גרף מכוון קשיר: גרף מכוון G עבורו לכל $u,v\in V\left(G\right)$ קיים מסלול מ־u ל־v או מסלול מ־v ל־u.

גרף מכוון קשיר חזק: גרף מכוון G עבורו לכל $u,v\in V\left(G\right)$ קיים מסלול מ־u ל־v.

אלגוריתם BFS: יהי G גרף ויהי $s\in V\left(G\right)$ אזי

```
function BFS(G, s):
    d ∈ V(G) → N̂;    π ∈ V(G) → V(G) ∪ {Null};    color ∈ V(G) → {Black, White, Grey}
    for u ∈ V(G)\{s} do
        (d, π, color)[u] ← (∞, Null, White)
    end
    (d, π, color)[s] ← (0, Null, Grey)
    Q ∈ Queue(V(G))
    while ¬(Q.IsEmpty) do
        u ← Q.Head
        for v ∈ N(u) do
            if color[v] = White then
                color[v] ← Grey
                d[v] ← d[u] + 1
                π[v] ← u
                Q.Enqueue(v)
        end
        Q.Dequeue
        color[u] ← Black
    end
    return (d, π, color)
```

טענה: יהי G גרף ויהי $s\in V\left(G\right)$ אזי סיבוכיות זמן הריצה של $\text{BFS}\left(G,s\right)$ הינה $\mathcal{O}\left(\left|V\right|+\left|E\right|\right)$.

משפט: יהי G גרף ויהי $s\in V$ אזי $\left\{v\in V\mid \text{BFS}\left(G,s\right).\text{color}\left[v\right]=\text{Black}\right\}=\left[s\right]_{\rightarrow}$.

סימון: יהי G גרף ויהיו $u,v\in V$ אזי $\delta\left(v,u\right)=\min\left(\left\{\text{len}\left(\sigma\right)\mid v,u \text{ טיול בין } \sigma\right\}\right)$.

טענה: יהי G גרף ויהיו $v,u,w\in V$ באשר $\left(w,u\right)\in E$ אזי $\delta\left(v,u\right)\le\delta\left(v,w\right)+1$.

למה: יהי G גרף ויהיו $s,v\in V$ אזי בכל מצב S בהרצת $\text{BFS}\left(G,s\right)$ מתקיים $S.d\left[v\right]\ge\delta\left(v\right)$.

למה: יהי G גרף יהיו $s,v_1\ldots v_n\in V$ ויהי S מצב בהרצת $\text{BFS}\left(G,s\right)$ באשר $S.Q=\left(v_1\ldots v_n\right)$ אזי מתקיים $S.d\left[v_i\right]\le S.d\left[v_{i+1}\right]$ לכל $i\in\left[n-1\right]$ וכן $S.d\left[v_n\right]\le S.d\left[v_1\right]+1$.

משפט נכונות מרחקים: יהי G גרף ויהיו $s,v\in V$ אזי $\text{BFS}\left(G,s\right).d\left[v\right]=\delta\left(v,s\right)$.

עץ BFS: יהי G גרף ויהי $s\in V$ נגדיר $V_\pi=\left\{v\in V\mid \text{BFS}\left(G,s\right).\pi\left[v\right]\ne\text{Null}\right\}\cup\left\{s\right\}$ וכן $E_\pi=\left\{\left(\pi\left[v\right],v\right)\mid v\in V_\pi\backslash\left\{s\right\}\right\}$ אזי $G_\pi=\left(V_\pi,E_\pi\right)$.

טענה: יהי G גרף ויהי $s\in V$ אזי
- מתקיים $\deg^{-}_{G_\pi}\left(s\right)=0$.
- לכל $v\in V\left(G_\pi\right)$ מתקיים $\deg^{-}_{G_\pi}\left(v\right)=1$.
- לכל $v\in V\left(G_\pi\right)$ קיים מסלול ב־G_π בין s,v.
- G_π הינו עץ.
- יהי $v\in V\left(G_\pi\right)$ ויהי σ מסלול ב־G_π בין s,v אזי σ המסלול הקצר ביותר בין s,v ב־G.

מסלול אוילר: מסלול העובר על כל הקשתות בגרף.

מעגל אוילר: מסלול אוילר שהינו מעגל.

טענה: יהי G גרף קשיר ולא מכוון אזי (יש מעגל אוילר ב־G)$\Longleftrightarrow$(לכל $v\in V$ מתקיים $\deg\left(v\right)\in\mathbb{N}_{\text{even}}$).

אלגוריתם למציאת מעגל אוילר: יהי G גרף קשיר ולא מכוון עבורו לכל $u \in V$ מתקיים $\deg(u) \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ אזי

```
function EulerCircle(G, v):
    σ ∈ List(E(G))
    u ← N(v)
    while u ≠ v do
        σ.Append({v, u})
        G ← G − {{v, u}}
        u ← N(u)
    end
    if len(σ) = |E(G)| then return σ
    else
        w ← {x ∈ V(G) | (∃y ∈ V(G).(x, y) ∈ σ) ∧ (deg(x) > 0)}
        σ[w] ← EulerCircle(G, w)
    return σ
```

טענה: יהי G גרף קשיר ולא מכוון עבורו לכל $u \in V$ מתקיים $\deg(u) \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ ויהי $v \in V(G)$ אזי סיבוכיות זמן הריצה של $\text{EulerCircle}(G, v)$ הינה $\mathcal{O}(|E|)$.

טענה: יהי G גרף קשיר ולא מכוון עבורו לכל $u \in V$ מתקיים $\deg(u) \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ יהי S מצב בהרצת $\text{EulerCircle}(G, v)$ באשר $S.u \neq v$ אזי $|N(S.u)| \neq \varnothing$.

משפט: יהי G גרף קשיר ולא מכוון עבורו לכל $v \in V$ מתקיים $\deg(v) \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ אזי $\text{EulerCircle}(G)$ הינו מעגל אוילר.

טענה: יהי G גרף קשיר ולא מכוון אזי (יש מסלול אוילר שאינו מעגל ב־G)$\Longleftrightarrow$($|\{v \in V(G) \mid \deg(v) \in \mathbb{N}_{\text{odd}}\}| = 2$).

אלגוריתם למציאת מסלול אוילר: יהי G גרף קשיר ולא מכוון באשר $|\{v \in V(G) \mid \deg(v) \in \mathbb{N}_{\text{odd}}\}| = 2$ אזי

```
function EulerPath(G):
    v ← {t ∈ V(G) | deg(t) ∈ N_odd};    u ← {t ∈ V(G) | deg(t) ∈ N_odd}\{v}
    G ← G + {{v, u}}
    σ ← EulerCircle(G, v)
    return σ\{v, u}
```

טענה: יהי G גרף לא מכוון אזי (G דו־צדדי)$\Longleftrightarrow$(לא קיים ב־G מעגל באורך אי־זוגי).

אלגוריתם זיהוי גרפים דו־צדדיים: יהי G גרף לא מכוון ופשוט אזי

```
function IsBipartite(G):
    (d, π, color) ← BFS(G)
    for (v, u) ∈ V(G) do
        if d(v) = d(u) then return False
    end
    return True
```

טענה: יהי G גרף לא מכוון ופשוט אזי (G דו־צדדי)$\Longleftrightarrow$($\text{IsBipartite}(G) = \text{True}$).

מסלול קצר ביותר בין קודקודים (מק״ב): יהי G גרף ויהיו $s, t \in V$ אזי מסלול σ מ־s ל־t עבורו $|\sigma| = \min\{|\tau| \mid t\text{ ל־}s\text{ מסלול מ־}\tau\}$.

גרף המסלולים הקצרים ביותר מקודקוד: יהי G גרף ויהי $s \in V$ נגדיר $E' = \{e \in E \mid s\text{ חלק ממסלול קצר ביותר היוצא מ־}e\}$ אזי (V, E').

אלגוריתם למציאת גרף המסלולים הקצרים ביותר מקודקוד: יהי G גרף ויהי $s \in V$ אזי

```
function ShortestPathGraph(G, s):
    (d, π, color) ← BFS(G);    G_π ← BFS-Forest(G);    E' ← E(G_π)
    for (u, v) ∈ E(G) do
        if |height_{G_π}(u) − height_{G_π}(v)| = 1 then
            E' ← E' ∪ {(u, v)}
    end
    return (V(G), E')
```

טענה: תהא $e \in E$ אזי (e מחברת בין רמות עוקבות ביער BFS G_π)$\Longleftrightarrow$(e קשת במק״ב).

מסקנה: יהי G גרף ויהי $s \in V$ אזי $\text{ShortestPathGraph}(G,s)$ הינו גרף מק"ב מ־s.

גרף המסלולים הקצרים ביותר בין קודקודים: יהי G גרף ויהיו $s,t \in V$ נגדיר $\{e \in E \mid t\text{ חלק ממסלול קצר ביותר היוצא מ־}s\text{ ל־}e\} = E'$ אזי (V,E').

טענה: יהי G גרף מכוון ויהיו $s,t \in V$ אזי קיים אלגוריתם לחישוב גרף המסלולים הקצרים ביותר מ־s ל־t בסיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}(|V|+|E|)$.

אלגוריתם DFS: יהי G גרף ויהי $s \in V$ אזי

```
function DFS(G, s):
    (k, π) ← dict(V)
    color ← dict(E)
    k[s] ← 1
    π[s] ← Null
    for u ∈ V\{s} do
        k[u] ← 0
        π[u] ← Null
    end
    for e ∈ E do
        color[e] ← White
    end
    i ← 2
    v ← s
    while (∃u ∈ Adj(v).color[(v,u)] = White) ∨ (π[v] ≠ Null) do
        if {u ∈ Adj(v) | color[(v,u)] = White} ≠ ∅ then
            w ← {u ∈ Adj(v) | color[(v,u)] = White}
            color[(v,w)] ← Black
            if k[w] = 0 then
                k[w] ← i
                π[w] ← v
                v ← w
                i ← i + 1
        else
            v ← π[v]
    end
    return (k, π)
```

טענה: יהי G גרף ויהי $s \in V$ אזי סיבוכיות זמן הריצה של $\text{DFS}(G,s)$ הינה $\mathcal{O}(|V|+|E|)$.

זמן גילוי: יהי G גרף ויהי $s \in V(G)$ אזי k בהרצת $\text{DFS}(G,s)$.

טענה: יהי G גרף ויהיו $s,v \in V$ באשר $v \in [s]_{\rightarrow}$ אזי בהרצת $\text{DFS}(G,s)$ מתקיים $k[v] > 0$.

עץ DFS: יהי G גרף ויהי $s \in V$ נגדיר $V_\pi = \{v \in V \mid \text{DFS}(G,s).\pi[v] \neq \text{Null}\} \cup \{s\}$ וכן $E_\pi = \{(\pi[v], v) \mid v \in V_\pi \backslash \{s\}\}$ אזי $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$.

טענה: יהי G גרף ויהי $s \in V$ אזי עץ DFS הינו עץ.

קשתות ביחס לריצת DFS: יהי G גרף ויהי G_π יער DFS אזי

- קשתות עץ: קשת $e \in E(G)$ עבורה $e \in E(G_\pi)$.
- קשתות קדמיות: קשת $(u,v) \in E(G)$ עבורה $(u,v) \notin E(G_\pi)$ וכן u הינו אב של v ביער G_π.
- קשתות אחוריות: קשת $(u,v) \in E(G)$ עבורה $(u,v) \notin E(G_\pi)$ וכן v הינו אב של u ביער G_π.
- קשתות חוצות: קשת $e \in E(G)$ שאינה קשת עץ או קדמית או אחורית.

טענה: יהי G גרף לא מכוון ותהא $\{u,v\}$ קשת עץ אזי u צאצא של v בגרף G_π או v צאצא של u בגרף G_π.

מסקנה: יהי G גרף לא מכוון אזי לא קיימות קשתות חוצות.

אלגוריתם DFS בעל זמני נסיגה: יהי G גרף אזי

```
function DFS(G):
    (k, f, π, color, low) ← dict(V)
    for u ∈ V do
        k[u] ← 0
        π[u] ← Null
        color ← White
        low ← ∞
    end
    i ← 0
    for s ∈ V do
        if k[s] = 0 then
            DFS-VISIT(s, k, f, π, i)
    end
    return (k, f, π, low)
```

```
function DFS-VISIT(u, k, f, π, color, low, i):
    color[u] ← Gray
    i ← i + 1
    k[u] ← i
    for v ∈ Adj(u) do
        if (color[v] = Gray) ∧ (v ≠ π[u]) then
            low[u] ← min(low[u], k[v])
        else if color[v] = White then
            π[v] ← u
            DFS-VISIT(v, k, f, π, color, low, i)
            low[u] ← min(low[u], low[v])
    end
    color[u] ← Black
    i ← i + 1
    f[u] ← i
```

זמן נסיגה: יהי G גרף ויהי $s\in V(G)$ אזי f בהרצת $\text{DFS}(G)$.

טענה Gray Path Lemma: יהיו $v,u\in V$ אזי (v צאצא של u ביער G_π)$\iff$($k[u]<k[v]<f[u]$).

טענה: יהיו $v,u\in V$ אזי ((u,v) קשת חוצה)$\iff$($f[v]<k[u]$).

משפט הסוגריים: יהי G גרף ויהיו $u,v\in V$ אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- מתקיים $[k(u),f(u)]\cap[k(v),f(v)]=\varnothing$ וכן u,v אינם צאצא־אב ביער G_π.
- מתקיים $[k(u),f(u)]\subset[k(v),f(v)]$ וכן u צאצא של v ביער G_π.
- מתקיים $[k(u),f(u)]\supset[k(v),f(v)]$ וכן v צאצא של u ביער G_π.

משפט המסלול הלבן: יהי G גרף ויהיו $u,v\in V$ אזי (v צאצא של u ביער G_π)$\iff$(בזמן $k(u)$ באלגוריתם $\text{DFS}(G)$ יש מסלול לבן מ־u ל־v).

גרף מכוון אציקלי: גרף מכוון G בו לא קיים מעגל.

מיון טופולוגי: יהי G גרף מכוון אזי יחס סדר $\prec$ על V המקיים לכל $u,v\in V$ אם $(u,v)\in E$ אזי $u\prec v$.

משפט: יהי G גרף מכוון אזי (G אציקלי)$\iff$(קיים מיון טופולוגי על G).

טענה אלגוריתם קנות': יהי G גרף מכוון אזי קיים אלגוריתם לבדיקת קיום מיון טופולוגי בסיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}(|V|+|E|)$.

משפט: יהי G גרף מכוון אזי (G אציקלי)$\iff$(אין קשתות אחוריות ב־G).

טענה: יהי G גרף מכוון אציקלי אזי f המתקבלת מהרצת $\text{DFS}(G)$ משרה מיון טופולוגי על G.

קודקוד מנתק: יהי G גרף מכוון אזי $v\in V(G)$ עבורו $\left|G/\underset{G}{\longrightarrow}\right|<\left|G-\{v\}/\underset{G-\{v\}}{\longrightarrow}\right|$.

אב חורג: יהי G גרף מכוון ויהי $v\in V$ אזי $w\in V$ עבורו (w,v) קשת אחורית.

זמן גילוי האב החורג המוקדם ביותר: יהי G גרף אזי low בהרצת $\text{DFS}(G)$.

אלגוריתם למציאת כל הקודקודים המנתקים: יהי G גרף מכוון וקשיר אזי

```
function DetachableVertices(G):
    s ← V
    (k, f, π, low) ← DFS(G, s)
    A ← set(V)
    if |Adj_{G_π}(s)| ≠ 1 then
        A.append(s)
    for u ∈ V\{s} do
        if ∀v ∈ children(u).low[v] ≥ k[u] then
            A.append(u)
    end
    return A
```

טענה: יהי G גרף מכוון וקשיר אזי סיבוכיות זמן הריצה של $\text{DetachableVertices}(G)$ הינה $\mathcal{O}(|V|+|E|)$.

טענה: יהי G גרף מכוון וקשיר אזי $\text{DetachableVertices}(G)$ הינה קבוצת כל הקודקודים המנתקים.

רכיב קשיר היטב (רק"ה): יהי G גרף מכוון אזי קבוצה $C\subseteq V$ מקסימלית בגודלה עבורה לכל $u,v\in C$ קיים מסלול מ־u ל־v וכן מ־v ל־u.

גרף הופכי/משוחלף: יהי G גרף מכוון נגדיר $E'=\{(v,u)\mid(u,v)\in E\}$ אזי $G^T=(V,E')$.

טענה: יהי G גרף מכוון ותהא $C\subseteq V$ אזי (C רק"ה של G)$\iff$(C רק"ה של G^T).

אלגוריתם קוסראג'ו־שריר למציאת רכיבים קשירים היטב: יהי G גרף מכוון אזי

גרף הרכיבים: יהי G גרף מכוון נגדיר $E^*=\left\{(A,B)\in\text{SCC}(G)^2\mid\exists u\in A.\exists v\in B.(u,v)\in E\right\}$ אזי $G^*=(\text{SCC}(G),E^*)$.

אלגוריתם למציאת גרף הרכיבים: יהי G גרף מכוון אזי

function $\texttt{SCC}(G)$:

- $(k, f, \pi) \leftarrow \texttt{DFS}(G)$
- `/* In the next line, in the main loop of DFS we go through the vertices in decreasing order of f[u] */`
- $(k', f', \pi') \leftarrow \texttt{DFS}(G^T)$
- $A \leftarrow \text{set}(\text{set}(V))$
- **for** $v \in V$ **do**
  - $A.\text{append}\left([v]_{\xrightarrow[(G^T)_\pi]{}}\right)$
- **end**
- **return** A

function $\texttt{KosarajuSharir}(G)$:

- $V^* \leftarrow \text{SCC}(G)$
- $E^* \leftarrow \text{set}((V^*)^2)$
- **for** $(u, v) \in E$ **do**
  - **if** $[v]_{\xrightarrow[G_\pi^T]{}} \neq [u]_{\xrightarrow[G_\pi^T]{}}$ **then**
    - $E^*.\text{append}\left(\left([v]_{\xrightarrow[G_\pi^T]{}}, [u]_{\xrightarrow[G_\pi^T]{}}\right)\right)$
  - **end**
- **end**
- **return** (V^*, E^*)

למה: יהי G גרף מכוון אזי G^* אציקלי.

הגדרה: יהי G גרף ותהא $U \subseteq V$ אזי

- זמן גילוי: $k(U) = \min_{u \in U}(k[u])$.
- זמן נסיגה: $f(U) = \max_{u \in U}(f[u])$.

למה: יהי G גרף מכוון ויהיו $C_1, C_2 \subseteq V$ רק"ה באשר $(C_1, C_2) \in E(G^*)$ אזי $f(C_2) < f(C_1)$.

מסקנה: יהי G גרף מכוון ויהיו $C_1, C_2 \subseteq V$ רק"ה באשר $(C_1, C_2) \in E\left(\left(G^T\right)^*\right)$ אזי $f(C_2) > f(C_1)$.

משפט: יהי G גרף מכוון ויהי $C \subseteq V$ אזי $(C$ רק"ה$)\Longleftrightarrow(C \in \text{SCC}(G))$.

מסקנה: יהי G גרף מכוון אזי $G^* = \text{KosarajuSharir}(G)$.

קבוצת מוצא: יהי G גרף מכוון אזי $S \subseteq V$ המקיימת $\forall v \in V. \exists s \in S. s \to v$.

אלגוריתם למציאת קבוצת מוצא מינימלית: יהי G גרף מכוון אזי

function $\texttt{MinimalOriginSet}(G)$:

- $A \leftarrow \text{set}(V(G))$
- $G^* \leftarrow \text{ComponentGraph}(G)$
- **for** $C \in V(G^*)$ **do**
  - $v \leftarrow \{u \in C \mid \nexists w \in V(G) \backslash C.(w, u) \in E(G)\}$
  - $A.\text{append}(v)$
- **end**
- **return** A

טענה: יהי G גרף מכוון אזי $\text{MinimalOriginSet}(G)$ קבוצת מוצא מינימלית.

טענה: יהי G גרף מכוון וקשיר אזי סיבוכיות זמן הריצה של $\text{MinimalOriginSet}(G)$ הינה $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.

טענה: יהי G גרף מכוון ותהא $S \subseteq V$ אזי קיים אלגוריתם הבודק האם קיים הילוך σ העובר על S בסיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.

גרף ממושקל: יהי G גרף ותהא $w : E \to \mathbb{R}$ אזי (G, w).

עץ פורש: יהי G גרף קשיר לא מכוון אזי תת־גרף $T \leq G$ באשר T עץ וכן $V(T) = V(G)$.

משקל עץ פורש: יהי G גרף קשיר לא מכוון ויהי $T \leq G$ עץ פורש אזי $w(T) = \sum_{e \in E(T)} w(e)$.

עץ פורש מינימלי (עפ"מ): יהי G גרף קשיר לא מכוון אזי עץ פורש $T \leq G$ עבורו $w(T) = \min\{w(S) \mid G$ עץ פורש של $S\}$.

חתך: יהי G גרף ויהיו $A, B \subseteq V(G)$ עבורם $A \uplus B = V(G)$ אזי (A, B).

קשתות החתך/חוצות: יהי G גרף ויהי (A,B) חתך אזי $E(A,B)=\{(u,v)\in E(G)\mid(u\in A)\wedge(v\in B)\}$.

טענה: יהי $G\le T$ עץ פורש ותהא $e\in E(G)\backslash E(T)$ אזי $T+\{e\}$ בעל מעגל יחיד.

טענה: יהי $G\le T$ עץ פורש תהא $e_1\in E(G)\backslash E(T)$ ותהא $e_2\in E(T+\{e_1\})$ אשר הינה חלק ממעגל אזי $T+\{e_1\}-\{e_2\}$ עץ פורש.

טענה: יהי $G\le T$ עץ פורש ותהא $e\in E(T)$ אזי $T-\{e\}$ הינו יער בעל שני עצים.

מסקנה: יהי $G\le T$ עץ פורש תהא $e\in E(T)$ ויהי $v\in V(G)$ אזי $[v]_{\xrightarrow[T-\{e\}]{}},V(G)\setminus[v]_{\xrightarrow[T-\{e\}]{}}$ חתך של G.

אלגוריתם גנרי למציאת עץ פורש מינימלי: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי

```
function MST(G, w):
    color ← dict(E)
    color ← White
    Blueless ← 𝒫(𝒫(V) × 𝒫(V))
    Redless ← 𝒫({v → v | v ∈ V(G)})
    while ∃e ∈ E.color[e] = White do
        Blueless ← {(A, B) חתך | ∀e ∈ E(A, B).color[e] ≠ Blue}
        Redless ← {σ circle in G | ∀i ∈ [len(σ)].color[(σ[i], σ[i + 1])] ≠ Red}
        if Blueless ≠ ∅ then
            A ← Blueless
            f ← argmin_{e∈A²∩E}(w(e))
            color[f] = Blue
        if Redless ≠ ∅ then
            σ ← Redless
            f ← argmax_{e∈σ}(w(e))
            color[f] = Red
    end
    return (V, {e ∈ E | color[e] = Blue})
```

טענה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w ותהא $a \in E$ עבורה $\text{color}\,[a] = \text{White}$ באיטרציה של $\text{MST}\,(G)$ אזי קיימת $e \in E$ אשר ניתנת לצביעה.

מסקנה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי $\text{MST}\,(G)$ צובעת $|E|$ קשתות.

טענה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי בכל איטרציה של $\text{MST}\,(G)$ קיים $T \leq G$ עפ"מ עבורו

- לכל $e \in E$ המקיימת $\text{color}\,[e] = \text{Blue}$ מתקיים $e \in E\,(T)$.
- לכל $e \in E$ המקיימת $\text{color}\,[e] = \text{Red}$ מתקיים $e \notin E\,(T)$.

מסקנה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי $\text{MST}\,(G)$ עפ"מ של G.

אלגוריתם פרים למציאת עץ פורש מינימלי: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי

```
function Prim'sAlgorithm(G, w):
    color ← dict(E)
    U ← set(V)
    color ← White
    r ← V
    U.append(r)
    while U ≠ V do
        (u, v) ← argmin_{e∈U×(V\U)}(w(e))
        color[(u, v)] = Blue
        U.append(v)
        for w ∈ U do
            if (w, v) ∈ E then
                color[(w, v)] = Red
        end
    end
    return (V, {e ∈ E | color[e] = Blue})
```

טענה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי כל צביעת קשת באלגוריתם $\text{Prim'sAlgorithm}\,(G)$ נעשית כמו באלגוריתם הגנרי.

מסקנה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי $\text{Prim'sAlgorithm}\,(G)$ עפ"מ של G.

משפט: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי ניתן לממש את $\text{Prim'sAlgorithm}\,(G)$ עם ערימת מינימום בסיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}\,(|E| \log |V|)$.

הערה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי ניתן לממש את $\text{Prim'sAlgorithm}\,(G)$ בסיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}\,(|E| + |V| \log |V|)$.

אלגוריתם קרוסקל למציאת עץ פורש מינימלי: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי

```
function Kruskal'sAlgorithm(G, w):
    color ← dict(E)
    L ← sort(E) // Sort is done by w from small to big.
    for (u, v) ∈ L do
        if ∃σ ∈ {u → v}.∀i ∈ [n].color(σ(i)) = Blue then
            color[e] = Red
        else
            color[e] = Blue
    end
    return (V, {e ∈ E | color[e] = Blue})
```

טענה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי כל צביעת קשת באלגוריתם $\text{Kruskal'sAlgorithm}(G)$ נעשית כמו באלגוריתם הגנרי.

מסקנה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי $\text{Kruskal'sAlgorithm}(G)$ עפ"מ של G.

משפט: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי ניתן לממש את $\text{Kruskal'sAlgorithm}(G)$ עם Union-Find בסיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}(|E|\log|V|)$ וכן סיבוכיות זמן amortized $\mathcal{O}(|E|\cdot\alpha(|V|))$.

אלגוריתם Borůvska למציאת עץ פורש מינימלי: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w באשר w חח"ע אזי

```
function Borůvska'sAlgorithm(G, w):
    Trees ← set(set(G))
    for v ∈ V do
        Trees.append({v})
    end
    while |Trees| ≠ 1 do
        for T ∈ Tree do
            (u, v) ← argmin_{(u,v)∈V(T)×V(G)}(w((u, v)))
            S ← {S ∈ Tree | u ∈ V(S)}
            S ← S + T + {(u, v)}
            Trees.Remove(T)
        end
    end
    A ← Trees
    return A
```

טענה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w באשר w חח"ע אזי סיבוכיות זמן ריצה $\text{Borůvska'sAlgorithm}(G)$ הינה $\mathcal{O}(|E|\log|V|)$.

משפט: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w באשר w חח"ע אזי קיים ויחיד $T\leq G$ עפ"מ.

משפט: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w באשר w חח"ע אזי $\text{Borůvska'sAlgorithm}(G)$ עפ"מ של G.

משפט: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w ותהא $A\subseteq E$ עבורה קיים עפ"מ $G\geq S$ עבורו $A\subseteq E(S)$ יהי C מעגל ותהא $e\in E(C)$ בעלת משקל מקסימלי אזי קיים עפ"מ $T\leq G$ עבורו $A\subseteq E(T)$ וכן $e\notin E(T)$.

טענה: יהי $T\leq G$ עפ"מ בעל משקלי קשתות כולל כפילויות $\alpha_1\leq\ldots\leq\alpha_n$ ויהי $S\leq G$ עפ"מ בעלי משקלי קשתות כולל כפילויות $\beta_1\leq\ldots\leq\beta_m$ אזי $n=m$ וכן $\alpha_i=\beta_i$ לכל $i\in[n]$.

אלגוריתם למציאת עץ פורש מינימלי המכיל מספר מקסימלי של קשתות מקבוצה מסוימת: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w ותהא $F\subseteq E$ אזי

```
function PrioritizeMST(G, w, F):
    ω ← (V(G) → ℝ)
    m ← min({|w(e_1) − w(e_2)| | (e_1, e_2 ∈ E) ∧ (w(e_1) ≠ w(e_2))}
    ε ← m/2
    for e ∈ E do
        if e ∈ F then
            ω(e) ← w(e)
        else
            ω(e) ← w(e) + ε
    end
    return Kruskal'sAlgorithm(G, ω)
```

טענה: תהא $F \subseteq E$ ויהי T עפ"מ ביחס ל־ω באלגוריתם PrioritizeMST אזי T עפ"מ ביחס ל־w.

מסקנה: תהא $F \subseteq E$ אזי $\text{PrioritizeMST}(G, w)$ עפ"מ ב־G ביחס ל־w.

בעיית שיבוץ המשימות: יהיו $s_1 \ldots s_n, f_1 \ldots f_n \in \mathbb{R}$ באשר $s_i < f_i$ לכל $i \in [n]$ אזי $\max\left\{|A| \mid \left(A \subseteq \{[s_1, f_i]\}_{i=1}^{n}\right) \wedge (\forall I, J \in A. I \cap J = \varnothing)\right\}$.

אלגוריתם חמדן לבעיית שיבוץ המשימות: יהיו $s_1 \ldots s_n, f_1 \ldots f_n \in \mathbb{R}$ באשר $s_i < f_i$ לכל $i \in [n]$ אזי

```
function ActivitySelectionProblem(s_1, ..., s_n, f_1, ..., f_n):
    F ← list([s_1, f_1], ..., [s_n, f_n])
    /* In the next line, we put all the parameters in F and sort it based on f_i */
    F ← sort({f_1, ..., f_n})
    X ← list([s_1, f_1], ..., [s_n, f_n])
    X ← ∅
    for k ∈ [1, ..., n] do
        if X = ∅ then
            X.append(L[k])
        else if L[k] ∩ X.last = ∅ then
            X.append(L[k])
    end
    return X
```

טענה: יהיו $s_1 \ldots s_n, f_1 \ldots f_n \in \mathbb{R}$ באשר $s_i < f_i$ אזי סיבוכיות זמן הריצה של ActivitySelectionProblem הינה $\mathcal{O}(n \log(n))$.

משפט: לכל $k \in [n]$ באיטרציה ה־k בלולאה ב־ActivitySelectionProblem קיים פתרון לבעיה X^* עבורו $([s_i, f_i] \in X^*) \iff ([s_i, f_i] \in X)$.

מסקנה: יהיו $s_1 \ldots s_n, f_1 \ldots f_n \in \mathbb{R}$ באשר $s_i < f_i$ אזי ActivitySelectionProblem פתרון לבעיית שיבוץ המשימות.

הערה: כאשר משקל הגרף הוא ℓ הכוונה היא "אורך הקשת" ובכך אנו "מכלילים" גרף ללא משקל בתור גרף עבורו $\ell = 1$.

מעגל שלילי: יהי G מעגל ממושקל ℓ אזי מעגל C עבורו $\ell(C) < 0$.

מסלול קצר ביותר בין קודקודים: יהי G גרף ממושקל ℓ ויהיו $s, t \in V$ אזי מסלול σ מ־s ל־t עבורו $\ell(\sigma) = \min\{\ell(\tau) \mid \tau \in \{s \to t\}\}$.

למה: יהיו $s, t \in V$ עבורם קיים מסלול מ־s ל־t וכן כל מסלול מ־s ל־t לא עובר דרך קשת השייכת למעגל שלילי אזי קיים מסלול פשוט קצר ביותר בין s ל־t.

למה: יהיו $s, t \in V$ עבורם קיים מסלול מ־s ל־t וכן קיים מסלול מ־s ל־t העובר דרך קשת השייכת למעגל שלילי אזי לא קיים מסלול פשוט קצר ביותר בין s ל־t.

סימון: יהי G גרף ממושקל ℓ ויהיו $s, t \in V$ אזי $\delta_\ell(s, t) = \inf_{\sigma \in \{s \to t\}} \ell(\sigma)$.

הערה: יהי G גרף ממושקל ℓ אזי נסמן $\delta = \delta_\ell$ כאשר ברור שמדובר במרחק ביחס למשקל.

בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא (SSSP): יהי G גרף מכוון ממושקל ℓ ויהי $s \in V$ אזי $T \leq G$ עץ פורש בו כל מסלול מ־s ל־v הינו מסלול קצר ביותר ב־G.

למה אי־שיוויון המשולש: יהי G גרף ממושקל ℓ ויהיו $u, v, w \in V$ אזי $\delta_\ell(u, v) \leq \delta_\ell(u, w) + \delta_\ell(w, v)$.

למה תת־מסלול קצר ביותר: יהי σ מסלול קצר ביותר ויהי $i \in \text{len}(\sigma)$ אזי $(\sigma[i], \ldots \sigma[i+k])$ מסלול קצר ביותר.

אלגוריתם בלמן־פורד למציאת מסלולים קצרים ביותר מנקודת מוצא: יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ ויהי $s \in V$ אזי

```
function BellmanFord(G, ℓ, s):
    (d, π) ← dict(V)
    d[s] ← 0
    for u ∈ V do
        d[u] ← ∞
        π[u] ← None
    end
    (c, i) ← 1
    while (i ≤ |V|) ∧ (c > 0) do
        c ← 0
        for (u, v) ∈ E do
            c ← c + Relax(ℓ, d, u, v)
        end
        i ← i + 1
    end
    if c > 0 then c ← 1
    return c
```

```
function Relax(ℓ, d, u, v):
    if d[v] > d[u] + ℓ(u, v) then
        d[v] ← d[u] + ℓ(u, v)
        π[v] ← u
        return 1
    return 0
```

למה: יהיו $s,u,v\in V$ באשר $(u,v)\in E$ וכן בריצת BellmanFord מתקיים $\delta\left(s,u\right)\le d\left[u\right]$ אזי $\delta\left(s,v\right)\le d\left[u\right]+\ell\left(\left(u,v\right)\right)$.

מסקנה: יהיו $s,u,v\in V$ באשר $(u,v)\in E$ וכן בריצת BellmanFord מתקיים $\delta\left(s,u\right)\le d\left[u\right]$ וכן $\delta\left(s,v\right)\le d\left[v\right]$ אזי לאחר הרצת $\text{Relax}\left(u,v\right)$ מתקיים $\delta\left(s,v\right)\le d\left[v\right]$.

למה: יהי $s\in V$ עבורו לכל $v\in V$ בריצת BellmanFord מתקיים $\delta\left(s,v\right)\le d\left[v\right]$ אזי לאחר כל רצף פעולות Relax נקבל כי לכל $v\in V$ מתקיים $\delta\left(s,v\right)\le d\left[v\right]$.

מסקנה: יהיו $s,v\in V$ עבורם בריצת BellmanFord מתקיים $d\left[v\right]=\infty$ אזי לאחר כל רצף פעולות Relax נקבל כי $d\left[v\right]=\infty$.

מסקנה: יהיו $s,v\in V$ עבורם בריצת BellmanFord מתקיים $d\left[v\right]=\delta\left(s,v\right)$ אזי לאחר כל רצף פעולות Relax נקבל כי $d\left[v\right]=\delta\left(s,v\right)$.

למה: יהיו $s,t\in V$ עבורם בריצת BellmanFord מתקיים $d\left[s\right]=0$ ויהי $\sigma\in\{s\to t\}$ מסלול אזי לאחר הפעלת הרצף $\left(\text{Relax}\left(\sigma\left[0\right],\sigma\left[1\right]\right),\ldots,\text{Relax}\left(\sigma\left[n-1\right],\sigma\left[n\right]\right)\right)$ נקבל כי $d\left[t\right]\le\ell\left(\sigma\right)$.

למה: יהי $s\in V$ עבורו לא קיים מעגל שלילי אשר ניתן להגיע אליו מ־s אזי BellmanFord יוצא מהלולאה הראשית כאשר $i<|V|$ וכן מחזיר 0 וכן לכל $v\in V$ מתקיים $d\left[v\right]=\delta\left(s,v\right)$.

למה: יהי $s\in V$ עבורו קיים מעגל שלילי אשר ניתן להגיע אליו מ־s אזי BellmanFord יוצא מהלולאה הראשית כאשר $i=|V|$ וכן מחזיר 1.

מסקנה: יהי $s\in V$ אזי

- (BellmanFord החזיר 1)$\Longleftrightarrow$(קיים מעגל שלילי אשר ניתן להגיע אליו מ־s).
- (BellmanFord החזיר 0)$\Longleftrightarrow$(לא קיים מעגל שלילי אשר ניתן להגיע אליו מ־s וכן לכל $v\in V$ מתקיים $d\left[v\right]=\delta\left(s,v\right)$).

עץ BellmanFord: יהי $s\in V$ נגדיר $V_{\pi}=\left\{ v\in V\mid\text{BellmanFord}\left(G,s\right).\pi\left[v\right]\ne\text{Null}\right\} \cup\left\{ s\right\}$ וכן $E_{\pi}=\left\{ \left(\pi\left[v\right],v\right)\mid v\in V_{\pi}\backslash\left\{ s\right\} \right\}$ אזי $G_{\pi}=\left(V_{\pi},E_{\pi}\right)$.

למה: יהי $s\in V$ ויהי C מעגל בעץ BellmanFord באיזשהו שלב של הרצת BellmanFord אזי C מעגל שלילי.

למה: יהי $s\in V$ עבורו לא קיים מעגל שלילי אשר ניתן להגיע אליו מ־s אזי עץ BellmanFord הינו עץ.

למה: יהי $s\in V$ עבורו קיים מעגל שלילי אשר ניתן להגיע אליו מ־s אזי עץ BellmanFord מכיל מעגל שלילי.

מסקנה: יהי $s\in V$ אזי BellmanFord פתרון לבעיית SSSP.

משפט: יהי $s\in V$ אזי BellmanFord בעל סיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}\left(\left|E\right|\cdot\left|V\right|\right)$.

הערה: נניח כי $\ell:E\to\mathbb{Z}$ וכן $\ell\left(e\right)\ge-W$ אזי קיים אלגוריתם לבעיית SSSP בסיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}\left(\left|E\right|\log^{2}\left(\left|V\right|\right)\log\left(\left|V\right|\cdot W\right)\log\log\left(\left|V\right|\right)\right)$.

אלגוריתם לבדיקת קיום מעגל במשקל 0 בגרף מכוון חסר מעגלים שליליים: יהי G גרף מכוון חסר מעגלים שליליים אזי

```
function IsZeroCircle(G, ℓ):
    V ← V ⊎ {s}
    for v ∈ V\{s} do
        E ← E ∪ {(s, v)}
        ℓ((s, v)) ← 0
    end
    (c, d, π) ← BellmanFord(G, ℓ, s)
    for e ∈ E do
        if d(v) ≠ d(u) + δ(u, v) then
            E ← E\{(s, v)}
    end
    if ∃ circle C ∈ G then  return True
    return False
```

טענה: בריצת IsZeroCircle לאחר מחיקת כל הקשתות בלולאה נקבל את גרף מק"ב מ־s.

טענה: אם בריצת IsZeroCircle לאחר מחיקת כל הקשתות בלולאה קיים מעגל C אזי $\ell\left(C\right)=0$.

טענה: יהי C מעגל עבורו $\ell\left(C\right)=0$ אזי בריצת IsZeroCircle לאחר מחיקת כל הקשתות בלולאה נקבל כי C בגרף.

מסקנה: יהי G גרף מכוון חסר מעגלים שליליים אזי (G בעל מעגל ממשקל 0)$\Longleftrightarrow$(IsZeroCircle מחזיר True).

טענה: יהי G גרף מכוון חסר מעגלים שליליים אזי סיבוכיות זמן הריצה של IsZeroCircle הינה $\mathcal{O}\left(|V|\cdot|E|\right)$.

אלגוריתם למציאת מסלולים קצרים ביותר מנקודת מוצא בגרף מכוון אציקלי: יהי G מכוון אציקלי ויהי $s\in V$ אזי

```
function SSSP-DAG(G, ℓ, s):
    (d, π) ← dict(V)
    d[s] ← 0
    for u ∈ V do
        d[u] ← ∞
        π[u] ← None
    end
    /* Knuth'sAlgorithm is an algorithm to compute a topological sorting.  */
    f ← Knuth'sAlgorithm(G)
    for i ∈ [1, . . . , |V|] do
        for v ∈ Adj(f(i)) do
            Relax((f(i), v))
        end
    end
    return (d, π)
```

טענה: יהי G מכוון אציקלי ויהי $s\in V$ אזי SSSP-DAG $\left(G\right)$ פתרון לבעיית SSSP.

טענה: יהי G מכוון אציקלי ויהי $s\in V$ אזי סיבוכיות זמן הריצה של SSSP-DAG $\left(G\right)$ הינה $\mathcal{O}\left(|E|+|V|\right)$.

אלגוריתם דייקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר מנקודת מוצא בגרף ללא משקלים שליליים: יהי G גרף מכוון עבורו $\ell\geq0$ ויהי $s\in V$ אזי

```
function Dijkstra(G, ℓ, s):
    Q ← heap((V, int))
    (d, π) ← dict(V)
    d[s] ← 0
    for u ∈ V do
        d[u] ← ∞
        π[u] ← None
    end
    Q.insert((s, d[s]))
    while Q ≠ ∅ do
        u ← Q.min
        for v ∈ Adj(u) do
            if d[v] = ∞ then
                π[v] ← u
                d[v] ← d[u] + ℓ(u, v)
                Q.insert((v, d[v]))
            else if d[u] + ℓ(u, v) < d[v] then
                π[v] ← u
                d[v] ← d[u] + ℓ(u, v)
                Q.decrease-key((v, d[v]))
        end
    end
    return (d, π)
```

למה: יהיו $s,u\in V$ עבורם בריצת Dijkstra הצומת u נמחקה מ־Q אזי $d\left[u\right]=\delta\left(s,u\right)$.

משפט: יהי $s\in V$ אזי Dijkstra פתרון לבעיית SSSP כאשר $\ell\geq0$.

משפט: יהי $s\in V$ אזי ניתן לממש את Dijkstra עם Fibonacci heaps בסיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}\left(\left|E\right|+\left|V\right|\cdot\log\left(\left|V\right|\right)\right)$.

בעיית כל המסלולים הקצרים (APSP): יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ אזי $D\in M_{\left|V\right|}\left(\mathbb{R}\right)$ עבורו לכל $u,v\in V$ מתקיים $D_{u,v}=\delta\left(u,v\right)$ וכן $\Pi\in M_{\left|V\right|}\left(V\right)$ עבורו לכל $u,v\in V$ קיים מסלול קצר ביותר σ מ־u ל־v המקיים $\sigma\in\left(\Pi_{u,v},v\right)$.

פונקציית פוטנציאל: יהי G גרף אזי $p:V\to\mathbb{R}$.

פונקציית משקל מותאמת: תהא p פונקציית פוטנציאל אזי פונקציית משקל ℓ_{p} עבורה לכל $u,v\in V$ המקיימים $\left(u,v\right)\in E$ מתקיים $\ell_{p}\left(\left(u,v\right)\right)=\ell\left(\left(u,v\right)\right)+p\left(u\right)-p\left(v\right)$.

משפט: תהא p פונקציית פוטנציאל יהיו $s,t\in V$ ויהי σ מסלול מ־s ל־t אזי $\ell_{p}\left(\sigma\right)=\ell\left(\sigma\right)+p\left(s\right)-p\left(t\right)$.

מסקנה: תהא p פונקציית פוטנציאל יהיו $s,t\in V$ ויהי σ מסלול מ־s ל־t אזי (σ מסלול קצר ביותר ביחס ל־ℓ)$\Longleftrightarrow$(מסלול קצר ביותר ביחס ל־ℓ_{p}).

מסקנה: תהא p פונקציית פוטנציאל ויהי σ מעגל אזי $\ell_{p}\left(\sigma\right)=\ell\left(\sigma\right)$.

מסקנה: תהא p פונקציית פוטנציאל ויהיו $s,t\in V$ אזי $\delta_{\ell}\left(s,t\right)=\delta_{\ell_{p}}\left(s,t\right)-p\left(s\right)+p\left(t\right)$.

פונקציית פוטנציאל פיזבילית: יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ אזי פונקציית פוטנציאל p עבורה $\ell_{p}\geq0$.

משפט: יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ אזי (קיימת פונקציית פוטנציאל פיזבילית)$\Longleftrightarrow$(G מצוייד עם ℓ חסר מעגלים שליליים).

אלגוריתם למציאת פונקציית פוטנאציל פיזבילית: יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ אזי

```
function FeasiblePotential(G, ℓ):
    G' ← G ⊎ {s}
    for v ∈ V(G) do
        E(G') ← E(G') ∪ {(s, v)}
        ℓ((s, v)) ← 0
    end
    c ← BelmanFord(G', ℓ, s)
    if c = 1 then return None
    p ← (V(G) → ℝ)
    for v ∈ V(G) do
        p(v) ← δ(s, v)
    end
    return p
```

טענה: יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ אזי

- (G מצוייד עם ℓ בעל מעגל שלילי)$\Longleftrightarrow$($\text{FeasiblePotential}\left(G,\ell\right)$ מחזיר None).
- (G מצוייד עם ℓ בעל פונקציית פוטנציאל פיזבילית)$\Longleftrightarrow$($\text{FeasiblePotential}\left(G,\ell\right)$ מחזיר פונקציית פוטנציאל פיזבילית).

אלגוריתם ג'ונסון לבעיית כל המסלולים הקצרים: יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ אזי

```
function Johnson(G, ℓ):
    p ← FeasiblePotential(G, ℓ)
    if p = None then return None
    ℓ_p ← (E → ℝ)
    for (u, v) ∈ E do
        ℓ_p((u, v)) = ℓ((u, v)) + p(u) − p(v)
    end
    (D_{ℓ_p}, D_ℓ) ← M_{|V|}(ℝ)
    Π ← M_{|V|}(E)
    for v ∈ V do
        (d, π) ← Dijkstra(G, ℓ_p, v)
        /* Here D and Π will be simplified, to get a solution to APSP as needed we can modify a bit Dijkstra's
           algorithm to calculate D and Π on the way to get constant time for this assignment.              */
        D_v ← d
        Π_v ← π
    end
    for (u, v) ∈ E do
        D_ℓ((u, v)) = D_{ℓ_p}((u, v)) − p(u) + p(v)
    end
    return (D, Π)
```

משפט: יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ אזי $\text{Johnson}\left(G,\ell\right)$ פתרון לבעיית APSP.

טענה: יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ אזי סיבוכיות זמן הריצה של $\text{Johnson}\left(G,\ell\right)$ הינה $\mathcal{O}\left(\left|E\right|\left|V\right|+\left|V\right|^{2}\log\left(\left|V\right|\right)\right)$.

מכפלת Min Plus: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ותהא $B\in M_{n\times k}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $A*B\in M_{m\times k}\left(\mathbb{F}\right)$ באשר $\left(A*B\right)_{i,j}=\min_{k=1}^{n}\left(A_{i,k}+B_{k,j}\right)$.

טענה: תהיינה $A,B\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי סיבוכיות זמן הריצה של $A*B$ הינה $\mathcal{O}\left(n^{3}\right)$.

טענה: תהיינה $A,B,C\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $\left(A*B\right)*C=\left(A*B\right)*C$.

סימון: יהי $s,v\in V$ אזי $\delta_{k}\left(s,v\right)=\min\left\{ \ell\left(\sigma\right)\mid\left(\sigma\in\left\{ s\to v\right\} \right)\wedge\left(\left|\sigma\right|\le k\right)\right\}$.

טענה: יהי $s,v\in V$ אזי $\delta_{k}\left(s,v\right)=\min_{u\in V}\left(\delta_{k-1}\left(s,v\right)+\ell\left(u,v\right)\right)$.

סימון: יהי $s\in V$ אזי $\delta_{k}\left(s\right)\in M_{1\times\left|V\right|}\left(\mathbb{R}\right)$ באשר $\left(\delta_{k}\left(s\right)\right)_{v}=\delta_{k}\left(s,v\right)$ לכל $v\in V$.

מטריצת המשקל: יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ אזי $L\in M_{\left|V\right|}\left(\mathbb{R}\right)$ באשר לכל $u,v\in V$ מתקיים $L_{u,v}=\begin{cases} 0 & u=v\\ \ell\left(\left(u,v\right)\right) & \left(u\neq v\right)\wedge\left(\left(u,v\right)\in E\right)\\ \infty & \left(u\neq v\right)\wedge\left(\left(u,v\right)\notin E\right) \end{cases}$ Null.

מסקנה: יהי $s\in V$ ותהא $L\in M_{\left|V\right|}\left(\mathbb{R}\right)$ מטריצת המשקל אזי $\delta_{k}\left(s\right)=\delta_{k-1}\left(s\right)*L$.

סימון: יהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $D^{\left(k\right)}\in M_{\left|V\right|}\left(\mathbb{R}\right)$ באשר לכל $u,v\in V$ מתקיים $D_{u,v}^{\left(k\right)}=\delta_{k}\left(u,v\right)$.

מסקנה: תהא $L \in M_{|V|}(\mathbb{R})$ מטריצת המשקל אזי $D^{(k)} = D^{(k-1)} * L$.

טענה: תהא $L \in M_{|V|}(\mathbb{R})$ מטריצת המשקל אזי $D^{(k)} = L^k$.

הערה: יהי $k \in \mathbb{N}$ ותהא $L \in M_{|V|}(\mathbb{R})$ מטריצת המשקל אזי $L^k = L * \ldots * L$.

טענה: יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ וחסר מעגלים שליליים ויהיו $k, m \geq |V| - 1$ אזי $D^{(k)} = D^{(m)}$.

טענה: יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ בעל מעגל שלילי ויהי $v \in V$ המופיע במעגל שלילי אזי $D^{(|V|)}_{v,v} < 0$.

מסקנה: תהא $L \in M_{|V|}(\mathbb{R})$ מטריצת המשקל אזי $L^{|V|}$ פתרון לבעיית APSP.

אלגוריתם חזקה איטרטיבית: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ תהא $\star$ פעולה אסוציאטיבית ויהי $m \in \mathbb{N}_+$ אזי

```
function RepeatedSquaring(A, ⋆, m):
    (a_k … a_0) ← (m)_2  // (m)_2 denotes m in base 2.
    B ← M_n(ℝ)
    for i ∈ [k] do
        if a_i = 1 then
            B = B ⋆ A
        A = A ⋆ A
    end
    return B
```

טענה: תהא $L \in M_{|V|}(\mathbb{R})$ מטריצת המשקל אזי $\text{RepeatedSquaring}(L, *, n)$ פתרון לבעיית APSP.

טענה: תהא $L \in M_{|V|}(\mathbb{R})$ מטריצת המשקל אזי סיבוכיות זמן הריצה של $\text{RepeatedSquaring}(L, *, n)$ הינה $\mathcal{O}\left(|V|^3 \log(|V|)\right)$.

סימון: יהי $([n], E)$ גרף מכוון ויהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $F^{(k)} \in M_n(\mathbb{R})$ באשר לכל $u, v \in V$ מתקיים $F^{(k)}_{u,v} = \min\{\ell(\sigma) \mid (\sigma \in \{u \to v\}) \wedge (\text{למעט בהתחלה ובסוף } [k] \text{ עוברת דרך הצמתים } \sigma)\}$.

סימון: יהי $([n], E)$ גרף מכוון ותהא $L \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצת המשקל אזי $F^{(0)} \in M_n(\mathbb{R})$ באשר לכל $u, v \in V$ מתקיים $F^{(0)}_{u,v} = L$.

טענה: יהי $([n], E)$ גרף מכוון ויהיו $u, v \in [n]$ אזי $F^{(k)}_{u,v} = \min\left\{F^{(k-1)}_{u,v}, F^{(k-1)}_{u,k} + F^{(k-1)}_{k,v}\right\}$.

אלגוריתם פלויד־וורשאל: יהי $([n], E)$ גרף מכוון ותהא $L \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצת המשקל אזי

```
function FloydWarshall(n, L):
    Π ← M_n([n])
    for u ∈ [n] do
        for v ∈ [n] do
            if (u ≠ v) ∧ (L_{u,v} < ∞) then
                Π_{u,v} ← u
            else
                Π_{u,v} ← None
        end
    end
    F ← L
    for k ∈ [n] do
        for u ∈ [n] do
            for v ∈ [n] do
                if F_{u,k} + F_{k,v} < F_{u,v} then
                    F_{u,v} ← F_{u,k} + F_{k,v}
                    Π_{u,v} ← Π_{k,v}
            end
        end
    end
    return (F, Π)
```

טענה: יהי $([n],E)$ גרף מכוון ותהא $L \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצת המשקל אזי $\text{FloydWarshall}(n,L)$ פתרון לבעיית APSP.

טענה: יהי $([n],E)$ גרף מכוון ותהא $L \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצת המשקל אזי סיבוכיות זמן הריצה של $\text{FloydWarshall}(n,L)$ הינה $\mathcal{O}(n^3)$.

קבוצה בלתי תלויה: יהי G גרף אזי $I \subseteq V$ עבורה לכל $u,v \in I$ מתקיים $(u,v) \notin E$.

סימון: יהי $([n],E)$ גרף שרוך ויהי $w:[n]\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ אזי $\text{mis}(i) = \max\{w(I) \mid (I \subseteq [i]) \wedge (\text{בלתי תלויה } I)\}$.

טענה: יהי $([n],E)$ גרף שרוך ויהי $w:[n]\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ אזי $\text{mis}(0)=0$ וכן $\text{mis}(1)=w(1)$ וכן $\text{mis}(i)=\max\{w(i)+\text{mis}(i-2),\text{mis}(i-1)\}$.

מסקנה: יהי $([n],E)$ גרף שרוך ויהי $w:[n]\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ אזי $\text{mis}(n)$ בעל סיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}(n)$.

תת־סדרה: יהי Σ אלפבית ותהא $A\in\Sigma^*$ אזי $B\in\Sigma^*$ עבורה קיימת $f:[|B|]\to[|A|]$ עולה ממש וחח"ע המקיימת $A_{f(i)}=B_i$ לכל $i\in[|B|]$.

סימון: יהי Σ אלפבית תהא $A\in\Sigma^*$ ותהא $B\in\Sigma^*$ תת־סדרה אזי $B \lhd A$.

בעיית תת־סדרה משותפת ארוכה ביותר (LCS): יהי Σ אלפבית ותהיינה $A,B\in\Sigma^*$ אזי $\max\{|C| \mid (C\in\Sigma^*)\wedge(C\lhd A)\wedge(C\lhd B)\}$.

סימון: תהיינה $A,B\in\Sigma^*$ תהא $k\leq|A|$ ותהא $\ell\leq|B|$ אזי $\text{lcs}(k,\ell)=\max\{|C| \mid (C\lhd(A_1,\ldots,A_k))\wedge(C\lhd(B_1,\ldots,B_\ell))\}$.

טענה: תהיינה $A,B\in\Sigma^*$ אזי $\text{lcs}(k,\ell)=\begin{cases}\text{Null} & \begin{smallmatrix} 0 & (k=0)\vee(\ell=0) \\ \text{lcs}(k-1,\ell-1)+1 & (k,\ell>0)\wedge(A_k=B_\ell) \\ \max\{\text{lcs}(k-1,\ell),\text{lcs}(k,\ell-1)\} & (k,\ell>0)\wedge(A_k\neq B_\ell)\end{smallmatrix}\end{cases}$.

מסקנה: תהיינה $A,B\in\Sigma^*$ אזי $\text{lcs}(|A|,|B|)$ בעל סיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}(|A|\cdot|B|)$ וסיבוכיות מקום $\mathcal{O}(|A|\cdot|B|)$.

בעיית תת־סדרה עולה ארוכה ביותר (LIS): יהי Σ אלפבית בעל סדר $\prec$ ותהא $A\in\Sigma^*$ אזי $\max\{|C| \mid (C\lhd A)\wedge(\forall i.C_{i-1}\prec C_i)\}$.

טענה: תהא $A\in\Sigma^*$ אזי בעיית LIS של A הינה בעיית LCS של $(A,\text{sort}(A))$.

סימון: תהא $A\in\Sigma^*$ אזי $\text{lenlis}(k)=\max\{|X| \mid ((A_1,\ldots,A_k) \text{ של lis הינו } X)\wedge(A_k \text{ מסתיים עם } X)\}$.

טענה: תהא $A\in\Sigma^*$ אזי $\text{lenlis}(1)=1$ וכן $\text{lenlis}(k)=\max_{i\in[k-1]}\{\text{lenlis}(i) \mid A_i\prec A_k\}$.

סימון: תהא $A\in\Sigma^*$ אזי $\pi\text{lis}(1)=\text{None}$ וכן $\pi\text{lis}(k)=\arg\max\{\text{lenlis}(i) \mid A_i\prec A_k\}$.

מסקנה: תהא $A\in\Sigma^*$ ויהי $k=\arg\max\{\text{lenlis}(1),\ldots,\text{lenlis}(|A|)\}$ אזי $\left(x_{\pi\text{lis}^{(\ell)}(k)},\ldots,x_{\pi\text{lis}^{(2)}(k)},x_{\pi\text{lis}(k)},x_k\right)$ פתרון של LIS בעל סיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}\left(|A|^2\right)$.

סימון: תהא $A\in\Sigma^*$ אזי $\min\text{lis}(m)=\min\{x_k \mid \text{lenlis}(k)=m\}$.

טענה: תהא $A\in\Sigma^*$ אזי $\min\text{lis}$ עולה ממש.

מסקנה: תהא $A\in\Sigma^*$ אזי $(\min\text{lis}(1),\ldots,\min\text{lis}(\ell))$ פתרון של LIS בעל סיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}(|A|\cdot\log(|A|))$.

סימון: יהיו $p_1\ldots p_n\in[0,1]$ ויהי T עץ חיפוש בינארי מעל $\{x_1\ldots x_n\}$ אזי $\text{costp}(T)=\sum_{i=1}^{n}(p_i\cdot\text{depth}_T(x_i))$.

בעיית עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי: יהיו $p_1\ldots p_n\in[0,1]$ אזי עץ חיפוש בינארי T עבורו $\text{costp}(T)$ מינימלי.

טענה: יהיו $p_1\ldots p_n\in[0,1]$ ויהי T עץ חיפוש בינארי אזי $\text{costp}(T)=\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\right)+\text{costp}(T.\text{left})+\text{costp}(T.\text{right})$.

מסקנה: יהיו $p_1\ldots p_n\in[0,1]$ ויהי T פתרון לבעיית עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי אזי $T.\text{left},T.\text{right}$ הינם פתרונות לבעיית עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי.

סימון: יהיו $p_1\ldots p_n\in[0,1]$ אזי $\text{pp}(i,j)=\sum_{k=i}^{j}p_k$.

סימון: יהיו $p_1\ldots p_n\in[0,1]$ ויהיו $x_1\ldots x_n$ אזי $\text{cp}(i,j)=\min\{\text{costp}(T) \mid \{x_i\ldots x_j\} \text{ עץ חיפוש בינארי מעל } T\}$.

טענה: יהיו $p_1\ldots p_n\in[0,1]$ ויהיו $x_1\ldots x_n$ אזי $\text{cp}(i,i-1)=0$ וכן $\text{cp}(i,i)=p_i$ וכן $\text{cp}(i,j)=\text{pp}(i,j)+\min_{i\leq k\leq j}(\text{cp}(i,k-1)+\text{cp}(k+1,j))$.

אלגוריתם לבעיית עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי: יהיו $p_1\ldots p_n\in[0,1]$ ויהיו $x_1\ldots x_n$ אזי

```
function OSBST(pp):
    K, C ← List([n]^2)
    for i ← [n+1] do
        C(i, i−1) ← 0
    end
    for d ← {0, ..., n−1} do
        for i ← [n−d] do
            C(i, i+d) ← ∞
            for k ← {i, ..., i+d} do
                t ← pp(i, j) + C(i, k−1) + C(k+1, j)
                if t < C(i, j) then
                    C(i, j) ← t
                    K(i, j) ← k
            end
        end
    end
```

מסקנה: יהיו $p_1 \ldots p_n \in (0,1]$ אזי K. $\mathrm{OSBST}(\mathrm{pp})$ משרה פתרון לבעיית עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי.

מסקנה: יהיו $p_1 \ldots p_n \in (0,1]$ אזי $\mathrm{OSBST}(\mathrm{pp})$ בעל סיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}(n^3)$.

הערה: קיים אלגוריתם קנות' לבעיית עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי בסיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}(n^2)$.

בעיית 0/1 תרמיל הגב: יהיו $W, w_1 \ldots w_n, v_1 \ldots v_n \geq 0$ אזי $S \subseteq [n]$ באשר $\sum_{i\in S} v_i$ מקסימלית וכן $\sum_{i\in S} w_i \leq W$.

בעיית שבר תרמיל הגב: יהיו $W, w_1 \ldots w_n, v_1 \ldots v_n \geq 0$ אזי $f : [n] \to [0,1]$ באשר $\sum_{i\in[n]} f(i)\, v_i$ מקסימלית וכן $\sum_{i\in[n]} f(i)\, w_i \leq W$.

אלגוריתם חמדן לבעיית שבר תרמיל הגב: יהיו $W, w_1 \ldots w_n > 0$ ויהיו $v_1 \ldots v_n \geq 0$ אזי

```
function FractionalKnapsack(W, w_1, ..., w_n, v_1, ..., v_n):
    f ← ([n] → [0,1])
    P ← List([n] × ℝ)
    for i ← [n] do
        P(i) ← (i, v_i / w_i)
        f(i) ← 0
    end
    P ← sort(P) // Sort from high to low based on second coordinate.
    t ← 0
    i ← 1
    while (t < W) ∧ (i ≤ n) do
        j ← P(i)[0]
        if t + w_j ≤ W then
            f(j) ← 1
            t ← t + w_j
        else
            f(j) ← (W − t) / w_j
            t ← W
    end
    return f
```

סימון: יהיו $W, w_1 \ldots w_n, v_1 \ldots v_n \geq 0$ אזי $\mathrm{bknap}(k, W) = \max\left\{\sum_{i\in S} v_i \mid (S \subseteq [k]) \wedge \left(\sum_{i\in S} w_i \leq W\right)\right\}$.

טענה: יהיו $w_1 \ldots w_n, v_1 \ldots v_n \geq 0$ אזי

- יהי $m \geq 0$ אזי $\mathrm{bknap}(0, m) = 0$.
- יהי $i \in [n]$ אזי $\mathrm{bknap}(i, 0) = 0$.
- יהי $m \geq 0$ ויהי $i \in [n]$ אזי $\mathrm{bknap}(i, m) = \left\{\mathrm{Null}\, {}^{\mathrm{bknap}(i-1,m)}_{\max\{\mathrm{bknap}(i-1,m), \mathrm{bknap}(i-1,m-w_i)+v_i\}} \; {}^{w_i > m}_{w_i \leq m}\right.$.

מסקנה: יהיו $W, w_1 \ldots w_n, v_1 \ldots v_n \geq 0$ אזי חישוב $\mathrm{bknap}(n, W)$ בעל סיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}(nW)$.

אלגוריתם לבעיית 0/1 תרמיל הגב: יהיו $W, w_1 \ldots w_n, v_1 \ldots v_n \geq 0$ אזי

```
function ZeroOneKnapsack(W, w_1, ..., w_n, v_1, ..., v_n):
    k ← n
    w ← W
    S ← Set([n])
    S ← ∅
    while (k > 0) ∧ (w > 0) do
        if bknap(k, w) ≠ bknap(k − 1, w) then
            S ← S ∪ {k}
            k ← k − 1
            w ← w − w_k
        else
            k ← k − 1
    end
```

מסקנה: יהיו $W, w_1 \dots w_n, v_1 \dots v_n \geq 0$ אזי $\text{ZeroOneKnapsack}\left(W, w_1 \dots w_n, v_1 \dots v_n\right)$ פתרון לבעיית 0/1 תרמיל הגב.

רשת זרימה: יהי G גרף מכוון וממושקל $c \geq 0$ ותהיינה $s, t \in V$ אזי (V, E, c, s, t).

פונקציית קיבולת: תהא (V, E, c, s, t) רשת זרימה אזי c.

קודקוד מקור: תהא (V, E, c, s, t) רשת זרימה אזי s.

קודקוד בור: תהא (V, E, c, s, t) רשת זרימה אזי t.

עודף זרימה: תהא (V, E, c, s, t) רשת זרימה ותהא $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ אזי $\chi_f : V \to \mathbb{R}$ המוגדרת $\chi_f(v) = \sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} f((u, v)) - \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} f((v, u))$.

פונקציית זרימה: תהא (V, E, c, s, t) רשת זרימה אזי $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ עבורה

- חסם קיבולת: $f \leq c$.
- שימור זרם: לכל $v \in V \backslash \{s, t\}$ מתקיים $\chi_f(v) = 0$.

בעיית הזרימה המקסימלית: תהא (V, E, c, s, t) רשת זרימה אזי פונקציית זרימה f עבורה $\chi_f(t)$ מקסימלית.

חתך s-t: תהא (V, E, c, s, t) רשת זרימה אזי חתך (S, T) עבורו $s \in S$ וכן $t \in T$.

קשתות חוצות: תהא G רשת זרימה ויהי (S, T) חתך s-t אזי $E(S, T) = \{(u, v) \in E \mid (u \in S) \wedge (v \in T)\}$.

קשתות אחוריות: תהא G רשת זרימה ויהי (S, T) חתך s-t אזי $E(T, S) = \{(u, v) \in E \mid (u \in T) \wedge (v \in S)\}$.

קיבולת של חתך: יהי (S, T) חתך s-t אזי $c(S, T) = \sum_{e \in E(S,T)} c(e)$.

זרימה על פני חתך: יהי (S, T) חתך s-t אזי $f(S, T) = \sum_{e \in E(S,T)} f(e) - \sum_{e \in E(T,S)} f(e)$.

ערך/גודל של זרימה: תהא f זרימה אזי $|f| = f(V \backslash \{t\}, \{t\})$.

למה: תהא f זרימה ויהי (S, T) חתך s-t אזי $|f| = f(S, T)$.

מסקנה: תהא f זרימה אזי $|f| = f(\{s\}, V \backslash \{s\})$.

למה: תהא f זרימה ויהי (S, T) חתך s-t אזי $f(S, T) \leq c(S, T)$.

מסקנה: תהא f זרימה ויהי (S, T) חתך s-t עבורו $f(S, T) = c(S, T)$ אזי

- f זרימה מקסימלית.
- לכל חתך s-t (A, B) מתקיים $c((S, T)) \leq c((A, B))$.

מסלול ניתן להגדלה s-t: תהא f זרימה אזי $P \in \{s \to t\}$ באשר $f(e) < c(e)$ לכל $e \in P$.

טענה הגדלת מסלול: תהא f זרימה ויהי $P \in \{s \to t\}$ מסלול ניתן להגדלה s-t אזי קיימת פונקציית זרימה g עבורה $g_{\restriction_{E \backslash P}} = f_{\restriction_{E \backslash P}}$ וכן $|f| < |g|$.

זרימה חוסמת: פונקציית זרימה f עבורה לא קיים מסלול ניתן להגדלה s-t.

קשת אנטי־מקבילה: יהי G גרף מכוון ותהא $e \in E$ עבורה $e^{-1} \in E$ אזי e^{-1}.

רשת זרימה שיורית: תהא (V, E, c, s, t) רשת זרימה חסרת קשתות אנטי־מקבילות ותהא f זרימה אזי (V, E_f, c_f, s, t) באשר

- $E_f = \{e \in E \mid c(e) > f(e)\} \cup E^{-1}$.
- פונקציית שיוריות הקיבולת: תהא $e \in E_f$ אזי $c_f(e) = \begin{cases} c(e) - f(e) & e \in E \\ f\left(e^{-1}\right) & e \in E^{-1} \end{cases}$ Null.

רשת זרימה שיורית: תהא (V, E, c, s, t) רשת זרימה בעלת קשתות אנטי־מקבילות ותהא f זרימה אזי (V, E_f, c_f, s, t) באשר

- פונקציית שיוריות הקיבולת: תהא $e \in E$ אזי $c_f(e) = c(e) - f(e) + f\left(e^{-1}\right)$.
- $E_f = \{e \in E \mid c_f(e) > 0\}$.

הערה: יהיו $u,v\in V$ עבורם $(u,v)\notin E$ אזי $c\left(\left(u,v\right)\right)=0$.

סימון: תהא G רשת זרימה ותהא f זרימה אזי G_f הינה רשת הזרימה השיורית.

מסלול ניתן לשיפור s-t: תהא G רשת זרימה ותהא f זרימה אזי מסלול $P\in\{s\to t\}$ בגרף G_f.

מחסום/שיורית הקיבולת של מסלול: תהא f זרימה ויהי P מסלול ניתן לשיפור s-t אזי $c_f\left(P\right)=\min\left\{c_f\left(e\right)\mid e\in P\right\}$.

זרימה משופרת: תהא f זרימה ויהי P מסלול ניתן לשיפור s-t אזי $f_P\left(e\right)=\begin{cases} f(e)+c_f(P) & e\in P\\ f(e)-c_f(P) & e^{-1}\in P\\ f(e) & \text{else}\end{cases}$ Null לכל $e\in E\left(G\right)$.

למה: תהא f זרימה ויהי P מסלול ניתן לשיפור s-t אזי f_P זרימה של G וכן $|f_P|=|f|+c_f\left(P\right)$.

משפט: תהא f זרימה התב"ש

- f זרימה מקסימלית ב־G.
- לכל מסלול $P\in\{s\to t\}$ בגרף G_f מתקיים כי P אינו מסלול ניתן לשיפור s-t.
- קיים (S,T) חתך s-t מינימלי ל־G.

משפט זרימה מקסימלית קיבולת מינימלית: תהא G רשת זרימה אזי $\max\left\{|f|\mid \text{זרימה } f\right\}=\min\left\{c\left(S,T\right)\mid \text{חתך s-t } (S,T)\right\}$.

אלגוריתם פורד־פלקרסון: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי

```
function FordFulkerson(V, E, c, s, t):
    f ← (E → ℝ)
    f ← 0
    while True do
        G_f ← ResidualNetwork(G, c, s, t, f) // Construct it like any graph.
        π_{G_f} ← BFS(G, s)
        if {s → t} ∩ π_{G_f} = ∅ then return f
        else
            P ← {s → t} ∩ π_{G_f} // The path is taken from π_{G_f}.
            f ← f_P
    end
```

הערה: האלגוריתם מלעיל הוא האימפלמנטציה של EdmondsKarp ובאלגוריתם FordFulkerson לרוב מניחים שיטה גנרית למציאת מסלול ניתן לשיפור.

סימון: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי $\text{FF}=\text{FordFulkerson}\left(V,E,c,s,t\right)$.

משפט: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה באשר $c\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$ אזי קיימת זרימה מקסימלית f באשר $f\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$.

טענה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה באשר $c\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$ אזי בכל איטרציה של FF מתקיים

- f זרימה של G.
- $f\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$.
- $c_f\left(P\right)\geq 1$.

משפט: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה באשר $c\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$ ותהא f זרימה מקסימלית באשר $f\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$ אזי

- FF פתרון לבעיית הזרימה המקסימלית לכל בחירת מסלולים באלגוריתם.
- FF עושה לכל היותר $|f|$ שיפורי מסלול.
- $\text{FF}\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$.

מסקנה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה באשר $c\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$ ותהא f זרימה מקסימלית באשר $f\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$ אזי סיבוכיות זמן הריצה של FF הינה $\mathcal{O}\left(|E|\,|f|\right)$.

טענה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה באשר $c\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$ ותהא f זרימה מקסימלית באשר $f\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$ אזי סיבוכיות זמן הריצה של EdmondsKarp הינה $\mathcal{O}\left(|E|^2\cdot|V|\right)$.

זיווג: יהי G גרף לא מכוון אזי $M\subseteq E\left(G\right)$ עבורה לכל $e_1,e_2\in M$ מתקיים $|e_1\cap e_2|\neq 1$.

בעיית זיווג מקסימלי: יהי G גרף לא מכוון אזי $\arg\max\left\{|M|\mid \text{זיווג של } G\ M\right\}$.

זיווג מושלם: יהי G גרף לא מכוון אזי זיווג $M\subseteq E\left(G\right)$ עבורו $\bigcup M=V\left(G\right)$.

סימון: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון ויהי (A,B) חתך עבורו לכל $e\in E\left(G\right)$ מתקיים $|e\cap A|=|e\cap B|=1$ אזי $G_L=A$ וכן $G_R=B$.

סימון: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון ויהיו $s,t\notin V\left(G\right)$ אזי $V^{\perp}=V\left(G\right)\cup\{s,t\}$.

סימון: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון אזי $E^{\rightarrow}=\{\langle v,u\rangle \mid (\{v,u\}\in E(G))\wedge(v\in G_L)\wedge(u\in G_R)\}$.

סימון: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון ויהיו $s,t\notin V(G)$ אזי $E^{\perp}=(\{s\}\times G_L)\cup E^{\rightarrow}\cup(G_R\times\{t\})$.

סימון: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון ויהיו $s,t\notin V(G)$ אזי $c^{\perp}:E^{\perp}\to\mathbb{R}_+$ המוגדרת $c^{\perp}_{\restriction(\{s\}\times G_L)\cup(G_R\times\{t\})}=1$ וכן $c^{\perp}_{\restriction E^{\rightarrow}}=\infty$.

סימון: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון ויהיו $s,t\notin V(G)$ אזי $G^{\perp}=\left(V^{\perp},E^{\perp},c^{\perp},s,t\right)$.

אלגוריתם לבעיית זיווג מקסימלי בגרף דו־צדדי: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון אזי

```
function BMMF(G):
    (s,t) ∉ V(G)
    G^⊥ ← (V^⊥, E^⊥, c^⊥, s, t)
    f ← FordFulkerson(G^⊥)
    return {e ∈ E(G) | f(e) = 1}
```

טענה: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון אזי $\text{BMMF}(G)$ הינו זיווג מקסימלי.

טענה: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון אזי $\text{BMMF}(G)$ בעל סיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}(|E|\cdot|V|)$.

משפט: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון ויהיו $s,t\notin V(G)$ אזי $\max\{|M|\mid G \text{ זיווג של } M\}=\max\{|f|\mid G^{\perp} \text{ זרימה של } f\}$.

כיסוי צמתים: יהי G גרף לא מכוון אזי $C\subseteq V(G)$ עבורה לכל $e\in E$ מתקיים $e\cap C\neq\varnothing$.

בעיית כיסוי צמתים מינימלי: יהי G גרף לא מכוון אזי $\arg\min\{|C|\mid G \text{ כיסוי צמתים של } C\}$.

למה: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון אזי $\max\{|M|\mid G \text{ זיווג של } M\}\le\min\{|C|\mid G \text{ כיסוי צמתים של } C\}$.

אלגוריתם לבעיית כיסוי צמתים מינימלי בגרף דו־צדדי: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון אזי

```
function BMVC(G):
    (M, s, t, G^⊥, f) ← BMMF(G)
    C ← V(G)
    for {u,v} ∈ M ∩ (G_L × G_R) do
        if {τ : s → v | G_f^⊥ מסלול בגרף τ} ≠ ∅ then
            C ← C ∪ {v}
        else
            C ← C ∪ {u}
    end
    return C
```

טענה: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון אזי $\text{BMVC}(G)$ הינו כיסוי צמתים.

טענה: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון ויהי M זיווג מקסימלי אזי $|\text{BMVC}(G)|=|M|$.

מסקנה: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון אזי $\text{BMVC}(G)$ הינו כיסוי צמתים מינימלי.

משפט: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון אזי $\max\{|M|\mid G \text{ זיווג של } M\}=\min\{|C|\mid G \text{ כיסוי צמתים של } C\}$.

סימון: יהי G גרף מכוון ויהיו $s,t\in V$ אזי $\text{DP}_{s,t}=\max\{n\in\mathbb{N}\mid t \text{ ל־} s \text{ קיימים } n \text{ מסלולים זרים בקשתות מ־}\}$.

סימון: יהי G גרף מכוון ויהיו $s,t\in V$ אזי $\text{DE}_{s,t}=\min\{n\in\mathbb{N}\mid t \text{ ל־} s \text{ קיימות } n \text{ קשתות שאם נסירן לא יהיה מסלול מ־}\}$.

רשת 0/1: יהי G גרף מכוון ויהיו $s,t\in V$ אזי $(V,E,1,s,t)$.

טענה: יהי G גרף מכוון ויהיו $s,t\in V$ אזי $\text{DP}_{s,t}=\max\{|f|\mid \text{0/1 זרימה ברשת } f\}$.

טענה: יהי G גרף מכוון ויהיו $s,t\in V$ אזי $\text{DE}_{s,t}=\min\{c(S,T)\mid \text{0/1 ברשת s-t חתך } (S,T)\}$.

מסקנה משפט מנגר: יהי G גרף מכוון ויהיו $s,t\in V$ אזי $\text{DP}_{s,t}=\text{DE}_{s,t}$.

סימון: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון ותהא $A\subseteq G_L$ אזי $N(A)=\{y\in G_R\mid (A\times\{y\})\cap E\neq\varnothing\}$.

משפט החתונה/הול: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון באשר $|G_L|=|G_R|$ אזי (קיים זיווג מושלם ב־G)$\Longleftrightarrow$(לכל $A\subseteq G_L$ מתקיים $|A|\le|N(A)|$).

גרף k־קשיר בקשתות: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי גרף מכוון G עבורו לכל $u,v\in G$ קיימים k מסלולים זרים בקשתות מ־u ל־v.

אלגוריתם לבדיקת k־קשירות בקשתות: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ ויהי G גרף מכוון אזי

```
function kConnected(k, G):
    v ← V
    for u ∈ V\{v} do
        /* The following FordFulkerson calls will return True if the flow size is bigger then k after k augmenting
           paths else False                                                                              */
        b_1 ← FordFulkerson(V, E, 1, v, u)
        b_2 ← FordFulkerson(V, E, 1, u, v)
        if (¬b_1) ∨ (¬b_2) then  return False
    end
    return True
```

טענה: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ ויהי G גרף מכוון אזי (G גרף k־קשיר בקשתות)$\Longleftrightarrow$(kConnected $(G) =$ True).

טענה: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ ויהי G גרף מכוון אזי סיבוכיות זמן הריצה של kConnected (G) הינה $\mathcal{O}(|V| \cdot k\,|E|)$.

פונקציית פרה־זרימה/קדם זרימה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ עבורה

- חסם קיבולת: $f \leq c$.
- לכל $v \in V \backslash \{s,t\}$ מתקיים $\chi_f(v) \geq 0$.

צומת גולשת/בעלת עודף זרימה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה ותהא f פונקציית קדם זרימה אזי $v \in V \backslash \{s,t\}$ עבורה $\chi_f(v) > 0$.

סימון: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה חסרת קשתות אנטי־מקבילות ותהא f קדם זרימה אזי $E_f = \{e \in E \mid c(e) > f(e)\} \cup E^{-1}$.

סימון: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה בעלת קשתות אנטי־מקבילות ותהא f קדם זרימה אזי $E_f = E_f = \{e \in E \mid c_f(e) > 0\}$.

פונקציית שיוריות הקיבולת: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה ותהא f קדם זרימה אזי $c_f : E_f \to \mathbb{R}_+$ המוגדרת $c_f(e) = \left\{ \text{Null} \begin{smallmatrix} c(e)-f(e) & e \in E \\ f(e^{-1}) & e \in E^{-1} \end{smallmatrix} \right.$.

סימון: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה תהא f קדם זרימה ויהיו $u,v \in V$ אזי $\Delta_{u,v} = \min\{\chi_f(u), c_f((u,v))\}$.

אלגוריתם דחיפה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה תהא f קדם זרימה ויהיו $u,v \in V$ אזי

```
function Push((V, E, c, s, t), f, u, v):
    f* ← f
    if (u, v) ∈ E then
        | f*((u, v)) ← f((u, v)) + Δ_{u,v}
    if (v, u) ∈ E then
        | f*((v, u)) ← f((v, u)) − Δ_{u,v}
    return f*
```

סימון: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה תהא f קדם זרימה ויהיו $u,v \in V$ אזי $\text{Push}(f,u,v) = \text{Push}((V,E,c,s,t), f, u, v)$.

טענה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה תהא f קדם זרימה ויהיו $u,v \in V$ אזי $\text{Push}(f,u,v)$ קדם זרימה.

טענה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה תהא f קדם זרימה ויהיו $u,v \in V$ אזי $\chi_{\text{Push}(f,u,v)}(u) = \chi_f(u) - \Delta_{u,v}$.

דחיפה מרווה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה תהא f קדם זרימה ויהיו $u,v \in V$ עבורם $\Delta_{u,v} = c_f((u,v))$ אזי $\text{Push}(f,u,v)$.

פונקציית גובה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה ותהא f קדם זרימה אזי $h : V \to \mathbb{N}$ עבורה

- $h(s) = |V|$.
- $h(t) = 0$.
- יהי $(u,v) \in E_f$ אזי $h(u) \leq h(v) + 1$.

קשת קבילה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה ותהא f קדם זרימה אזי $(u,v) \in E_f$ עבורה $\chi_f(u) > 0$ וכן $h(u) = h(v) + 1$.

אלגוריתם שינוי שם: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה תהא f קדם זרימה תהא h פונקציית גובה ותהא $u \in V$ אזי

```
function Relabel((V, E, c, s, t), f, h, u):
    h* ← h
    h*(u) ← min{h(v) | (u, v) ∈ E_f} + 1
    return h*
```

סימון: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה תהא f קדם זרימה תהא h פונקציית גובה ותהא $u \in V$ אזי $\text{Relabel}(f,h,u) = \text{Relabel}((V,E,c,s,t), f, h, u)$.

טענה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה תהא f קדם זרימה תהא h פונקציית גובה ותהא $u \in V$ אזי

- יהי $(u,v)\in E_f$ אזי $\text{Relabel}\left(f,h,u\right)\left(u\right)\le\text{Relabel}\left(f,h,u\right)\left(v\right)+1$.
- יהי $(w,u)\in E_f$ אזי $\text{Relabel}\left(f,h,u\right)\left(w\right)\le\text{Relabel}\left(f,h,u\right)\left(u\right)+1$.

מסקנה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה תהא f קדם זרימה תהא h פונקציית גובה ותהא $u\in V\backslash\{s,t\}$ אזי $\text{Relabel}\left(f,h,u\right)$ פונקציית גובה.

למה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה תהא f קדם זרימה תהא h פונקציית גובה ותהא $u\in V\backslash\{s,t\}$ אזי קיימת $(u,v)\in E_f$ קבילה ביחס ל־$\text{Relabel}\left(f,h,u\right)$.

למה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה תהא f קדם זרימה תהא h פונקציית גובה ותהיינה $u,v\in V$ אזי $h\left(u\right)\le h\left(v\right)+\delta_{G_f}\left(u,v\right)$.

מסקנה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה תהא f קדם זרימה תהא h פונקציית גובה ויהי $u\in V$ עבורו קיים מסלול מ־u ל־t ב־G_f אזי $h\left(u\right)\le\left|V\right|-1$.

מסקנה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה תהא f קדם זרימה תהא h פונקציית גובה ויהי $u\in V$ עבורו קיים מסלול מ־u ל־s ב־G_f אזי $h\left(u\right)\le 2\left|V\right|-1$.

מסקנה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה תהא f קדם זרימה ותהא h פונקציית גובה אזי לא קיים מסלול מ־s ל־t ב־G_f.

למה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה תהא f קדם זרימה ותהא $u\in V$ באשר $\chi_f\left(u\right)>0$ אזי קיים מסלול P מ־s ל־u ב־G עבורו $f\left(e\right)>0$ לכל $e\in P$.

מסקנה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה תהא f קדם זרימה ותהא $u\in V$ באשר $\chi_f\left(u\right)>0$ אזי קיים מסלול P מ־u ל־s ב־G_f.

מסקנה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה תהא f קדם זרימה ותהא $u\in V$ באשר $\chi_f\left(u\right)>0$ אזי $h\left(u\right)\le 2\left|V\right|-1$.

אלגוריתם דחיפה ושינוי שם: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי

```
function GoldbergTarjan((V, E, c, s, t)):
    f ← (E → ℝ₊)
    f ← 0
    for (s, v) ∈ E do
        f((s, v)) ← c((s, v))
    end
    h ← (V → ℕ)
    h ← 0
    h(s) ← |V|
    while {u ∈ V\{s, t} | χ_f(u) > 0} ≠ ∅ do
        u ← {u ∈ V\{s, t} | χ_f(u) > 0}
        if {(u, v) ∈ E_f | h(u) = h(v) + 1} ≠ ∅ then
            (u, v) ← {(u, v) ∈ E_f | h(u) = h(v) + 1}
            f ← Push(f, u, v)
        else
            h ← Relabel(f, h, u)
    end
    return f
```

סימון: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי $f_s:E\to\mathbb{R}_+$ המוגדרת $f_s\left(\left(u,v\right)\right)=\begin{cases}c\left(\left(u,v\right)\right) & u=s\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

סימון: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי $\mathbb{1}_s:V\to\mathbb{N}$ המוגדרת $\mathbb{1}_s\left(u\right)=\begin{cases}1 & u=s\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

למה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי $\left|V\right|\cdot\mathbb{1}_s$ פונקציית גובה וכן לא קיים מסלול מ־s ל־t ב־G_{f_s}.

למה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי לאחר כל איטרציה של GoldbergTarjan מתקיים

- f הינה קדם זרימה.
- h פונקציית גובה.
- לא קיים מסלול מ־s ל־t ב־G_f.

למה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי GoldbergTarjan קוראת לפונקציה Relabel לכל היותר $2\cdot\left|V\right|^2$ פעמים.

למה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי GoldbergTarjan מבצעת דחיפה מרווה לכל היותר $2\left|E\right|\left|V\right|$ פעמים.

למה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי GoldbergTarjan מבצעת דחיפה לא מרווה לכל היותר $2\left|V\right|\cdot\left(\left|E\right|\left|V\right|+\left|V\right|^2\right)2$ פעמים.

משפט: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי GoldbergTarjan הינה זרימה מקסימלית.

טענה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי ניתן לממש את GoldbergTarjan עם List בסיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}\left(\left|E\right|\cdot\left|V\right|^2\right)$.

הערה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי ניתן לממש את GoldbergTarjan עם Dynamic Trees בסיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}\left(|E|\,|V|\log\left(|V|\right)\right)$.

סימון: תהיינה $x,y\in\mathbb{R}^n$ עבורן $x_i\le y_i$ לכל $i\in[n]$ אזי $x\le y$.

סימון: תהיינה $x,y\in\mathbb{R}^n$ עבורן $x_i\ge y_i$ לכל $i\in[n]$ אזי $x\ge y$.

תוכנה לינארית: יהיו $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$ יהי $c\in\mathbb{R}^n$ תהא $P\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ יהי $p\in\mathbb{R}^m$ תהא $Q\in M_{k\times n}(\mathbb{R})$ יהי $q\in\mathbb{R}^k$ תהא $R\in M_{\ell\times n}(\mathbb{R})$ יהי $r\in\mathbb{R}^\ell$ אזי (c,P,p,Q,q,R,r).

בעיית תכנות לינארי (LP): תהא (c,P,p,Q,q,R,r) תוכנה לינארית אזי מציאת נקודת קיצון של c^Tx תחת ההנחות $\{Px\le p,Qx=q,Rx\ge r\}$.

בעיית תכנות לינארי מקסימלית: תהא (c,P,p,Q,q,R,r) תוכנה לינארית אזי מציאת נקודת מקסימום של c^Tx תחת ההנחות $\{Px\le p,Qx=q,Rx\ge r\}$.

בעיית תכנות לינארי מינימלית: תהא (c,P,p,Q,q,R,r) תוכנה לינארית אזי מציאת נקודת מינימום של c^Tx תחת ההנחות $\{Px\le p,Qx=q,Rx\ge r\}$.

הערה: מכאן והלאה נשתמש במונח תוכנה לינארית גם עבור בעיית תכנות לינארי.

סימון: תהא (c,P,p,Q,q,R,r) בעיית תכנות לינארית מקסימלית אזי

$$\begin{aligned}\max\quad & c^Tx\\ \text{s.t.}\quad & Px\le p\\ & Qx=q\\ & Rx\ge r\end{aligned}$$

סימון: תהא (c,P,p,Q,q,R,r) בעיית תכנות לינארית מינימלית אזי

$$\begin{aligned}\min\quad & c^Tx\\ \text{s.t.}\quad & Px\le p\\ & Qx=q\\ & Rx\ge r\end{aligned}$$

פתרון פיזיבילי של תוכנה לינארית: תהא (c,P,p,Q,q,R,r) תוכנה לינארית אזי $x\in\mathbb{R}^n$ עבורו $Px\le p$ וכן $Qx=q$ וכן $Rx\ge r$.

פתרון אופטימלי של תוכנה לינארית: תהא LP תוכנה לינארית אזי $x\in\mathbb{R}^n$ המהווה פתרון של בעיית התכנות הלינארי.

תוכנה לינארית פיזבילית: תוכנה לינארית LP עבורה קיים פתרון אופטימלי.

תוכנה לינארית מקסימלית חסומה: תוכנה לינארית (c,P,p,Q,q,R,r) עבורה קיים $B\in\mathbb{R}$ המקיים כי לכל פתרון פיזיבילי $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $c^Tx\le B$.

משפט: תהא LP תוכנה לינארית מקסימלית אזי (LP בעלת פתרון אופטימלי)$\Longleftrightarrow$(LP חסומה ופיזבילית).

תוכנה לינארית בצורה סטנדרטית: יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ יהי $c\in\mathbb{R}^n$ תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ויהי $b\in\mathbb{R}^m$ אזי התוכנה הלינארית המקסימלית $(c,A,b,0,0,I_n,0)$.

הערה: יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ יהי $c\in\mathbb{R}^n$ תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ויהי $b\in\mathbb{R}^m$ אזי התוכנה הלינארית המקסימלית $(c,A,b,0,0,I_n,0)$ הינה

$$\begin{aligned}\max\quad & c^Tx\\ \text{s.t.}\quad & Ax\le b\\ & x\ge 0\end{aligned}$$

טענה: תהא LP תוכנה לינארית אזי קיימת תוכנה לינארית בצורה סטנדרטית SLP אשר שקולה ל-LP.

מצולע/פאון/פוליהדרון הפיזביליות: תהא (c,P,p,Q,q,R,r) תוכנה לינארית אזי $\{Px\le p,Qx=q,Rx\ge r\}$.

קבוצה קמורה: קבוצה $K\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x,y\in K$ ולכל $\alpha\in[0,1]$ מתקיים $\alpha x+(1-\alpha)y\in K$.

נקודה קיצונית בקבוצה: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $x\in K$ עבורה לכל $y,z\in K$ ולכל $\alpha\in(0,1)$ מתקיים $x\neq\alpha y+(1-\alpha)z$.

קודקוד של פאון: יהי $P\subseteq\mathbb{R}^n$ פאון אזי נקודה קיצונית $x\in P$.

תוכנה לינארית בצורה משוואתית: יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ יהי $c\in\mathbb{R}^n$ תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ויהי $b\in\mathbb{R}^m$ אזי התוכנה הלינארית המקסימלית $(c,0,0,A,b,I_n,0)$.

הערה: יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ יהי $c\in\mathbb{R}^n$ תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ויהי $b\in\mathbb{R}^m$ אזי התוכנה הלינארית המקסימלית $(c,0,0,A,b,I_n,0)$ הינה

$$\begin{aligned}\max\quad & c^Tx\\ \text{s.t.}\quad & Ax=b\\ & x\geq0\end{aligned}$$

צורת סלאק/צורה רפויה של תוכנה לינארית סטנדרטית: תהא $(c,A,b,0,0,I_n,0)$ תוכנה לינארית בצורה סטנדרטית אזי התוכנה הלינארית המקסימלית $\left(\left(\text{Null}\,\frac{c}{0}\right),0,0,(A|I_m),b,I_{n+m},0\right)$.

הערה: תהא $(c,A,b,0,0,I_n,0)$ תוכנה לינארית בצורה סטנדרטית אזי התוכנה הלינארית המקסימלית $\left(\left(\text{Null}\,\frac{c}{0}\right),0,0,(A|I_m),b,I_{n+m},0\right)$ הינה

$$\begin{aligned}\max\quad & c^Tx\\ \text{s.t.}\quad & Ax+s=b\\ & \left(\text{Null}\,\frac{x}{s}\right)\geq0\end{aligned}$$

משתנים בסיסיים בצורה רפויה: תהא SF צורה רפויה אזי $\{x_{n+1},\ldots,x_{n+m}\}$ בבעיית התכנות הלינארי.

משתנים לא בסיסיים בצורה רפויה: תהא SF צורה רפויה אזי $\{x_1,\ldots,x_n\}$ בבעיית התכנות הלינארי.

טענה צורה רפויה: תהא SLP תוכנה לינארית בצורה סטנדרטית ויהי $x\in\mathbb{R}^n$ אזי (קיים $y\in\mathbb{R}^m$ עבורו $\left(\text{Null}\,\frac{x}{y}\right)$ פתרון פיזיבילי של הצורה הרפויה)$\Longleftrightarrow$(x פתרון פיזיבילי של SLP).

אלגוריתם סימפלקס: ...

טענה: בעיית הזרימה המקסימלית הינה בעיית תכנות לינארי מקסימלית.

מסקנה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי בעיית הזרימה המקסימלית הינה

$$\begin{aligned}\max\quad & \sum_{\substack{u\in V\\(u,v)\in E}}f((u,t))-\sum_{\substack{u\in V\\(v,u)\in E}}f((v,t))\\ \text{s.t.}\quad & \sum_{\substack{u\in V\\(u,v)\in E}}f((u,v))-\sum_{\substack{u\in V\\(v,u)\in E}}f((v,u))=0 && ,\forall v\in V\backslash\{s,t\}\\ & f((u,v))\leq c((u,v)) && ,\forall(u,v)\in E\\ & f((u,v))\geq0 && ,\forall(u,v)\in E\end{aligned}$$

רשת זרימה בעלת עלות: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה ותהא $a:E\to\mathbb{R}$ אזי (V,E,c,s,t,a).

עלות זרימה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה ותהא f זרימה אזי $a\cdot f$.

בעיית העלות המינימלית: תהא (V,E,c,s,t,a) רשת זרימה בעלת עלות ויהי $d\in\mathbb{N}_+$ אזי פונקציית זרימה f עבורה $\chi_f(t)=d$ וכן $\sum_{e\in E}a(e)\cdot f(e)$ מינימלית.

טענה: בעיית העלות המינימלית הינה בעיית תכנות לינארי מינימלית.

מסקנה: תהא (V,E,c,s,t,a) רשת זרימה בעלת עלות ויהי $d\in\mathbb{N}_+$ אזי בעיית העלות המינימלית הינה

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(u,v)\in E} a\left((a,v)\right)\cdot f\left((a,v)\right) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{\substack{u\in V\\(u,v)\in E}} f\left((u,t)\right)-\sum_{\substack{u\in V\\(v,u)\in E}} f\left((v,t)\right)=d \\
& \sum_{\substack{u\in V\\(u,v)\in E}} f\left((u,v)\right)-\sum_{\substack{u\in V\\(v,u)\in E}} f\left((v,u)\right)=0 \qquad ,\forall v\in V\setminus\{s,t\} \\
& f\left((u,v)\right)\le c\left((u,v)\right) \qquad ,\forall (u,v)\in E \\
& f\left((u,v)\right)\ge 0 \qquad ,\forall (u,v)\in E
\end{aligned}
$$

מסקנה: תהא (V,E,c,s,t,a) רשת זרימה בעלת עלות יהי $d\in\mathbb{N}_+$ ותהא f זרימה מקסימלית של (V,E,c,s,t) אזי (בעיית העלות המינימלית פיזבילית)$\Longleftrightarrow$($|f|\ge d$).

טענה: תהא (V,E,c,s,t,a) רשת זרימה בעלת עלות ויהי $d\in\mathbb{N}_+$ עבורו בעיית העלות המינימלית פיזבילית אזי בעיית העלות המינימלית בעיית פתרון אופטימלי.

בעיית העלות המינימלית עם היצע וביקוש: תהא (V,E,c,s,t,a) רשת זרימה בעלת עלות ותהא $d:V\to\mathbb{Z}$ אזי פונקציה $f:E\to\mathbb{R}_+$ עבורה $f\le c$ וכן $\chi_f=d$ וכן $\sum_{e\in E}a\left(e\right)\cdot f\left(e\right)$ מינימלית.

טענה: בעיית העלות המינימלית עם היצע וביקוש הינה בעיית תכנות לינארי מינימלית.

מסקנה: תהא (V,E,c,s,t,a) רשת זרימה בעלת עלות ותהא $d:V\to\mathbb{Z}$ אזי בעיית העלות המינימלית עם היצע וביקוש הינה

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(u,v)\in E} a\left((a,v)\right)\cdot f\left((a,v)\right) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{\substack{u\in V\\(u,v)\in E}} f\left((u,v)\right)-\sum_{\substack{u\in V\\(v,u)\in E}} f\left((v,u)\right)=d\left(v\right) \qquad ,\forall v\in V \\
& f\left((u,v)\right)\le c\left((u,v)\right) \qquad ,\forall (u,v)\in E \\
& f\left((u,v)\right)\ge 0 \qquad ,\forall (u,v)\in E
\end{aligned}
$$

טענה: תהא (V,E,c,s,t,a) רשת זרימה בעלת עלות ותהא $d:V\to\mathbb{Z}$ עבורה בעיית העלות המינימלית עם היצע וביקוש פיזבילית אזי $\sum_{v\in V}d\left(v\right)=0$.

בעיית הזרימה הרב־סחורתית המקסימלית: יהי G גרף מכוון וממושקל $c\ge 0$ יהי $k\in\mathbb{N}_+$ יהיו $s_1\ldots s_k,t_1\ldots t_k\in V$ ותהא $d:[k]\to\mathbb{N}_+$ אזי

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \alpha \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{u\in V} f\left((u,t_i),i\right)-\sum_{u\in V} f\left((t_i,u),i\right)=\alpha\cdot d\left(i\right) \qquad ,\forall i\in[k] \\
& \sum_{\substack{u\in V\\(u,v)\in E}} f\left((u,v),i\right)-\sum_{\substack{u\in V\\(v,u)\in E}} f\left((v,u),i\right)=0 \qquad ,\forall i\in[k].\forall v\in V\setminus\{s_i,t_i\} \\
& \sum_{i=1}^{k} f\left((u,v),i\right)\le c\left((u,v)\right) \qquad ,\forall (u,v)\in E \\
& f\left((u,v),i\right)\ge 0 \qquad ,\forall i\in[k].\forall (u,v)\in E
\end{aligned}
$$

פונקציית תת־משקל: יהי G גרף מכוון ממושקל ℓ חסר מעגלים שליליים ויהי $s\in V$ עבורו $\delta\left(s,v\right)<\infty$ לכל $v\in V$ אזי $y:V\to\mathbb{R}$ עבורה $y\left(s\right)=0$ וכן $y\left(e_2\right)\le y\left(e_1\right)+\ell\left(e\right)$ לכל $e\in E$.

למה: יהי G גרף מכוון ממושקל ℓ חסר מעגלים שליליים יהי $s\in V$ עבורו $\delta\left(s,v\right)<\infty$ לכל $v\in V$ ותהא $y:V\to\mathbb{R}$ תת־משקל אזי $u\left(v\right)\le\delta_{\ell}\left(v\right)$ לכל $v\in V$.

קשת הדוקה: יהי G גרף מכוון ממושקל ℓ חסר מעגלים שליליים יהי $s\in V$ עבורו $\delta\left(s,v\right)<\infty$ לכל $v\in V$ ותהא $y:V\to\mathbb{R}$ תת־משקל אזי קשת $e\in E$ עבורה $y\left(e_{2}\right)=y\left(e_{1}\right)+\ell\left(e\right)$.

למה: יהי G גרף מכוון ממושקל ℓ חסר מעגלים שליליים יהי $s\in V$ עבורו $\delta\left(s,v\right)<\infty$ לכל $v\in V$ תהא $y:V\to\mathbb{R}$ תת־משקל ויהי $u\in V$ עבורו קיים מסלול σ מ־s ל־u המכיל רק קשתות הדוקות אזי $y\left(u\right)=\delta_{\ell}\left(s,u\right)$.

מסקנה: יהי G גרף מכוון ממושקל ℓ חסר מעגלים שליליים יהי $s\in V$ עבורו $\delta\left(s,v\right)<\infty$ לכל $v\in V$ ותהא $y:V\to\mathbb{R}$ תת־משקל אזי y הינה פונקציית פוטנציאל פיזבילית.

טענה: בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא הינה בעיית תכנות לינארי מינימלית.

מסקנה: יהי G גרף מכוון ממושקל ℓ ויהי $s\in V$ אזי בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא הינה

$$\begin{aligned}\max\quad & \sum_{u\in V}y(u)\\ \text{s.t.}\quad & y(v)-y(u)\le\ell(u,v)\qquad,\forall(u,v)\in E\\ & y(s)=0\end{aligned}$$

משפט: יהי G גרף מכוון ממושקל ℓ חסר מעגלים שליליים ויהי $s\in V$ עבורו $\delta\left(s,v\right)<\infty$ לכל $v\in V$ אזי

- בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא בעלת פתאון אופטימלי.
- יהי y פתרון אופטימלי של בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא אזי $y\left(u\right)=\delta_{\ell}\left(s,u\right)$ לכל $u\in V$.

טענה: יהי G גרף מכוון ממושקל ℓ בעל מעגל שלילי ויהי $s\in V$ אזי בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא לא פיזבילית.

טענה: יהי G גרף מכוון ממושקל ℓ ויהי $s\in V$ עבורו קיים $u\in V$ המקיים $\delta\left(s,u\right)=\infty$ אזי בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא לא חסומה.

בעיית תכנות לינארי בשלמים: תהא (c,P,p,Q,q,R,r) תוכנה לינארית אזי מציאת נקודת קיצון של $c^{T}x$ תחת ההנחות $\{Px\le p,Qx=q,Rx\ge r,x\in\mathbb{N}^{n}\}$.

תוכנה לינארית דואלית: תהא $(c,A,b,0,0,I_{n},0)$ תוכנה לינארית סטנדרטית אזי התוכנה הלינארית המינימלית $\left(b,0,0,0,0,\left(\mathrm{Null}\,{A^{T} \atop I_{m}}\right),\left(\mathrm{Null}\,{c \atop 0}\right)\right)$.

הערה: תהא $(c,A,b,0,0,I_{n},0)$ תוכנה לינארית סטנדרטית אזי התוכנה הלינארית המינימלית $\left(b,0,0,0,0,\left(\mathrm{Null}\,{A^{T} \atop I_{m}}\right),\left(\mathrm{Null}\,{c \atop 0}\right)\right)$ הינה

$$\begin{aligned}\min\quad & b^{T}x\\ \text{s.t.}\quad & A^{T}x\ge c\\ & x\ge0\end{aligned}$$

משפט דואליות חלשה: תהא $(c,A,b,0,0,I_{n},0)$ תוכנה לינארית סטנדרטית יהי x פתרון פיזבילי של $(c,A,b,0,0,I_{n},0)$ ויהי y פתרון פיזבילי של התוכנה הלינארית הדואלית אזי $c^{T}x\le b^{T}y$.

משפט הפרדת היפר־משטח: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קבוצה קמורה ויהי $a\notin K$ אזי קיים $x\in\mathbb{R}^{n}$ וקיים $\beta\in\mathbb{R}$ עבורם $x^{T}a<\beta$ וכן $x^{T}b>\beta$ לכל $b\in K$.

למה פארקאס: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $b\in\mathbb{R}^{m}$ אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

- קיים $x\in\mathbb{R}^{n}$ עבורו $x\ge0$ וכן $Ax=b$.
- קיים $y\in\mathbb{R}^{m}$ עבורו $b^{T}y<0$ וכן $A^{T}y\ge0$.

משפט דואליות חזקה: תהא SLP תוכנה לינארית סטנדרטית ותהא DLP התוכנה הלינארית הדואלית אזי

- יהי x פתרון אופטימלי של SLP ויהי y פתרון אופטימלי של DLP אזי $x=y$.
- (SLP פיזבילית וחסומה)$\Longleftrightarrow$(DLP פיזבילית וחסומה).
- (SLP לא חסומה)$\Longleftarrow$(DLP לא פיזבילית).
- (SLP לא פיזבילית)$\Longrightarrow$(DLP לא חסומה).

תוכנה לינארית פרימאלית: תהא SLP תוכנה לינארית סטנדרטית תהא DLP התוכנה הלינארית הדואלית ותהא SDLP הצורה הסטנדרטית של DLP אזי התוכנה הלינארית הדואלית של SDLP.

טענה: תהא SLP תוכנה לינארית סטנדרטית ותהא SDLP התוכנה הלינארית הפרימאלית אזי SLP שקולה ל־SDLP.

טענה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי הבעיה הדואלית של בעיית הזרימה המקסימלית הינה

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(u,v)\in E} c\left((u,v)\right)\cdot z\left((u,v)\right) \\
\text{s.t.} \quad & y\left(v\right)-y\left(u\right)+z\left((u,v)\right)\geq 0 \qquad ,\forall u,v\in V\backslash\left\{s,t\right\}.\left(u,v\right)\in E \\
& y\left(v\right)+z\left((s,v)\right)\geq 1 \qquad ,\forall\left(s,v\right)\in E \\
& -y\left(u\right)+z\left((u,t)\right)\geq 0 \qquad ,\forall\left(u,t\right)\in E \\
& z\left((u,v)\right)\geq 0 \qquad ,\forall\left(u,v\right)\in E
\end{aligned}$$

טענה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי הבעיה הדואלית של בעיית הזרימה המקסימלית שקולה לתוכנה הלינארית

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(u,v)\in E} c\left((u,v)\right)\cdot z\left((u,v)\right) \\
\text{s.t.} \quad & y\left(v\right)-y\left(u\right)+z\left((u,v)\right)\geq 0 \qquad ,\forall\left(u,v\right)\in E \\
& y\left(s\right)=1 \\
& y\left(t\right)=0 \\
& z\left((u,v)\right)\geq 0 \qquad ,\forall\left(u,v\right)\in E
\end{aligned}$$

משפט: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי הבעיה הדואלית של בעיית הזרימה המקסימלית בעלת פתרון אופטימלי $\left(\text{Null}\,\frac{z}{y}\right)$ עבורו $y\left(u\right)\in\left\{0,1\right\}$ לכל $u\in V$.

טענה: יהי G גרף מכוון ממושקל ℓ ויהי $s\in V$ אזי הבעיה הדואלית של בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא הינה

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(u,v)\in E} \ell\left((u,v)\right)\cdot x\left((u,v)\right) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{\substack{u\in V\\(u,v)\in E}} x\left((u,v)\right)-\sum_{\substack{u\in V\\(v,u)\in E}} x\left((v,u)\right)=1 \qquad ,\forall v\in V\backslash\left\{s\right\} \\
& x\left((u,v)\right)\geq 0 \qquad ,\forall\left(u,v\right)\in E
\end{aligned}$$

מסקנה: יהי G גרף מכוון ממושקל ℓ יהי $s\in V$ ויהי x פתרון אופטימלי של הבעיה הדואלית של בעיית המסלולים הקצרים מנקודת אזי x פתרון בשלמים.