: יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ דיסק פתוח ותהא $f:D\to\mathbb{C}$ בעלת קדומה אזי f הולומורפית.

מסקנה משפט מוררה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ עבורה לכל $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathcal{U}$ מתקיים $\int_{\gamma}f(z)\,\mathrm{d}z=0$ אזי f הלומורפית.

פונקציה שלמה: פונקציה הולומורפית על $\mathbb{C}$.

משפט ליוביל: תהא $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ הלומורפית וחסומה אזי f קבועה.

טענה חסם קושי לנגזרת: יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ דיסק פתוח תהא $f:D\to\mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $C_r\subseteq D$ מעגל סביב z אזי $\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{n!\max_{C_r}|f|}{r^n}$.

מסקנה המשפט היסודי של האלגברה: יהי $p\in\mathbb{C}[x]$ עבורו $\deg(p)\ge 1$ אזי $\exists\alpha\in\mathbb{C}.p(\alpha)=0$.

נקודה יחודית/יחודיות/סינגולריות: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה אזי $a\in\mathcal{U}$ עבורה $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ הולומורפית.

נקודת יחודיות סליקה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה אזי $a\in\mathcal{U}$ יחודיות של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ עבורה קיימת הרחבה הולומורפית $g:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ המקיימת $\forall z\in\mathcal{U}\backslash\{a\}.g(z)=f(z)$.

הערה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה ותהא $a\in\mathcal{U}$ סליקה עבור $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ הולומורפית אזי קיימת הרחבה יחידה.

משפט: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ הולומורפית אזי (a סליקה)$\Longleftrightarrow$($\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0$).

משפט טיילור: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה תהא $a\in\mathcal{U}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי קיימת $f_n:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית עבורה $f(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k+f_n(z)(z-a)^n$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה תהא $a\in\mathcal{U}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי C מעגל סביב a אזי לכל $z\in C$ מתקיים $f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^n(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta$.

אפס: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית אזי $a\in\mathcal{U}$ עבורה $f(a)=0$.

אפס מסדר n: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית אזי $a\in\mathcal{U}$ עבורה $n=\min\left\{j\in\mathbb{N}\;\middle|\;f^{(j)}(a)\ne 0\right\}$.

למה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית תהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $\forall n\in\mathbb{N}.f^{(n)}(a)=0$ ויהי $r>0$ עבורו $\overline{B_r(a)}\subseteq\mathcal{U}$ אזי $f_{\restriction_{B_r(a)}}=0$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $\forall n\in\mathbb{N}.f^{(n)}(a)=0$ אזי $f=0$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית עבורה $f\ne 0$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אפס אזי הסדר של a סופי.

אפס מבודד: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית אזי אפס $a\in\mathcal{U}$ עבורו $\exists r>0.\forall z\in B_r(a)\backslash\{a\}.f(z)\ne 0$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית עבורה $f\ne 0$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אפס אזי a אפס מבודד.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהיינה $f,g:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית ותהא $E\subseteq\mathcal{U}$ בעלת נקודת הצטברות ב־$\mathcal{U}$ נניח כי $f=g$ על E אזי $f=g$ על $\mathcal{U}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית ותהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ פתוחה עבורה $f=0$ על $\mathcal{O}$ אזי $f=0$ על $\mathcal{U}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית ותהא γ מסילה עבורה $f=0$ על γ אזי $f=0$ על $\mathcal{U}$.

נקודת קוטב: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום אזי $a\in\mathcal{U}$ יחודית של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ עבורה קיימת $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}\backslash\{a\}$ סביבה של a עבורה $\frac{1}{f}$ מוגדרת היטב בעלת יחודיות סליקה ב־a וכן $\frac{1}{f}(a)=0$.

הערה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $a\in\mathcal{U}$ יחודית של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ ותהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}\backslash\{a\}$ סביבה של a עבורה $\frac{1}{f}$ מוגדרת היטב בעלת יחודיות סליקה ב־a וכן $\frac{1}{f}(a)\ne 0$ אזי a יחודית סליקה של f.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $a\in\mathcal{U}$ יחודית של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ אזי (a קוטב)$\Longleftrightarrow$($\lim_{z\to a}f(z)=\infty$).

קוטב מסדר n: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום אזי $a\in\mathcal{U}$ קוטב של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ אשר אפס מסדר n של $\frac{1}{f}$.

קוטב פשוט: יהי $\mathbb{C} \supseteq \mathcal{U}$ תחום אזי $a \in \mathcal{U}$ קוטב מסדר 1 של $f : \mathcal{U} \backslash \{a\} \to \mathbb{C}$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ קוטב מסדר n של $f : \mathcal{U} \backslash \{a\} \to \mathbb{C}$ אזי קיימת $f_n : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ הולומורפית עבורה $f(z) = f_n(z)(z-a)^{-n}$ על $z \in \mathcal{U} \backslash \{a\}$.

פונקציה מרומורפית: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $E \subseteq \mathcal{U}$ אזי $f : \mathcal{U} \backslash E \to \mathbb{C}$ הולומורפית עבורה כל $a \in E$ הינה קוטב של f.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהיינה $f, g : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ הולומורפיות באשר $g \neq 0$ אזי $\frac{f}{g}$ מרומורפית.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהיינה $f, g : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ הולומורפיות באשר $g \neq 0$ אזי

- $\#\left\{\text{אפסים של } \frac{f}{g}\right\} \geq \#\left\{\text{אפסים של } f\right\}$.
- $\#\left\{\text{הקטבים של } \frac{f}{g}\right\} \geq \#\left\{\text{אפסים של } g\right\}$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהיינה $f, g : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ מרומורפיות אזי $f + g, f \cdot g$ מרומורפיות.

יחודיות עיקרית: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום אזי $a \in \mathcal{U}$ יחודיות של $f : \mathcal{U} \backslash \{a\} \to \mathbb{C}$ אשר אינה סליקה ואינה קוטב של f.

משפט ויירשטראס: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $a \in \mathcal{U}$ יחודיות עיקרית של $f : \mathcal{U} \backslash \{a\} \to \mathbb{C}$ אזי לכל $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ סביבה של a מתקיים כי $f(\mathcal{O} \backslash \{a\})$ צפופה ב־$\mathbb{C}$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $a \in \mathcal{U}$ יחודיות מבודדת של $f : \mathcal{U} \backslash \{a\} \to \mathbb{C}$ אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

- $f = 0$.
- קיים $k \in \mathbb{Z}$ עבורו לכל $h > k$ מתקיים $\lim_{z \to a} |z-a|^h |f(z)| = 0$ וכן לכל $h < k$ מתקיים $\lim_{z \to a} |z-a|^h |f(z)| = \infty$.
- לכל $h \in \mathbb{R}$ מתקיים $\lim_{z \to a} |z-a|^h |f(z)| \notin \{0, \infty\}$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהיינה $f_n : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ הולומורפיות ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ עבורה $f_n \xrightarrow{p.w.} f$ וכן לכל $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{U}$ קומפקטית מתקיים $f_n \xrightarrow{u} f$ אזי f הולומורפית וכן $f'_n \xrightarrow{p.w.} f'$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהיינה $f_n : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ הולומורפיות ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ עבורה $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f$ במ"ש אזי $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n = f'$.

משפט טיילור: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ הולומורפית ותהא $a \in \mathcal{U}$ אזי $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ על $B_{\sup\{r \mid B_r(a) \subseteq \mathcal{U}\}}(a)$.

פונקציה אנליטית: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}$ תחום אזי $f \in C^{\infty}(\mathcal{U}, \mathbb{F})$ עבורה לכל $a \in \mathcal{U}$ קיימת סביבה $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ של a בה $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ אזי (f הולומורפית)$\iff$(f אנליטית).

טור לורן: יהי $c \in \mathbb{C}$ ותהא $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$.

טענה: יהי $c \in \mathbb{C}$ ותהא $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ אזי קיימים $R_1, R_2 \in \mathbb{R}$ עבורם $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$ מתכנס בטבעת $R_1 < |z-c| < R_2$ וכן לכל $\mathcal{K} \subseteq \{R_1 < |z-c| < R_2\}$ קומפקטית $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$ מתכנס במ"ש ובהחלט.

משפט: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ טבעת תהא $c \in \mathbb{C}$ ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ הולומורפית אזי קיימת $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ עבורה $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$ על $\mathcal{U}$.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ טבעת תהא $c \in \mathbb{C}$ ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ הולומורפית אזי מקדמי טור לורן של f הם $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ טבעת תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $c \in \mathcal{U}$ אפס מסדר $m \in \mathbb{N}$ אזי $f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_{n-m} (z-c)^n$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ טבעת תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $c \in \mathcal{U}$ קוטב מסדר $m \in \mathbb{N}$ אזי $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_{n+m} (z-c)^n$.

מסילה כוויצה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום אזי γ מסילה סגורה עבורה $\forall a \in \mathbb{C} \backslash \mathcal{U}. n(\gamma, a) = 0$.

תחום פשוט קשר: תחום $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ עבורו כל מסילה γ סגורה הינה כוויצה.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום אזי ($\mathcal{U}$ פשוט קשר)$\iff$($\hat{\mathbb{C}} \backslash \mathcal{U}$ קשירה).

מסילות הומוטופיות: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום אזי מסילות $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \mathcal{U}$ עבורן $(\gamma_0(a) = \gamma_1(a)) \wedge (\gamma_0(b) = \gamma_1(b))$ וכן קיימת $\eta \in C([a, b] \times [0, 1], \mathcal{U})$ עבורה $(\eta(a, s) = \gamma_0(a)) \wedge (\eta(b, s) = \gamma_0(b)) \wedge (\eta(t, 0) = \gamma_0(t)) \wedge (\eta(t, 1) = \gamma_1(t))$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא γ מסילה סגורה אזי (γ כוויצה)$\iff$(γ הומוטופית למסילה קבועה).

משפט קושי: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ הולומורפית ותהא γ מסילה כוויצה אזי $\int_{\gamma} f(z) \mathrm{d}z = 0$.

מסקנה נוסחת האינטגרל של קושי: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהא $\gamma : [\alpha, \beta] \to D$ מסילה כוויצה תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $a \in \mathcal{U} \backslash \gamma([\alpha, \beta])$ אזי $n(\gamma, a) \cdot f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} \mathrm{d}z$.

מסקנה נוסחת הנגזרת של קושי: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $C_r \subseteq D$ מעגל כוויץ סביב z אזי $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$.

טענה: יהי $a \in \mathbb{C}$ תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ טבעת סביב a תהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ הולומורפית ויהיו C_1, C_2 מעגלים ב־$\mathcal{U}$ סביב a אזי $\int_{C_1} f(z) \mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z) \mathrm{d}z$.

טענה: יהי $a\in\mathbb{C}$ תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ טבעת סביב a תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית תהא γ מסילה סגורה עבורה $n(\gamma,a)=1$ ויהי C מעגל ב־$\mathcal{U}$ סביב a אזי $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$.

מסקנה: יהי $a\in\mathbb{C}$ תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ טבעת סביב a תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית תהא γ מסילה סגורה ויהי C מעגל ב־$\mathcal{U}$ סביב a אזי $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=n(\gamma,a)\cdot\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$.

שארית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $a\in\mathbb{C}$ יחודיות מבודדת של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ ויהי C מעגל ב־$\mathcal{U}$ סביב a ללא נקודות יחודיות נוספות בתוכו אזי $\text{Res}_a(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $a\in\mathbb{C}$ יחודיות מבודדת של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ ותהא $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$ טבעת סביב a אזי $f(z)-\frac{\text{Res}_a(f)}{z-a}$ בעלת קדומה ב־$\mathcal{V}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $a\in\mathbb{C}$ יחודיות סליקה של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ אזי $\text{Res}_a(f)=0$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $c\in\mathbb{C}$ יחודיות מבודדת של $f:\mathcal{U}\backslash\{c\}\to\mathbb{C}$ תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$ טבעת סביב c ויהי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n$ טור לורן של f ב־$\mathcal{V}$ אזי $\text{Res}_a(f)=a_{-1}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום יהי $a\in\mathbb{C}$ קוטב פשוט מבודד של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ אזי $\text{Res}_a(f)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$.

משפט השאריות: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $E\subseteq\mathcal{U}$ בת מנייה לכל היותר תהא $f:\mathcal{U}\backslash E\to\mathbb{C}$ הולומורפית ותהא $\gamma:[c,d]\to\mathcal{U}\backslash E$ כיווצה ב־$\mathcal{U}$ אזי $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{a\in E}n(\gamma,a)\cdot\text{Res}_a(f)$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $a\in\mathcal{U}$ אפס אזי סדר a הינו $\text{ord}_f(a)$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ויהי $a\in\mathcal{U}$ קוטב של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ אזי סדר a הינו $\text{ord}_f(a)$.

משפט עקרון הארגומנט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ מורומורפית תהא $\gamma:[c,d]\to\mathcal{U}\backslash\{\text{אפסים וקטבים של } f\}$ מסילה כוויצה ב־$\mathcal{U}$ אזי $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=\sum_{a\in\{\text{אפסים של } f\}}\text{ord}_f(a)\cdot n(\gamma,a)-\sum_{b\in\{\text{קטבים של } f\}}\text{ord}_f(b)\cdot n(\gamma,b)$.

מסילה תוחמת קבוצה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא γ מסילה סגורה אזי $\Omega\subseteq\mathcal{U}$ עבורה $\forall z\in\mathbb{C}.\left(n(\gamma,z)=1\right)\iff(z\in\Omega)$.

משפט רושה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא γ כוויצה עבורה $\forall z\in\mathbb{C}\backslash\gamma([a,b]).n(\gamma,z)\in\{0,1\}$ תהא $\Omega\subseteq\mathcal{U}$ נתחמת על ידי γ ותהיינה $f,g:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפיות עבורן $\forall z\in\gamma([a,b]).|f(z)-g(z)|<|f(z)|$ אזי $\#\{\text{אפסים של } f \text{ ב־}\Omega\}=\#\{\text{אפסים של } g\text{ ב־}\Omega\}$.

תחום טוב: קבוצה $G\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה חסומה עבורה קיימות $\gamma_1\ldots\gamma_n$ מסילות זרות סגורות פשוטות וחלקות למקוטעין המקיימות $\forall j\in[n].\forall t\in\text{Dom}(\gamma_j).\exists\varepsilon>0.\gamma_j(t)\cdot i\cdot\varepsilon\in G$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום יהי $G\subseteq\mathcal{U}$ תחום טוב ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית אזי $\int_{\partial G}f(z)\,\mathrm{d}z=0$.

משפט עקרון המקסימום: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית תהא $a\in\mathcal{U}$ ויהי $r>0$ עבורם $\overline{B}_r(a)\subseteq\mathcal{U}$ וכן $|f(a)|=\max_{z\in\overline{B}_r(a)}|f(z)|$ אזי f קבועה.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית התב"ש

- $|f|$ חסרת מקסימום מקומי.
- (f לא קבועה)$\Longleftarrow$($|f|$ חסרת מקסימום ב־$\mathcal{U}$).
- נניח כי $\overline{\mathcal{U}}$ חסומה וכן $f:\overline{\mathcal{U}}\to\mathbb{C}$ רציפה אזי $\max_{z\in\overline{\mathcal{U}}}|f(z)|$ מתקבל ב־$\partial\overline{\mathcal{U}}$.

מסקנה עקרון המינימום: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית תהא $a\in\mathcal{U}$ ויהי $r>0$ עבורם $\overline{B}_r(a)\subseteq\mathcal{U}$ וכן $0<|f(a)|=\min_{z\in\overline{B}_r(a)}|f(z)|$ אזי f קבועה.

מסקנה הלמה של שוורץ: תהא $f:B_1(0)\to\mathbb{C}$ הולומורפית עבורה $|f|\le1$ וכן $f(0)=0$ אזי

- $\forall z\in B_1(0).|f(z)|\le|z|$.
- $|f'(0)|\le1$.
- נניח כי קיימת $a\in B_1(0)\backslash\{0\}$ עבורה $|f(a)|=|a|$ אזי קיים $\alpha\in\mathbb{R}$ עבורו $f(z)=e^{i\alpha}z$.

משפט ההעתקה הפתוחה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית לא קבועה אזי $f(\mathcal{U})$ פתוחה.

טענה: יהיו $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ אזי ($\frac{az+b}{cz+d}$ קבועה)$\Longleftrightarrow$($ad-bc=0$).

העתקת מוביוס: יהיו $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ עבורן $ad-bc\neq0$ אזי $f:\mathbb{C}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}\to\mathbb{C}$ המוגדרת $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$.

הרחבת העתקת מוביוס: יהיו $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ עבורן $ad-bc\neq0$ אזי $f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ המקיימת $f(z)=\begin{cases}\frac{az+b}{cz+d} & z\in\mathbb{C}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}\\ \infty & z=-\frac{d}{c}\\ \frac{a}{c} & z=\infty\end{cases}$.

טענה: תהא $f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ העתקת מוביוס אזי f רציפה חח"ע ועל.

העתקת מוביוס אלמנטרית: $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ עבורה

- מתיחה: $\exists\lambda\in\mathbb{R}_{>0}.f(z)=\lambda z$.
- סיבוב: $\exists\theta\in(-\pi,\pi].f(z)=e^{i\theta}z$.

- הזזה: $\exists a \in \mathbb{C}.f\left(z\right)=z+a$.
- היפוך: $f\left(z\right)=\frac{1}{z}$.

טענה: תהא $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ העתקת מוביוס אזי קיימות $g_{1},\ldots,g_{n}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ העתקות מוביוס אלמנטריות עבורן $f=g_{1}\circ\ldots\circ g_{n}$.

מעגל מוכלל: מעגל או ישר.

טענה: תהא $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ העתקת מוביוס ויהי $A\subseteq\mathbb{C}$ מעגל מוכלל אזי $f\left(A\right)$ מעגל מוכלל.

טענה: תהיינה $a,b,c\in\hat{\mathbb{C}}$ שונות אזי קיימת ויחידה $f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ העתקת מוביוס עבורה $f\left(0\right)=a$ וכן $f\left(1\right)=b$ וכן $f\left(\infty\right)=c$.

מסקנה: יהיו $A,B\subseteq\mathbb{C}$ מעגלים מוכללים אזי קיימת $f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ העתקת מוביוס עבורה $f\left(A\right)=B$.

בונוסים

מטריצת השכנויות: יהי G גרף על n קודקודים אזי $A \in M_n(\mathbb{Z}_2)$ המקיים $(\{i,j\} \in E(G)) \iff \left((A)_{i,j} = 1\right)$.

טענה: יהי G גרף k־רגולרי אזי A לכסינה וכן $\text{spec}(A) \subseteq \mathbb{R}$.

טענה: יהי G גרף k־רגולרי ויהי $\lambda \in \text{spec}(A)$ אזי $|\lambda| \le k$.

טענה: יהי G גרף k־רגולרי אזי $k \in \text{spec}(A)$.

משפט: יהי G גרף k־רגולרי אזי (G קשיר)$\iff (r_g(k) = 1)$.

משפט: תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ המקיימת $\forall z \in \mathbb{C}. f(z)^2 = z$ אזי f אינה רציפה ב־$\mathbb{C}$.

משפט המשפט היסודי של האלגברה: יהי $p \in \mathbb{C}[x]$ עבורו $\deg(p) \ge 1$ אזי $\exists \alpha \in \mathbb{C}. p(\alpha) = 0$.

אפס של פולינום: יהי $p \in \mathbb{C}[x]$ עבורו $\deg(p) = k$ וכן $p(z) = a\prod(z - a_i)^{\ell_i}$ אזי $\{a_i\}$.

סדר של אפס של פולינום: יהי $p \in \mathbb{C}[x]$ עבורו $\deg(p) = k$ וכן $p(z) = a\prod(z - a_i)^{\ell_i}$ יהי a_i אפס אזי ℓ_i.

פונקציה רציונלית: יהיו $p, q \in \mathbb{C}[x]$ אזי $\frac{p}{q}$.

סדר של פונקציה רציונלית: יהיו $p, q \in \mathbb{C}[x]$ אזי $\text{ord}\left(\frac{p}{q}\right) = \max\{\deg(p), \deg(q)\}$.

הגדרה: יהיו $p, q \in \mathbb{C}[x]$ זרים ויהי $a \in \mathbb{C}$ אזי

- קוטב מסדר m של $\frac{p}{q}$: אפס של q מסדר m.
- אפס מסדר m של $\frac{p}{q}$: אפס של p מסדר m.

הגדרה: יהיו $p, q \in \mathbb{C}[x]$ זרים אזי

- אם $\deg(p) > \deg(q)$ אזי ∞ קוטב של $\frac{p}{q}$ מסדר $\deg(p) - \deg(q)$.
- אם $\deg(p) < \deg(q)$ אזי ∞ אפס של $\frac{p}{q}$ מסדר $\deg(q) - \deg(p)$.

הגדרה: תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ רציונלית אזי נרחיבה לפונקציה $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ כך

- יהי $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ קוטב של f אזי $f(z) = \infty$.
- נניח כי ∞ אפס של f אזי $f(\infty) = 0$.
- אם ∞ אינו קוטב ואינו אפס אזי $f(\infty) = \frac{a_n}{b_n}$ באשר a_n, b_n המקדמים המובילים של הפולינומים של הפולינומים בהתאמה.

טענה: תהא $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ רציונלית אזי $\text{ord}(f) = \#\{f \text{ קטבים של}\} = \#\{f \text{ אפסים של}\}$.

טענה: תהא $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ רציונלית ויהי $a \in \hat{\mathbb{C}}$ אזי

- (a אפס של f)$\iff(\lim_{z\to a} f(z) = 0)$.
- (a קוטב של f)$\iff(\lim_{z\to a} f(z) = \infty)$.

מסקנה: תהא $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ רציונלית ויהי $a \in \hat{\mathbb{C}}$ אזי

- (a אפס של f מסדר k)$\iff$($\frac{1}{a}$ אפס של $\frac{1}{f}$ מסדר k).
- (a קוטב של f מסדר k)$\iff$($\frac{1}{a}$ קוטב של $\frac{1}{f}$ מסדר k).

משפט פירוק סינגולרי: תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ רציונלית אזי קיים ויחיד $g \in \mathbb{C}[x]$ ללא מקדם חופשי וכן $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ רציונלית ללא קוטב ב־∞ עבורן $f = g + h$.

החלק הסינגולרי ב־∞: תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ רציונלית ויהי $f = g + h$ פירוק סינגולרי אזי $g_\infty = g$.

החלק הסינגולרי ב־α: תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ רציונלית נסמן $\tilde{f}(z) = f\left(\alpha + \frac{1}{z}\right)$ ויהי $\tilde{f} = \tilde{g} + \tilde{h}$ פירוק סינגולרי אזי $g_\alpha(z) = \tilde{g}\left(\frac{1}{z-\alpha}\right)$.

טענה: תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ רציונלית ויהי $\alpha \in \hat{\mathbb{C}}$ קוטב אזי g_α בעלת ערך סופי על $\hat{\mathbb{C}} \backslash \{\alpha\}$ וכן $g_\alpha(\alpha) = \infty$.

מסקנה: תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ רציונלית ויהי $\alpha \in \mathbb{C}$ קוטב אזי $f - g_\alpha$ חסרת קוטב ב־α.

משפט פירוק לשבריים חלקיים: תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ רציונלית עם פירוק סינגולרי $f = g + h$ ויהיו $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{C}$ קטבים אזי קיים $c \in \mathbb{C}$ עבורו $f = (g + c) + \sum_{k=1}^{n} g_{\alpha_k}$.

הקוטב הדרומי: נסמן ב־$\mathbb{R}^3$ את $S = (0, 0, -1)$.

הטלה סטריאוגרפית מהדרום: נגדיר $T : \mathbb{C} \to \mathbb{S}^2 \backslash \{S\}$ כך $T(x + iy) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2+1}\right)$.

הערה: במרחב $\mathbb{R}^3$ נגדיר את $\mathbb{C}$ להיות שני הצירים הראשונים אזי $T(p) = \text{line}_{p,S} \cap \mathbb{S}^1$.

היטל מרקטור: נגדיר $p : \left[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}\right] \times [-\infty, \infty] \to \mathbb{S}^2 \backslash \{N, S\}$ רציפה כך $p(x + iy) = e^{i(x+iy)}$.

טענה: $p\restriction_{\left(-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}\right] \times [-\infty, \infty]}$ חח"ע ועל.

פונקציה קונפורמית: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ דיפרנציאבילית עבורה לכל $a \in \mathbb{R}^2$ מתקיים כי $\mathcal{D}_f(a)$ קונפורמית.

פונקציה קונפורמית: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{S}^2$ דיפרנציאבילית עבורה לכל $p\in\mathbb{R}^2$ קיימת $\{0\}\setminus(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ עבורה $\mathcal{D}_f\left(p\right)=\begin{pmatrix} a & f_2(p)c-f_3(p)b \\ b & f_3(p)a-f_1(p)c \\ c & f_1(p)b-f_2(p)a \end{pmatrix}$.

הערה: תהא $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{S}^2$ קונפורמית אזי $f\left(p\right)\times\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_2(p)c-f_3(p)b \\ f_3(p)a-f_1(p)c \\ f_1(p)b-f_2(p)a \end{pmatrix}$.

טענה: תהא $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ קונפורמית ותהא $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{S}^2$ קונפורמית אזי $g\circ f$ קונפורמית.

טענה: p קונפורמית, T קונפורמית.

מסקנה: $T\circ p$ קונפורמית.

עיוות שטח: תהא $p\in\mathbb{R}^2$ אזי $\alpha_T\left(p\right)=\left\|\frac{\partial T}{\partial x}\left(p\right)\right\|\left\|\frac{\partial T}{\partial y}\left(p\right)\right\|$.

טענה: תהא $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2$ אזי $\alpha_T\left(x,y\right)=\frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}$.

מסילה פשוטה: מסילה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ עבורה $\gamma_{\restriction_{(a,b]}},\gamma_{\restriction_{[a,b)}}$ חח"ע.

משפט ז'ורדן: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה פשוטה וסגורה אזי קיימים $\Omega_1,\Omega_2\subseteq\mathbb{C}\backslash\gamma\left([a,b]\right)$ קשירים מסילתית עבורם $\Omega_1\uplus\Omega_2=\mathbb{C}\backslash\gamma\left([a,b]\right)$ וכן Ω_1 חסום וכן Ω_2 אינו חסום.

מסקנה: תהא γ מסילה פשוטה סגורה וחלקה למקוטעין ויהי Ω התחום הכלוא על ידי γ אזי מתקיים $\text{Vol}\left(\Omega\right)=\frac{1}{2}\int_\gamma x\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\int_\gamma y\mathrm{d}x$.

משפט: תהא γ מסילה פשוטה סגורה וחלקה למקוטעין ויהי Ω התחום הכלוא על ידי γ אזי $\text{Vol}\left(\Omega\right)=-\frac{i}{2}\int_\gamma\overline{z}\mathrm{d}z$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי מתקיים $\int_0^{2\pi}\left(\cos\left(t\right)\right)^{2n}\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{4^n}\cdot\binom{2n}{n}$.

סדרה חשבונית: יהי $a\in\mathbb{Z}$ ויהי $d\in\mathbb{N}_+$ אזי $a+d\mathbb{Z}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי לא קיימים $a_1\ldots a_n\in\mathbb{Z}$ ולא קיימים $d_1\ldots d_n\in\mathbb{N}_+$ שונים עבורם $\mathbb{Z}=\biguplus_{k=1}^n\left(a_k+d_k\mathbb{Z}\right)$.

טענה: יהי $\leq$ יחס סדר מלא על $\mathbb{C}$ אזי $\left(\mathbb{C},\leq\right)$ אינו שדה סדור.